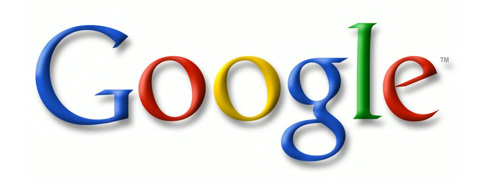
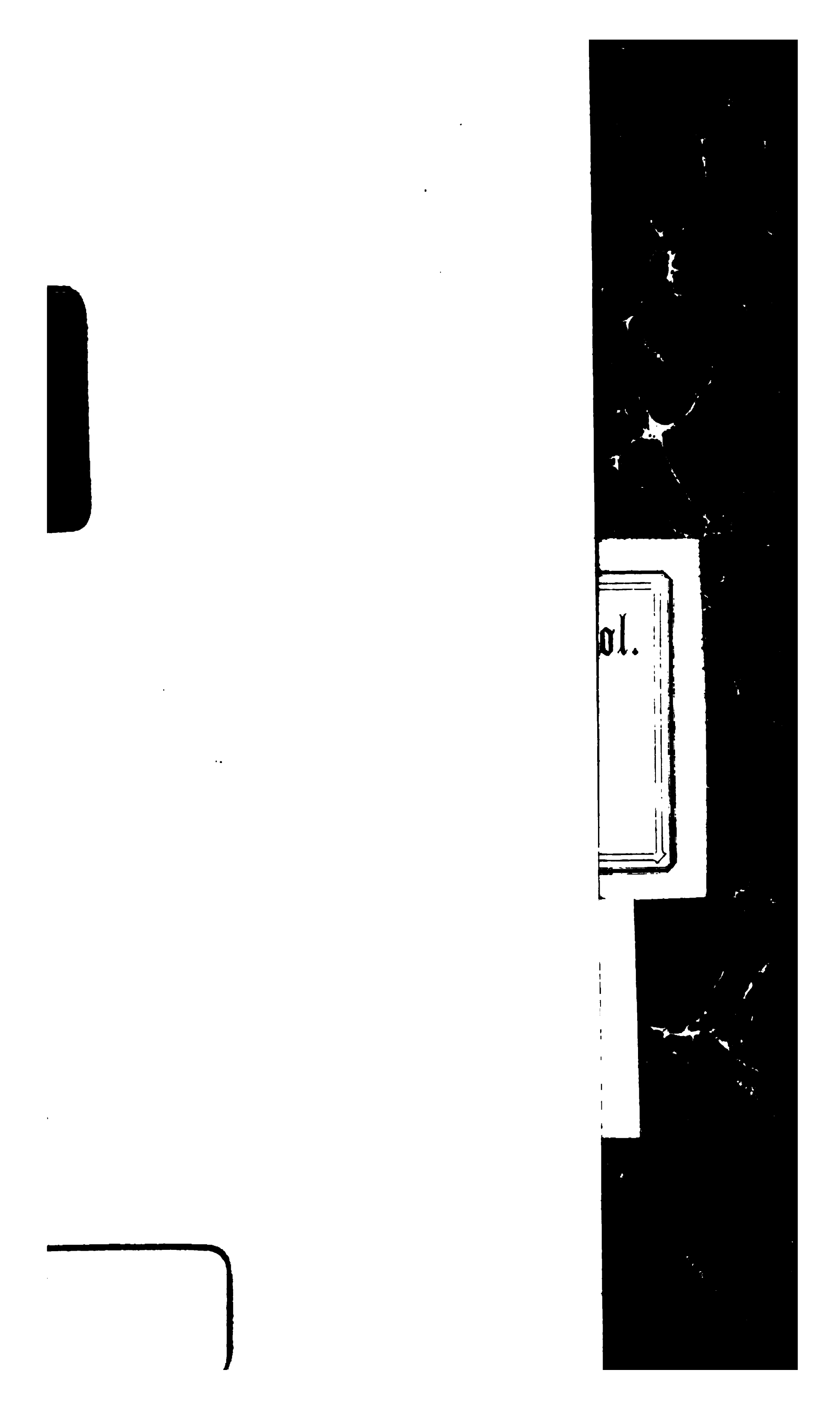
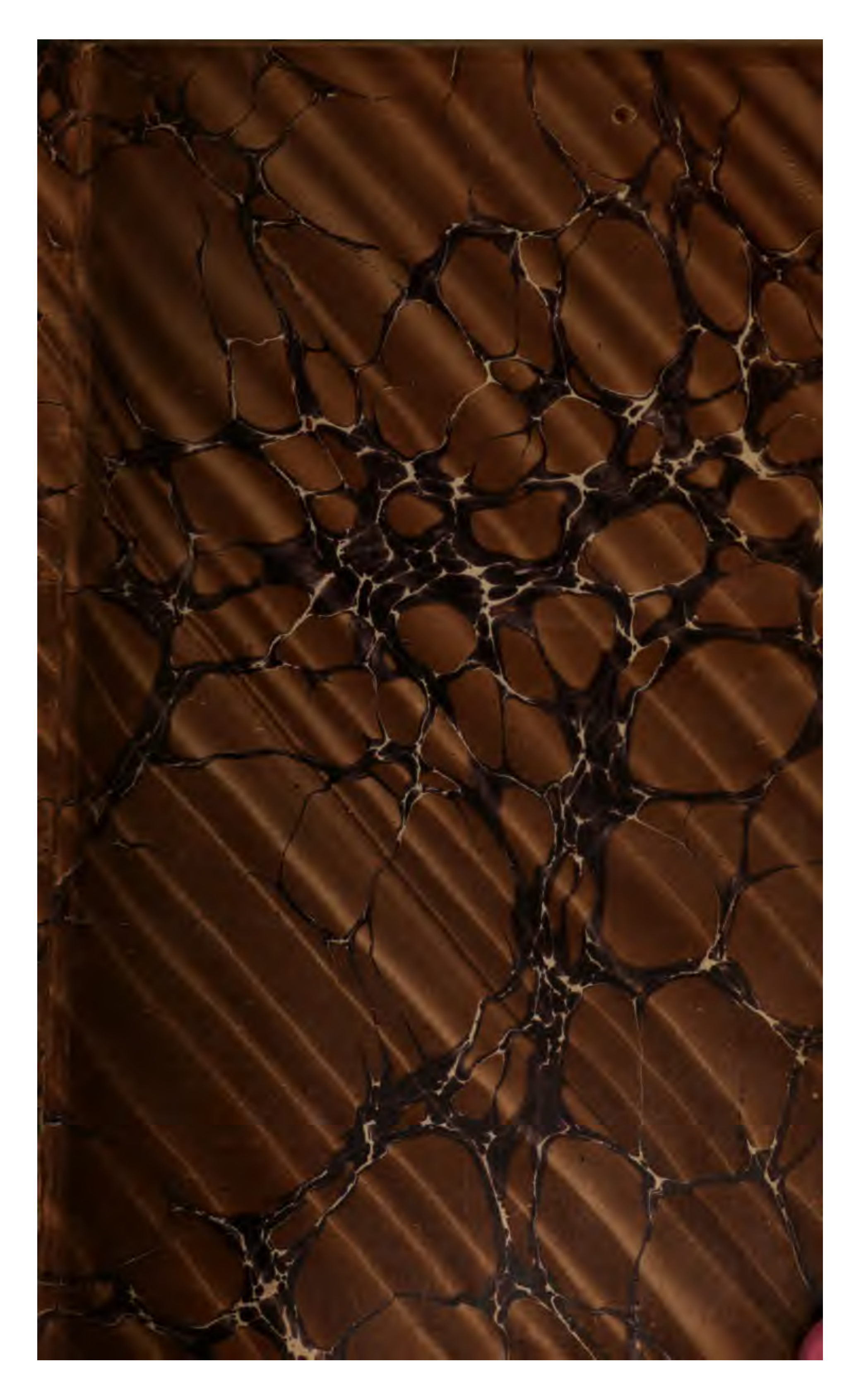



ol.



Ouvrages du même Auteur :

ÉTUDES SUR L'ART D'EXTRAIRE IMMÉDIATEMENT LE FER DE SES MINERAIS sans convertir le métal en fonte.— 1 vol. in-4°, avec atlas.—Paris, 1838. 30 fr.

COURS DE MATHÉMATIQUES, rédigé pour l'usage des Ecoles militaires ; par MM. ALLAIZE, BILLY, BOUDROT, professeurs de mathématiques, et M. L. PUISSANT, membre de l'Institut et de plusieurs Sociétés savantes. — Troisième édition, revue et augmentée par TOM RICHARD.—1 vol. in-8°, 1848. 7 fr. 50 c.

PARIS. — Imprimerie de COSSE et J. DUMAINE, rue Christine, 2.

AIDE-MÉMOIRE

GÉNÉRAL ET ALPHABÉTIQUE

DES

INGÉNIEURS

PAR

G. TOM RICHARD

INGÉNIEUR

Successivement chargé, par le Préfet et le Conseil général de l'ARIÉGE, des Essais tendant au perfectionnement des FORGES de ce département (1832 à 1836),—Ingénieur de la Compagnie agricole et industrielle du MIGLIACIARO, CORSE (1838 à 1839),—de la *Compagnie Corse* (1839 à 1840),—Directeur des FORGES FRAMONT, VOSGES (1843 à 1846).—Directeur des FORGES DE BANCA et de MENDIVE, BASSES-PYRÉNÉES.

DEUXIÈME PARTIE

F — Z

PARIS

LIBRAIRIE MILITAIRE

J. DUMAINE, LIBRAIRE-ÉDITEUR DE S. M. L'EMPEREUR

Rue et Passage Dauphine, 30.

1854

AIDE-MÉMOIRE

DES INGÉNIEURS.

F

FACTEURS USUELS. Je réunis sous ce titre les facteurs numériques dont l'emploi est le plus fréquent.

π désignant la demi-circonférence dont le rayon est 1, on a :

$\pi = 3.14159265358979...$

$\log \pi = 0.497149872694...$

$\log \text{hyp}\ \pi = 1.144729885849...$

$2\pi = 6.283185307179586...$

$4\pi = 12.566370614359...$

$\frac{\pi}{2} = \text{arc de } 90^\circ = 1.570796326794896$

$\frac{\pi}{4} = \text{arc de } 45^\circ = 0.785398163397$

$\frac{\pi}{6} = \text{arc de } 30^\circ = 0.523598775598$

$\frac{\pi}{8} = 0.3926990816987$

$\frac{\pi}{12} = 0.261799387799$

$\frac{1}{\pi} = 0.318309886183791...$

$\frac{2}{\pi} = 0.636619772367581$

$\frac{4}{\pi} = 1.273239544735$

$\pi^2 = 9.8696044$

$\frac{1}{\pi^2} = 0.10132118$

$\sqrt{\pi} = 1.772453850$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0.564189583$

Longueur de l'arc de un degré dans le cercle de rayon 1 ou

$$\frac{\pi}{180} = 0.017453293$$

Arc de une minute dans le cercle de rayon 1 ou

$$\frac{\pi}{10800} = 0.000290888$$

Arc de une seconde dans le cercle de rayon 1 ou

$$\frac{\pi}{648000} = 0.000004848$$

L'arc d'une longueur égale au rayon a pour graduation :

en degrés $57°29577951308 = \frac{180°}{\pi}$

en minutes $3437'.746770784 = \frac{10800'}{\pi}$

en second. $206264''.80624709 = \frac{648000''}{\pi}$

ou bien $57°.17'.44''.48'''.22^{iv}.29^{v}.21^{vi}$...

son sinus = 0.841470984180514

son cosinus = 0.54030230584341

$\log \frac{180}{\pi} = 1.7581226$

$\log \frac{10800}{\pi} = 3.53627388$

$\log \frac{648000}{\pi} = 5.31442513$

Rayon de la terre supposée sphérique 6366198^{m}
log = 6.8038801

Rayon moyen de la terre
log 6.8038793

Latitude de l'observatoire de Paris, 48° 50′ 13″.2

Rayon moyen de la terre en un lieu dont la latitude est L
R = 6366407 (1 + 0.00164 cos 2 L)

Degré moyen en France	$111113^{m}.4$
Arc de une minute	$1854^{m}.9$
Arc de une seconde	$30^{m}.87057$
log de ce nombre	1.4895447

Rayon moyen de la terre d'après ces bases 6367524
son log 6.8039707

Log de 24 heures ou de $86400''$ = 4.9365137

Jour sidéral =
$0^{j}.997269672 = 23^{h}.56'4''.09$ temps moyen;

Jour solaire moyen =
$1^{j}.002737909 = 24^{h}.3'56''.5554$ temps sidéral;

Année tropique $365^{j}5^{h}48'52''$

La terre, dans sa vitesse moyenne, parcourt un arc de 20″.25 en 8′.13″.2.

Mouvement propre du soleil dans un jour moyen 59′.8″.33

Accélération diurne des étoiles 3′.55″.9093

Année sidérale $365^{j}.6^{h}.9'.12''$

Accélération g d'un corps qui tombe à Paris, dans le vide :

$g = 9^{m}.80896$

$2g = 19^{m}.61792$

$\frac{g}{2} = 4^{m}.90448$

$\sqrt{2g} = 4.429$

$\frac{1}{2g} = 0.05097$

Longueur l du pendule simple réduit au vide qui bat à Paris la seconde de temps moyen :

$l = 0^{m}.993855$

RACINES.

$\sqrt{2} = 1.41421356$

$\sqrt[3]{2} = 1.25992$

$\sqrt{3} = 1.7320508$

$\sqrt{5} = 2.236067$

$\sqrt{6} = 2.44948$

$\sqrt{7} = 2.6457$

$\sqrt{8} = 2.828427$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707106781$

$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660254$

$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$

$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247$

$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5774$

$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0.44721$

FALAISES, rochers coupés à pic et souvent en surplomb sur le bord de la mer. On évalue à $1^{m}.60$ la tranche annuelle moyenne que la mer enlève aux falaises de Boulogne.

FARINE, voyez *Blé* (page 144).

FAUSSE POSITION (*Règle de*). Il arrive souvent qu'un problème conduise à une ÉQUATION dont la résolution est fort embarrassante; soit qu'elle ne rentre pas dans la série de celles que l'on sait résoudre, soit que, y rentrant, elle exige des calculs fatigants. On emploie alors avec beaucoup d'avantage la règle dite de *fausse position*.

Règle. 1° Soit x le nombre inconnu que l'on cherche, essayez si un nombre quelconque a' mis à sa place dans l'équation peut la satisfaire; cela n'arrivera qu'autant que a' serait la véritable valeur de x; mais comme il n'en sera pas généralement ainsi, vous trouve-

rez que la substitution de a' fournit un résultat qui péchera par excès ou par défaut; soit $\pm e'$ l'erreur fournie par a'.

Cela fait, substituez dans l'équation un autre nombre quelconque a'', opérez de la même manière et vous tomberez sur une autre erreur $\pm e''$;

2° Multipliez la différence des nombres $(a' - a'')$ par la plus petite erreur, puis divisez ce produit, savoir : par la différence des erreurs si elles sont de même sens, ou par leur somme si elles sont de sens contraire (faisant abstraction des signes), vous aurez un quotient q, ou, ce qui revient au même, posez cette proportion :

La différence ou la somme des erreurs : la différence des deux nombres supposés :: la plus petite erreur : la correction $(\pm q)$;

3° Augmentez ou diminuez de q celui des deux nombres qui a fourni la plus petite erreur, suivant que cette erreur était négative ou positive; le résultat sera une valeur a''' plus approchée de x;

4° Opérez de même avec a''' et celui des deux nombres primitifs a' ou a'' qui a donné la plus petite erreur ou avec tout autre nombre encore plus rapproché et vous obtiendrez une nouvelle approximation a^{iv};

5° Continuez ainsi jusqu'à ce que vous obteniez le degré d'exactitude nécessaire; il conviendra, en général, de choisir pour a', a'', a''' ... des valeurs qui ne diffèrent que d'une unité du dernier ordre.

Exemples. On demande un nombre qui, ajouté à son carré et à son cube, donne 100; on a $x^3 + x^2 + x = 100$. On voit facilement que la vraie valeur de x se trouve entre 4 et 5. Essayons ces deux nombres $a' = 4$ $a'' = 5$, il vient :

	$a' = 4$	$a'' = 5$
	$a'^2 = 16$	$a''^2 = 25$
	$a'^3 = 64$	$a''^3 = 125$
Sommes.	84	155
	100	100
	$e' = -16$	$e'' = +55$

$(a'' - a') = 1$ qui, multiplié par la plus petite erreur, donne 16; les erreurs étant de sens différents on en prend la somme (abstraction faite du signe), on a 71; divisant, on a $\frac{16}{71} = 0.225$; donc :

$$x = \text{à peu près } 4 + 0.225 = 4.225$$

prenant $A' = 4.2$ et $A'' = 4.3$ on trouvera

$$E' = -4.072 \qquad E'' = +2.297$$

multipliant par $(A''-A') = 0.1$ la plus petite erreur 2.297 et divisant par 6.369 qui est la somme des erreurs qui sont en sens con-

traire, on a 0.036 que l'on retranche de 4.3 qui est trop grand, il vient par approximation $a'' = 4.264$.

Faisant de nouveau $\alpha' = 4.264$ $\alpha'' = 4.265$ on trouve avec une très grande approximation $x = 4.2644299$.

Soit demandé de trouver l'arc de cercle qui a même longueur que son cosinus. s étant la longueur de cet arc, on a l'équation

$$s = \cos s$$

ou n^o étant le nombre de degrés de cet arc, on a

$$\frac{\pi n^o}{180} = \frac{n^o}{\frac{180}{\pi}} = \cos\left(\frac{n^o}{\frac{180}{\pi}}\right)$$

$$\log n - \log\frac{180}{\pi} = \log\cos\left(\frac{n^o}{\frac{180}{\pi}}\right)$$

avec un peu d'attention on voit bientôt que cet arc doit avoir environ 45°. Essayant cette valeur, il vient :

$$\begin{array}{rl} \log 45 = & 1.6532125 \\ -\log\frac{180}{\pi}\ \ldots & 1.7581226 \ \ldots\ (\textit{voy. Facteurs}). \\ \hline \log \text{arc } 45^o \ldots & \bar{1}.8950899 \\ \text{or } \log\cos 45^o \text{ est} \ldots & \bar{1}.8494850 \\ \hline \text{il s'en faut de } - & 0.0456049 \end{array}$$

que le log. du cosinus atteigne celui de l'arc. Or, en prenant un arc plus grand que 45°, on aurait un cosinus qui s'éloignerait encore plus de la longueur de l'arc; l'arc cherché est donc au-dessous de 45°. Essayons :

$$n^o = 40^o$$

$$\begin{array}{rl} \log 40^o = \ldots\ldots & 1.6020600 \\ \log\frac{180}{\pi}\ \ldots\ldots\ldots & 1.7581226 \\ \hline \log \text{arc } 40^o \ldots\ldots & \bar{1}.8439374 \\ \text{or } \log\cos .40^o \ldots & \bar{1}.8842540 \\ \hline \end{array}$$

ici le log du cosinus dépasse de $+ 0.0403166$ celui de l'arc.

Multipliant la différence des logarithmes des cosinus par la plus petite erreur et divisant par la somme des erreurs, on a environ 0.016 à retrancher du log cos 40°. Le résultat est le logarithme du cosinus d'un arc compris entre 42° et 43°. Essayant ces deux valeurs et opérant pour plus de facilité sur les différences des nombres, au

lieu d'opérer sur la différence des logarithmes, on aura la correction à faire aux nombres; il vient :

	$n = 42$	$n = 43$	différence 1
log n	1.6232493	1.6334685	
	— 1.7581226	1.7581226	
log arc de n^o..	$\bar{1}.8651267$	$\bar{1}.8753459$	
or log cos n^o est	$\bar{1}.8710735$	$\bar{1}.8641275$	
erreurs en	+ 0.0059468	— 0.0112174	
	0.0112174		

$$171642 : 1^o :: 59468 : q = 20'.47''$$

On a donc environ $20'.47''$ à ajouter à l'arc de 42°; l'arc cherché est donc compris entre $42^o.20'$ et $42^o.21'$. Essayons ces arcs après les avoir convertis en minutes, et (*voy.* Facteurs) il vient :

	$n' = 2540'$	$n' = 2541'$
log n' ...	3.4048337	3.4050047
	— 3.5362739	3.5362739
log arc n' ...	$\bar{1}.8685598$	$\bar{1}.8687308$
log cos n' ...	$\bar{1}.8687851$	$\bar{1}.8686700$
Erreurs ...	+ 0.0002253	— 0.0000608
	... 608	

$$2861 : 1' :: 608 : q = 12''.45'''$$

retranchant cette valeur de $42^o.21'$, on trouve pour la graduation approchée de l'arc cherché

$42^o\ 20'\ 47''\ 15'''$ et sa longueur = celle du cosinus = 0.7390847

On emploierait la même méthode pour résoudre les questions suivantes dont je me borne à indiquer la solution.

Trouver un secteur tel que sa corde le partage en un triangle et un segment qui soient équivalents?

L'équation est $s = \sin 2s$

et le secteur est celui de

$$108^o\ 36'\ 13''\ 45'''\ 27^{iv}\ 6^v$$

Partager une surface de cercle en 8 parties équivalentes par des ordonnées perpendiculaires au diamètre horizontal? La question revient à trouver dans le quart de cercle un sinus qui le coupe en deux parties équivalentes. s étant l'arc correspondant à ce sinus, on a

$$s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sin 2s$$

$$s = 66^\circ\ 10'\ 23''\ 37'''$$

$$\sin s = 0.9147711;\quad \cos s = 0.5960281.$$

De l'extrémité du diamètre d'un demi-cercle conduire une corde qui coupe le demi-cercle en deux parties équivalentes. s étant la longueur de l'arc qui satisfait au problème, on a

$$s - \sin s = \frac{1}{2}\pi$$

s a pour mesure $132^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$ sa corde $= 1.8295422$.

D'un point quelconque d'une circonférence conduire deux cordes qui coupent le cercle en trois parties équivalentes :

$$s - \sin s = \frac{2}{3}\pi$$

les deux arcs extrêmes sont égaux et mesurés par un arc s dont la graduation est . . . . $149^\circ.16'.27''$
l'arc intermédiaire a pour mesure . . . . . $61^\circ.27'.6''$
les deux cordes ont chacune en longueur . . . 1.9285340

Trouver sur une demi-circonférence un point tel que la somme de son abscisse et de son ordonnée soit égale à la longueur de l'arc comptée de l'origine qui est elle-même au sommet? s étant l'arc complémentaire, on a

$$\pi - s = 2\cos\frac{1}{2}s\left(\cos\frac{1}{2}s + \sin\frac{1}{2}s\right)$$

$$s = 41^\circ\ 48'\ 7''\quad \text{l'arc cherché} = 138^\circ\ 11'\ 53''$$

$$x = 1.7454535;\quad y = 0.6665578$$

$$\text{ou par approximation}\quad x + y = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$$

Trouver le secteur qui soit équivalent à la moitié du triangle formé par sa tangente, sa sécante et le rayon? s étant l'arc de ce secteur, on a

$$2s = \operatorname{tang} s;\quad s = \frac{1}{2}\operatorname{tang} s$$

$$s = 66^\circ\ 46'\ 54''\ 14'''\quad \operatorname{tang} s = 2.3311220$$

Trouver tous les arcs qui sont égaux à leurs tangentes? Ce sont ceux qui ont pour graduation, savoir :

$1 \times 90^\circ - 90^\circ$	$11 \times 90^\circ - 3^\circ.19'\ 24''$
$3 \times 90^\circ - 12^\circ\ 32'\ 48''$	$13 \times 90^\circ - 2^\circ\ 48'\ 37''$
$5 \times 90^\circ - 7^\circ\ 22'\ 32''$	$15 \times 90^\circ - 2^\circ\ 26'\ 5''$
$7 \times 90^\circ - 5^\circ\ 14'\ 22''$	$17 \times 90^\circ - 2^\circ\ 8'\ 51''$
$9 \times 90^\circ - 4^\circ\ 3'\ 59''$	$19 \times 90^\circ - 1^\circ\ 55'\ 16''$

FELDSPATH. Substance fusible au chalumeau en émail blanc de porcelaine, rayant le verre, étincelant sous le choc du briquet, inattaquable par les acides, ne donnant point d'eau à la calcination; formée d'après Vauquelin, de silice 64, alumine 20, chaux 2, potasse 14; et d'après M. Berthier, de silice 64.20, alumine 18.40, chaux traces et potasse 16.95.

Le feldspath ne forme point de grandes masses, mais il fait partie essentielle des granites, des syénites, des porphyres, etc.

FERMES. Les fermes des COMBLES sont le plus ordinairement en bois, quelquefois en fonte et en fer, plus rarement en maçonnerie. J'ai réuni dans les planches LXIV à LXX des exemples de chaque espèce. On est dirigé dans le choix à faire entre ces divers matériaux par leur prix, par les frais de main-d'œuvre que chacun d'eux exige et qui varient les uns et les autres avec les localités, par leur durée relative, les convenances spéciales, trop souvent aussi par la mode. Les fermes en fer et en fonte avec COUVERTURES métalliques par exemple, sont tout à fait de mode aujourd'hui. On leur donne une légèreté excessive (*fig.* 1, *pl.* LXVII) qui a déjà été la cause de plusieurs accidents très graves. Ces fermes conviennent particulièrement aux halles de coulage des hauts fourneaux (*fig.* 1, *pl.* LXX), à celles des forges et à toutes les usines exposées par la nature de leur travail à des incendies; — les fermes en maçonnerie (*fig.* 6, *pl.* LXX) seront préférées partout où la rareté des bois coïncidera avec l'abondance et le bas prix de la pierre. Quant aux fermes en bois (*pl.* LXIV à LXVII), elles sont encore les plus répandues et généralement les moins chères de beaucoup; — on diminue tous les jours leurs équarrissages. « C'est sans doute un progrès, dit M. le colonel *Emy*, mais « il est à craindre qu'en voulant réformer un excès dans la pesanteur « des œuvres anciennes et dans la consommation du bois, on tombe « dans un défaut contraire et qu'on ne fasse plus la part de la détérioration du bois par la vétusté. On perd peut-être de vue que, pour « quelques anciennes charpentes en bois, c'est autant à un excès de « force dans les dimensions qu'à leur bonne qualité qu'on doit attribuer la longue durée de ces constructions. »

On trouvera au reste aux articles POUSSÉE *des charpentes*, RÉSISTANCE *des matériaux*, ÉCONOMIE *des constructions*, les données et formules qui permettent de régler assez convenablement les dimensions des charpentes en tenant compte de leur durée. Je me bornerai à indiquer dans cet article les dimensions *usuelles* des fermes en bois.

Principes. Quels que soient les matériaux d'une ferme : 1° la direction des efforts subis par chacune des pièces qui la composent doit autant que possible être parallèle à la direction de ses fibres et tendre à refouler celles-ci plutôt qu'à les étendre; 2° le système général de la ferme doit être tel qu'il ne tende pas à changer de

figure, ce qu'on obtient le plus souvent en divisant la ferme en *triangles*, parce que dans ces figures seules l'invariabilité de la longueur des côtés assure complétement l'invariabilité des angles; 3° le système ne doit, autant que possible, transmettre aux murs et aux piliers qui le supportent que des efforts verticaux, puisque c'est dans le sens vertical qu'ils offrent la plus grande résistance.

Fermes pour bâtiments de peu de largeur (*fig.* 1, *pl.* LXIV). Chaque ferme se compose de deux chevrons *aa*, assemblés deux à deux par le haut à l'aide d'entailles à mi-bois. Leurs bouts inférieurs sont assemblés par embrèvement dans des entailles ou *pas* creusés dans les sablières *bb* posées sur les murs. Les fermes sont espacées de 0m.40 à 0m65 suivant le poids de la couverture. Les sablières elles-mêmes sont retenues et résistent à la poussée des chevrons au moyen de *tirans c*, sur lesquels elles reposent, par des entailles et par des boulons. — Lorsque le poids de la couverture est considérable, le parallélisme des fermes est maintenu par un *faîtage d*, placé sous l'assemblage des chevrons, et sur lequel on fixe ces chevrons par des broches en fer. — *ee* sont les *coyaux*, cloués sur les chevrons eux-mêmes, et qui étendent la couverture jusqu'au filet de cimaise de la corniche. — Cette disposition n'est guère praticable qu'autant que les chevrons *aa* ne dépassent pas trois mètres de longueur.

Fermes pour bâtiment plus large (*fig.* 2 *et* 3, *pl.* LXIV). La figure 2 est la coupe du comble perpendiculairement à la longueur du bâtiment. — *aa*, chevrons; — *bb*, sablières sur lesquelles ils portent par leurs pieds. — *c*, tirant qui reçoit les assemblages des arbalétriers *hh* et s'oppose à leur écartement. — *d* (*fig.* 2 *et* 3), faîtage qui porte les bouts supérieurs des chevrons. — *ee*, coyaux qui étendent la couverture jusqu'au bord de la corniche. —*ff*, pannes horizontales qui soutiennent les chevrons entre le faîte et les sablières. — *g*, poinçon qui porte le faîtage et reçoit les assemblages des arbalétriers *hh*; l'extrémité inférieure du poinçon est attachée au tirant par un étrier en fer, qui s'oppose à la flexion du tirant, en même temps qu'il empêche le poinçon d'osciller. Trop souvent cette extrémité du poinçon est assemblée avec le tirant à tenon et mortaise; ce mode d'ASSEMBLAGE affaiblit le tirant précisément au point où il tend à rompre. — *ii*, liens qui reportent l'effort des pannes sur le poinçon, retenu lui-même par les assemblages des arbalétriers. Ces liens sont rarement et devraient toujours être assemblés dans les arbalétriers, précisement au droit des points d'application des pannes. Lorsqu'il en est autrement, l'effort des pannes et de leur charge n'étant plus directement opposé à la réaction des liens, les arbalétriers, surtout lorsqu'ils sont faibles, serpentent et déforment les plans de toiture.

Lorsqu'on veut faire un grenier au niveau du tirant, on remplace

les liens *ii* par un faux entrait *k*, et le poinçon est fixé par son pied à ce faux entrait. Les planchers des greniers s'établissent d'ailleurs sur des solives parallèles aux tirants des fermes, et portant sur les murs. On rend ainsi les tirants des fermes indépendants, et les oscillations, dont la continuité détériorerait les assemblages, ne peuvent ainsi se transmettre aux combles.

Ferme sous faîte. La figure 3 est la projection du pan de charpente longitudinal, ou de la *ferme sous faîte*, sur un plan vertical parallèle à la longueur du bâtiment, et dont la trace serait A B, *fig.* 2. On y distingue, savoir : les *aisseliers jj* qui soutiennent le faîtage *d* aux deux points qui divisent l'intervalle des fermes en trois parties égales, et assurent ainsi l'invariabilité du système, en s'opposant au déversement dans le sens de la longueur du bâtiment ; — les portées et les mortaises des pièces situées à droite de A B, et qui sont désassemblées ; — le faîtage *d* ; — la ligne D E, qui est la trace du plan de la figure 2 ; — les poinçons *gg*, qui appartiennent toujours en commun aux pans de charpente longitudinaux, *fig.* 3, et transversaux, *fig.* 2. Au reste, les mêmes lettres désignent les mêmes pièces dans ces deux projections.

On ne doit compter que sur la ferme sous faîte, et nullement sur les pannes *ff*, pour maintenir les fermes transversales à leur écartement et dans des plans parfaitement verticaux.

Lorsque la maçonnerie est moins chère que la charpente, et que d'ailleurs on ne tient pas à se ménager des greniers spacieux, on élève les murs de refend parallèles aux pignons du bâtiment, jusque sous les pans du toit, ils tiennent alors lieu de fermes, ou du moins en remplacent quelques-unes, et ils portent alors directement les pannes comme *fig.* 6, *pl.* LXX.

Fermes pour bâtiments d'une largeur de dix mètres. Les figures 6 et 7, planche LXIV, représentent la ferme transversale et la ferme sous faîte pour bâtiments d'une portée d'environ dix mètres. — On peut remarquer que la longueur des chevrons *aa* nécessite l'emploi de trois pannes *fff* ; — que les arbalétriers *hh* qui portent les pannes sont directement soutenus au droit de ces pannes par les liens *ii*, — par l'entrait *k*, — et par les jambettes ou contrefiches *ll*, qu'on place quelquefois verticalement afin d'augmenter l'espace libre dans le grenier. On pourrait aussi ajouter des aisseliers *nn*, *fig.* 6. — Quant à ceux *jj* de la ferme sous faîte, *fig.* 7, leur grande longueur a exigé qu'on les fortifiât vers leurs milieux par des pièces horizontales *rr* qui leur sont assemblées, ainsi qu'aux poinçons *gg*.

Modifications. Dans quelques anciennes charpentes, au lieu de faire porter les chevrons sur les pannes, on les y a assemblés à tenons et mortaises ou à paumes (*fig.* 4 *et* 5). — Quelquefois aussi (*fig.* 8 *et* 9) les pannes *ff* sont réunies aux arbalétriers *h* par les

mêmes ASSEMBLAGES que ci-dessus, et les chevrons sont assemblés aux pannes. M. le colonel *Émy* pense que ces dispositions ne doivent pas être usitées dans les charpentes modernes; en général, il faut éviter dans les fermes la multiplicité des assemblages qui coûtent beaucoup de main-d'œuvre, et deviennent une cause d'affaiblissement et de pourriture.

Croupes. La plupart des bâtiments industriels ont la forme de carrés longs (*fig.* 6, *pl.* LXV), et les petits côtés D A C B sont des murs de pignons. Les saillies des toits du côté des murs de pignon sont alors soutenues par les prolongements des faîtages, des pannes, des sablières, etc., afin de les abriter, et l'on donne à cette saillie celle même qui est laissée sur les longs côtés. Souvent aussi on tronque la toiture vers les petits côtés du quadrilatère, par deux pans de toits triangulaires DAE, CFB, formant, par leurs rencontres avec les longs pans, des arêtes D E, E A, CF, F B. Ces faces triangulaires sont appelées *croupes*; il est à peu près convenu qu'on doit les regarder comme plus élégantes que des pignons sans décorations, parce qu'elles coûtent ordinairement plus que ceux-ci. — Lorsque le bout d'un bâtiment fait avec ses longues façades des angles différents de l'angle droit, la *croupe* est *biaise* (*fig.* 7); la croupe est dite *droite* lorsque (*fig.* 6) les angles sont droits. Ces croupes nécessitent l'emploi de pans de charpente horizontaux et verticaux qui maintiennent les angles que les pans des toits font entre eux, et qui soutiennent les pièces qui forment les arêtes, les extrémités des pannes et les chevrons qui, étant tronqués, ne peuvent atteindre leurs points d'appui ordinaires.

Croupe droite. La planche LXV indique le détail des pièces d'une *croupe droite*, seul genre de croupe que nous devions décrire ici. Nous renverrons au beau *Traité de Charpenterie* de M. le colonel Emy, pour les *croupes biaises* (*fig.* 7), et les *noues* KI, GH, HL (*fig.* 6) ou parties des combles où les toitures se croisent ou se *nouent*.

La *figure* 2, *planche* LXV, est le plan de l'*enrayure*, combinaison du long tirant *t*, du *tirant de croupe d*, de deux *goussets pp*, et des *coyers r*. Ce plan est pris à la hauteur des sablières de la croupe droite DEA par exemple.

La *figure* 1 est la projection d'une ferme verticale du même comble, projetée sur un plan passant par AB, *fig.* 2.

La *figure* 4 est la projection horizontale de la croupe garnie de ses *empanons a' a'* de longs pans, de son chevron *o*, et de ses *empanons de croupe o' o'*.

La *figure* 3 est la projection verticale de la même croupe sur un plan parallèle au mur de croupe, et sur laquelle on voit ce mur, — le poinçon *q*, — le *chevron arêtier a''*, — le chevron de croupe *o*, — les empanons de croupe *o' o'*.

La *figure* 5 est une autre projection verticale de la même croupe sur un plan parallèle au mur de long pan ou à la ferme sous faîte. On y distingue les chevrons *a*, — les empanons de long pan *a' a'*, — le poinçon *q* et le chevron d'arêtier *a''*; ce chevron a pour unique objet de recevoir les assemblages des empanons, afin de les soutenir.

Le pan de croupe fait avec l'horizon un angle *qrt* (*fig.* 5) plus roide que celui *qrd* des longs pans, afin de diminuer sa poussée. Si on laissait au pan de croupe la même pente qu'aux longs pans, le poinçon de croupe se trouverait placé au point *h* (*fig.* 4) et l'arêtier aurait la position *hy*, ce qui lui donnerait une longueur trop grande. Il convient, en général, de faire la base de la pente du pan de croupe $= \frac{2}{3}$ de celle de la pente du long pan.

Enfin, et revenant sur l'ensemble, on voit que dans toutes ces figures les chevrons sont désignés par *a*, — le poinçon par *q*; *t* désigne le tirant de la ferme dont le poinçon de croupe *q* fait partie. On y distingue les mortaises dans lesquelles s'assemblent les arbalétriers, le poinçon et les goussets *p*, — le tirant de croupe *d* qui porte d'un bout sur le mur de croupe, *fig.* 2, et qui est assemblé à l'autre bout dans le tirant *t*. Cet assemblage doit être consolidé par un ferrement, — le *coyer r* ou tirant d'arêtier, sur lequel la ferme arêtière est établie, porte par un bout sur l'encoignure des murs, et il est assemblé par l'autre à tenon et mortaise avec ferrements dans le gousset *p*. Les *pas* des chevrons sont marqués *m* sur la sablière *s* de long pan, et ceux des empanons sont marqués *n* sur la sablière *s'* de croupe.

Il importe de remarquer que le poinçon de croupe et la ferme transversale de long pan dont il fait partie, doivent être *dévoyés* de telle sorte, que les arêtes verticales de la tête du poinçon du côté de la croupe et celles de la pyramide qui le couronne, soient toujours dans les plans verticaux menés par les projections horizontales des arêtes de la croupe (*fig.* 4). L'arbalétrier, le chevron, le coyer et toutes les pièces qui entrent dans la composition de la ferme arêtière, sont également *dévoyées*, c'est-à-dire que le plan vertical qui contient leurs axes ne coïncide pas avec celui qui contient l'arête de croupe ou l'intersection des deux pans.

On satisfait convenablement à cette condition en faisant en sorte que l'épaisseur de la pièce arêtière étant donnée, la ligne du joint de gorge 1, 2, *fig.* 4, de son assemblage avec le coyer *r*, soit perpendiculaire à la projection *yq*, de l'arête de croupe et exactement terminée par les plans de l'angle dièdre des parois intérieures.

Inclinaison des combles. C'est surtout la nature des matériaux de la COUVERTURE qui détermine l'inclinaison des combles (*voy*. p. 466). Si cette inclinaison est trop faible, la capillarité retient beaucoup d'eau qui remonte entre les surfaces des joints, et pourrit les charpentes; de plus, la composante de l'effort des vents horizontaux,

qui s'ajoute à la capillarité pour refouler l'eau dans les joints, et qui soulève en outre les matériaux de la couverture, augmente elle-même à mesure que l'inclinaison diminue. Il y aurait donc avantage, sous ce double rapport, à augmenter la pente, si cette pente, d'une part, n'avait pas une très grande influence sur la dépense, et si elle n'était pas limitée d'ailleurs par la condition que les matériaux de la couverture ne glissent pas.

On voit facilement, en effet, que la surface d'une couverture en terrasse, qui est égale à celle de l'espace à couvrir, devient égale à 1 fois $\frac{1}{2}$ cet espace, si la pente est de 45°, et deux fois cet espace pour un comble surhaussé sous un angle de 60°. D'ailleurs le cube des pièces doit augmenter aussi en raison de l'élévation, non-seulement par la plus grande longueur des pièces, mais encore par la plus grande force qu'elles doivent recevoir tant pour résister à l'action des vents qu'à cause des assemblages plus nombreux qui les maintiennent.

On a vu à l'article COUVERTURES que le maximum d'inclinaison des toits est de 18 à 21° pour les tuiles creuses; 27° pour les tuiles plates; 33° à 45° pour les ardoises, et que, bien que les couvertures métalliques puissent ne recevoir que la faible inclinaison qui suffirait à l'écoulement des eaux, il ne convenait pas cependant de leur donner une inclinaison au-dessous de 25° environ. Ce n'est que dans les contrées où l'on pourrait redouter une grande accumulation des neiges, qu'un comble pourrait recevoir une pente de 60°; on voit cependant beaucoup de combles à 60° dans certaines villes des bords du Rhin, Strasbourg par exemple.

Equarrissage. Pour toutes les fermes de moins de 14 mètres de portée, M. *Ardent* admet que l'on peut, sans erreur sensible, donner savoir : aux tirants et aux entraits qui portent des planchers $\frac{1}{14}$ de leur portée, c'est-à-dire $\frac{1}{14}$ de la distance qui sépare deux soutiens voisins, — à ceux qui ne portent pas de planchers $\frac{1}{18}$ de cette distance; — aux arbalétriers, $\frac{1}{18}$ de leur longueur; — aux poinçons, même équarrissage qu'aux arbalétriers; — aux entraits, contrefiches, aisseliers, liens, quelques centimètres de moins; — au faîte et aux pannes du $\frac{1}{18}$ au $\frac{1}{16}$ de l'écartement des fermes suivant que la COUVERTURE est légère ou lourde. — L'espacement des pannes doit être de 2m.50 environ; — les chevrons ont toujours 0m.11 épaisseur, 0m08 largeur; — les coyaux 0m.08 $\times$ 0m.05, — les sablières 0m.11 épaisseur, et 0m27 largeur. — Pour les tirants et les arbalétriers, on fait la largeur $= \frac{5}{7}$ épaisseur; — les contrefiches, aisseliers, liens, sont carrés. Le tableau suivant donne, au reste, des dimensions absolues.

Equarrissage des bois employés dans les combles.

DIMENSIONS DES FERMES.			EQUARRISSAGES.								
Largeur.	Hauteur.	Ecartement.	Tirants.	Jambes de force.	Entraits 1er.	Entraits 2e.	Arbalétriers.	Liens.	Poinçons.	Pannes.	Chevrons.
	m	m	m		m		m	m	m	m	m
6.50	3.25	3.25	0.243	»	0.190	»	0.190	0.135	0.190	0.135	0.110
			0.270	»	0.190	»	0.215	0.160			
8.	5.	3.60	0.270	»	0.190	»	0.190	0.160	0.215	0.135	
			0.300	»	0.215	»	0.215	0.190			
10.	6.50	4.	0.300	»	0.215	»	0.215	0.160	0.215	0.160	
			0.350	»	0.245	»	0.245	0.190			
12.	8.	5.	0.325	0.245	0.245	0.215	0.245	0.190	0.245	0.190	
			0.380	0.325	0.270	0.245	0.270	0.215			
14.	9.	7.50	0.350	0.325	0.245	0.215	0.270	0.190	0.270	0.215	
			0.400	0.380	0.270	0.245	0.300	0.215			

Durée. La durée d'un comble bien aéré et en bon bois, peut être évalué à 200 ans.

Toits en appentis. Les toitures en appentis sont soutenues par des fermes transversales, qui sont les moitiés de celles des toits à deux égouts. Le demi-tirant horizontal est ordinairement scellé d'un côté dans la muraille contre laquelle l'appentis est construit, et il porte de l'autre sur la paroi qui répond à l'égout du toit. — L'arbalétrier assemblé par le bas dans le demi-tirant, s'assemble par le haut dans un poinçon attaché contre le mur d'adossement par des liens en fer à scellement. Ce poinçon reçoit le tenon de l'arbalétrier et celui de son lien, et le mur d'adossement fait l'office de la ferme sous faîte.

Dans les appentis qui ont peu de largeur, on supprime les poinçons et les faîtages; les arbalétriers et leurs liens sont scellés dans le mur, et les bouts supérieurs des chevrons s'y appuient sans scellements.

Enfin, lorsqu'un appentis est établi isolément et qu'il n'y a pas de mur, on peut remplacer celui-ci par un pan de bois qui s'élève jusqu'au faîtage, ou même le soutenir sur des poteaux.

Combles brisés. Je ne donne aucun exemple des combles brisés que *Mansard* fit revivre et mit fort en vogue vers 1650, et que *Pierre Lescot* avait employés au Louvre cent ans avant lui. Les architectes ont renoncé à l'emploi des *mansardes*, et les ingénieurs doivent les imiter.

Fermes en planches de champ de Philibert Delorme (*pl.* LXVI). La figure 1 est l'élévation d'une partie de ferme ogivale ou en demi-cercle, composée de deux épaisseurs de planches posées bout à bout dans chaque épaisseur, avec joints ou *commissures*, dirigées vers le centre de courbure. Les joints de l'un des cours de planches se projettent exactement sur les milieux des planches de l'autre cours.

Tous les hémicyles M M M, *fig.* 1, 2 *et* 3, sont traversés précisément aux joints par des liernes assez longues pour embrasser plusieurs cours de fermes. Des clefs *ccc* d'une longueur un peu moindre que la hauteur des planches, traversent les liernes, serrent les hémicyles et les maintiennent dans des plans parfaitement verticaux aux distances qu'ils doivent conserver. Des chevilles symétriquement distribuées, comme l'indiquent les figures, aident à placer et à maintenir les parties des hémicyles. Les hémicycles, à leur naissance, portent par un tenon dans les mortaises des sablières *s*.

On raccorde les égouts des toits avec les corniches du bâtiment par des *coyaux* formés de planches clouées sur chacune des faces des hémicycles, et afin de donner à la partie supérieure du toit une pente qui favorise l'écoulement des eaux pluviales, on forme une arête culminante à l'aide de planches fixées de la même manière vers le sommet des hémicycles. On termine les bâtiments ainsi couverts par des pignons en maçonnerie, et on évite les croupes.

Dimensions. Dans ce système (introduit par Philibert Delorme vers 1620), on donne aux planches des hémicycles environ : longueur $1^m.30$, largeur $0^m.22$, épaisseur $0^m.27$; — à la distance d'une ferme à l'autre 0^m66, — à chacun des épaulements à la sablière $0^m.027$, — aux liernes *b*, largeur $0^m.108$, épaisseur $0^m.027$, — aux clefs *c*, épaisseur $0^m.027$, largeur $0^m.04$.

Avantages et inconvénients. Ce système paraît avoir perdu une partie des avantages qu'il présentait autrefois, où la main-d'œuvre était à bas prix, et où les matériaux provenaient du dépeçage des bateaux marnois, qu'on délaissait au temps de Philibert Delorme, et qui ont aujourd'hui une valeur assez élevée. — Il s'appliquerait avec avantage là où l'on n'aurait à sa disposition que des planches de peu de valeur, à des scieries forestières par exemple, — là, où n'ayant pas de grands bois, on aurait cependant à construire des combles d'une assez grande portée. Il ne s'appliquerait avantageusement à des combles d'une petite portée, qu'à la condition d'employer pour couvertures des tuiles ou des ardoises de petites dimensions, sous peine de voir la couverture *entrebâiller* par l'effet de la courbure du comble.

Modification au système précédent. Les *fig.* 4, 5, 6, *pl.* LXVI, indiquent l'une des nombreuses modifications du système, applicable au cas où il est nécessaire d'augmenter la force des assemblages. C'est à peu près celui que Philibert Delorme avait adopté pour les combles du château de La Muette, près Passy. Ces combles ont une portée d'environ $19^m.50$.

La *fig.* 4 est un fragment d'hémicycle vu comme celui de la *fig.* 1; la *fig.* 5, une projection horizontale du système vu par le dessus; la *fig.* 6, une coupe suivant le plan vertical dont AB est la trace.

Deux liernes *bb* croisent les hémicycles qui s'y assemblent par entailles à mi-bois, de telle sorte que les liernes *b* étant entaillées à l'endroit de leur joint sur la moitié de leur épaisseur, et les planches de l'hémicycle entaillées d'une hauteur égale, les liernes *bb* affleurent exactement les hémicycles M, à l'intrados comme à l'extrados.

Les planches des hémicycles sont serrées par des clefs *cccc*, qui traversent chacune les liernes *bb* des deux bords, et ces liernes sont serrées elles-mêmes par les clavettes *dddd*, qui traversent les clefs *c* dans les bouts qui dépassent les liernes *b*.

Système de M. le colonel Emy. M. le colonel *Emy* a proposé et appliqué à Marac, Libourne, etc., un système de fermes en arcs composés de madriers courbés sur leur plat, appliqués les uns sur les autres, comme le sont les lames des ressorts de voitures. Des liens en fer et des boulons pressent ces madriers et s'opposent à leur glissement les uns sur les autres, et au débandement de l'arc. Les

feuilles ou madriers de la ferme ont environ 0m.055 épaisseur, 0.13 largeur, et une longueur de plus de douze mètres. Les joints sont distribués de façon qu'aucun de ceux d'un rang ne répond à un autre joint d'un autre rang. Je ne puis qu'indiquer ce système, dont on trouvera la description complète dans le *Traité de Charpenterie* de M. le colonel *Emy*.

Bois combinés avec le fer et la fonte. Les *figures* 1 à 10 de la *planche* LXVII offrent des exemples de ces diverses combinaisons. On a observé que le défaut de dureté du bois est souvent cause que les fibres des pièces sont refoulées dans les parties où elles s'assemblent, d'où résultent à la fois du jeu et des tassements dans les charpentes. On a proposé divers systèmes pour remédier à ces pénétrations. La *fig.* 3 est le profil de la boîte en fonte de M. *Rondelet.* Les *fig.* 2 et 5 indiquent suffisamment d'autres combinaisons. La *fig.* 2 appartient au comble d'un atelier de Liverpool, et la *fig.* 5 est le comble de la remise des voitures d'un chemin de fer anglais. Les combles ont environ dix mètres de portée. Les *fig.* 1, 3, 4, 6, montrent, sur une échelle quadruple, le détail des pièces de fonte de ces charpentes dans lesquelles on peut remarquer qu'il n'existe pas de poinçons.

Ce système peut être étendu à des portées plus grandes en augmentant le nombre des boulons, ou aiguilles pendantes en *fer*. en même temps que le nombre des contrefiches, comme l'indiquent les lignes ponctuées de la *fig.* 2.

Les boulons en fer servent à la fois à suspendre les tirants qui peuvent supporter des planchers, et à empêcher l'exhaussement d'un des bouts de l'entrait par l'effet du fléchissement de l'autre bout qui pourrait résulter de charges non symétriques agissant sur le tirant.

La *fig.* 8 montre l'ensemble, et les *fig.* 7, 9, 10, le détail d'une ferme des docks de Liverpool portée par des colonnettes en fonte creuse qui servent en même temps à l'évacuation des eaux pluviales. Une chaîne à longs chaînons fait fonction de deux tirants inclinés. Ces tirants, composés chacun de trois tringles, sont attachés à un piton qui termine lui-même une tige de fer verticale *x* traversant l'entrait; ils sont fixés par l'autre extrémité à un sabot en fonte, *fig.* 7 et 10, et sont retenus par un écrou qui permet de les tendre convenablement. Les *figures* 7 et 10 montrent en outre comment ces sabots sont fixés sur les sablières. La *fig.* 9 est le détail de la pièce de fonte qui reçoit les bouts supérieurs des arbalétriers et les faîtages. Ce sont les extrémités inférieures de ces arbalétriers qui reçoivent, chacune par embrèvement, le sabot de fonte qui lui est fixé par une bride en fer serrée par une clef embrevée et un coin.

Fermes entièrement métalliques. Les *figures* 11, 12, 13, de la *planche* LXVII montrent l'ensemble, et celles de la *pl.* LXVIII

reproduisent tous les détails des fermes en fer du marché de la Madelaine, construit par M. *Veugny*. Ces fermes peuvent être considérées comme le type de toutes celles dont on recouvre aujourd'hui les halles, magasins, chantiers, gares, etc. Les dimensions et les formes ont été réglées de telle sorte que leur résistance fût en rapport avec leur destination. Ainsi, les pièces chargées y sont méplates et ont leur champ perpendiculaire à la direction de l'effort qui tend à les fléchir; celles qui tirent sont rondes. Toutes les pièces d'assemblage ont été exécutées en fonte, et l'on n'a employé le fer forgé que là où il n'exigeait que peu de façon.

Chaque ferme se compose de deux colonnes en fonte (*fig.* 11, *pl.* LXVII), de deux arbalétriers, d'un entrait ou tirant, d'un poinçon, de deux contrefiches et de deux faux poinçons; et, pour les appentis, d'un simple arbalétrier. Les colonnes reposent sur des dés en pierre de $0^m.40$ de saillie, sòlidement fondés et encastrés dans le dallage. Elles supportent les arbalétriers et sont reliées par le tirant dans un sens et, dans le sens longitudinal, par deux entretoises (*fig.* 3). Ces entretoises se composent chacune d'une pièce horizontale renforcée en dessous par un arc auquel elle est reliée par trois bagues formant moises. L'entretoise supérieure, placée au niveau de la partie supérieure des colonnes, fait fonction de sablière; la seconde descend à la hauteur d'où partent les arbalétriers des appentis, et leur sert de faîtage.

Les colonnes de fonte sont formées de deux pièces (*fig.* 8 et 9, *pl.* LXVIII) qui se placent l'une sur l'autre; — le joint est au dessus du chapiteau inférieur; — la réunion des deux pièces se fait au moyen d'un goujon en fer forgé, que l'on fait pénétrer également dans le vide des deux colonnes, et que l'on fixe au moyen de quatre goupilles rivées.

Les arbalétriers en fer forgé ont $0^m.067$ sur $0^m.013$; ils ne comportent d'autre ajustement qu'un tenon rapporté (*fig.* 15) vers leur extrémité inférieure, et disposé pour s'emboîter dans la mortaise pratiquée à l'extrémité du tirant. Cette réunion de l'arbalétrier au tirant fait que la poussée des arbalétriers agit directement sur le tirant au moyen d'une clavette, et ne se transmet point aux colonnes; la colonne porte d'ailleurs au dessus de son chapiteau deux oreilles entre lesquelles viennent se loger ces deux pièces, de sorte qu'elle ne sert plus que de support. Cependant la clavette traverse les deux oreilles, afin que le tirant relie en même temps les têtes des deux colonnes d'une même ferme.

A leur partie supérieure, les deux arbalétriers d'une même ferme s'engagent entre les oreilles opposées d'une pièce en fonte préparée pour les recevoir (*fig.* 4, 13 et 22 de la *pl.* LXVIII); elles y sont fixées par des goupilles.

Les contrefiches de $0^m.054$ sur $0^m.013$ partent du milieu des ar-

balétriers, et aboutissent au pied du poinçon principal (*fig.* 1, *planche* LXVII; *fig.* 7 et 11, *pl.* LXVIII). Au point de jonction de l'arbalétrier et de la contrefiche, aboutit un faux poinçon en fer forgé; on relie ces trois pièces entre elles au moyen de deux oreilles adaptées à la partie supérieure du faux poinçon, et goupillées à l'arbalétrier. A leurs extrémités inférieures, les deux contrefiches viennent s'emboîter (*fig.* 10) dans un sabot en fer forgé qui reçoit en même temps le pied du poinçon et se trouve traversé par l'entrait.

L'*entrait*, ou tirant, est en fer rond de 0m.018, ainsi que les poinçons (*fig.* 7, 10, 11, 12); celui du milieu pénètre à sa partie supérieure dans une douille adaptée à la pièce de fonte qui reçoit les arbalétriers (*fig.* 4). A sa partie inférieure, il s'assemble dans le sabot en fer forgé placé à la jonction des contrefiches. Les faux poinçons sont reliés à l'entrait par des croupières qui embrassent cet entrait et auxquelles ils sont goupillés.

Le *faîte* a la même dimension que les arbalétriers. Il est fixé à chaque ferme au moyen des oreilles adaptées à la même pièce en fonte qui reçoit les parties supérieures des arbalétriers. Des goupilles en fer forgé, traversant à la fois les deux oreilles en fonte et le faîte, établissent la liaison entre ces pièces.

Les *pannes* sont fixées sur les arbalétriers au moyen d'anneaux en fonte qui embrassent ceux-ci (*fig.* 5) et qui portent latéralement des mortaises ouvertes du haut et dans lesquelles s'engagent les abouts de ces pannes. La panne inférieure seule est recourbée à ses extrémités et fixée par un rivet aux abouts des deux arbalétriers qu'elle relie.

Les *chevrons* qui soutiennent la couverture, dans les vides, ont 0m.135 en carré; ils s'assemblent à mi-épaisseur sur les pannes et sur le faîte; mais sur celui-ci, ils sont disposés à queue d'aronde (*fig.* 19), afin qu'ils ne puissent glisser; leur écartement est de 1m. Ils sont croisés perpendiculairement par des traverses de mi-grosseur, espacées de 0m.34 les unes des autres, et servant à retenir les ardoises en zinc (*fig.* 14, *pl.* LXVII) qui forment la couverture. A cet effet, on a soudé sous les ardoises, à 0m.10 de leur bord inférieur, deux crochets qui embrassent ces fausses pannes.

Les *armatures* (*fig.* 13), qui relient les colonnes dans le sens de l'axe, sont formées de pièces de 0m.054 sur 0m.013. Elles s'adaptent aux colonnes au moyen d'oreilles en fonte qui, comme toutes celles dont il a été question, ont 0m.072 de longueur, et 0m.013 d'épaisseur.

Fermes en fonte, tirants en fer (*pl.* LXIX). Cette planche donne l'ensemble et le détail des fermes en fonte recouvertes en tôle cannelée établies par M. *Jules Renaux*, à l'usine à gaz de Perrache, à Lyon.

La *fig.* 1 est l'élévation d'une partie de la toiture formée de demi-

cylindres en tôles alternativement convexes et concaves, et dont le diamètre est de 0m.33. (*Voy.* l'article COUVERTURES.)

La *fig.* 2 est l'élévation de l'une des fermes. Chacune se compose de six pièces à nervure solidement boulonnées et maintenues par deux tirants en rondin de fer laminé (*fig.* 6), et qui se boulonnent sur chaque côté du patin, et sont réunis dans le milieu par un trait de Jupiter (*fig.* 9) et deux anneaux. La *fig.* 2 est le faîtage, *b b* les entailles qui reçoivent les pannes.

La *fig.* 4 est la bride d'assemblage du milieu de la ferme en fonte, et la *fig.* 5 la petite bride d'assemblage du deuxième et du troisième châssis de fonte. On distingue, dans les *fig.* 6 et 7, le patin en fonte et le double scellement qui l'arrête sur le couronnement du mur.

Les quatre châssis supérieurs de chaque ferme sont à jour. Les fermes sont distancées de 4m.33, et maintenues verticales par les trois cours de barres de fer *a b b* dont l'une forme le faîtage, et les deux autres servent de pannes.

Le bâtiment a 12 mètres de large sur 30 de long. Les six fermes pesant chacune 960 kil. et la couverture mises en place ont coûté 15000 fr.

Ferme en fonte de la fonderie de Douai. Ce système rappelle, à beaucoup d'égards, celui que *Philibert Delorme* a exécuté en bois (*pl.* LXVI). L'arc, *fig.* 1, 2, 4 et 5, *pl.* LXX, est composé de trois lames de fonte. Celle du milieu seulement présente en coupe transversale la forme d'un T, *fig.* 5, dans les angles duquel s'emboîtent les deux lames latérales. Les trois lames sont disposées de telle sorte que tous les joints s'appliquent toujours sur des pleins. De petits boulons *b b*, *fig.* 1 et 2, placés à chaque joint apparent, maintiennent ces trois cours de lames. Les arcs sont contreventés par des liernes L en fonte servant de pannes, et qui portent les chevrons C C C en bois. Ces chevrons y sont attachés par des vis.

Ajoutons, en terminant cet article, que nous nous sommes moins attaché à réunir ici des modèles à imiter sans modification que des combinaisons variées et des éléments propres à faciliter la conception des projets. Nous engagerons le lecteur à consulter, pour les Fermes en bois, le *Traité de Charpenterie* de M. le colonel *Émy*.

FER et FONTE. Les minerais de fer, traités dans les hauts fourneaux soit au coke soit au charbon de bois, donnent pour produit immédiat une combinaison ou un mélange de fer et de 2 à 5 centièmes de charbon, de silicium, etc., qui prend le nom de *fonte*. *Affinée*, soit par le *puddlage* à la houille dans le traitement à l'anglaise, soit dans les *feux* de forge au charbon de bois, la fonte y perd la majeure partie de son charbon et passe ainsi à l'état de *fer* ductile. On obtient aussi directement du fer ductile en traitant *cer-*

tains minerais de fer par une méthode séculaire qui a reçu en France le nom de *Méthode catalane* (*).

Une légère différence de quelques centièmes de charbon, etc., dans la composition de la fonte et du fer qui en provient, suffit donc pour donner à ces produits des qualités complétement distinctes. L'un, la fonte, fusible et parfaitement liquide, de 1050 à 1200 degrés, reçoit, par le *moulage* ou le *coulage* dans des moules, les formes que l'industrie réclame; l'autre, le fer, fusible à une température de 1500 à 1600 degrés, qu'on ne pourrait lui communiquer que difficilement et à grands frais, sans le rendre même parfaitement liquide en grandes masses, est façonné pour tous les besoins usuels par la *compression* continue des laminoirs ou par le *choc* intermittent des marteaux, et ce à une température d'environ 1200 degrés, qui suffit à le ramollir et à lui permettre de se *souder* à lui-même quand il est de bonne qualité. Ainsi comprimé ou façonné en barres, le fer conserve généralement la texture grenue de la fonte dans les gros échantillons; les petits montrent, au contraire, à la cassure, une texture fibreuse qui semble déceler qu'une compression énergique a pu se faire sentir jusqu'au centre des barres, et que les *grains* écrasés, étendus, et soudés les uns aux autres, se sont transformés en fils, fibres ou *nerfs*. Les échantillons moyens présentent souvent la texture fibreuse et la texture grenue à la fois.

En général, l'action du laminoir développe plus également le *nerf* que celle du marteau. Du reste, la texture fibreuse s'acquiert par la compression d'autant plus difficilement que le fer est moins complétement affiné. Les fers fibreux résistent plus que les fers à grains aux efforts qui les tendent; mais ils se liment, se tournent et se polissent moins bien que ceux-ci. Tous les ouvriers forgerons prétendent aussi que le fer à grains soude mieux que le fer nerveux; c'est un fait que, malgré qu'il m'occupât, je n'ai jamais pu vérifier bien clairement; mais voici un autre fait que je crois avoir parfaitement bien constaté: c'est qu'il suffit d'amener une barre *nerveuse* au blanc soudant pour qu'elle revienne à l'état grenu, qu'elle conserve alors si elle n'est pas étirée de nouveau, soit au marteau, soit au laminoir, à une dimension assez faible. J'ai même vu des fers à grains fins passer à l'état de fers à gros grains par un *recuit* modéré quant à la température, mais suffisamment prolongé (**). Ce

(*) Je renverrai, pour tous les détails de la fabrication de la fonte et du fer, à la *Métallurgie* de M. Karsten, où ils sont assez exactement décrits, et, pour le traitement direct, aux *Etudes* que j'ai publiées, en 1838, *sur l'art d'extraire immédiatement le fer de ses minerais, sans convertir le métal en fonte*. Paris, Mathias.

(**) Je lis, dans l'*Aide-mémoire des officiers d'artillerie*, pag. 149, au paragraphe *des Fers forgés* : « Après le recuit, ils prennent du nerf. » J'ai eu l'occasion de *montrer* à quelques officiers de l'artillerie que j'ai eu l'honneur

retour du fer fibreux à l'état grenu sous l'influence d'une température élevée, fait que, je le répète, j'ai eu l'occasion d'observer souvent, me permet peut-être de donner l'explication d'une transformation analogue. On a avancé que les fers les plus nerveux soumis longtemps à des vibrations revenaient à l'état grenu par l'effet de ces vibrations mêmes, et l'on a cité comme exemples les essieux des voitures de chemins de fer qui, nerveux, dit-on, lors de leur mise en service, présentent presque tous une cassure grenue après quelques années de fatigue. On sait que ces essieux sont formés de 7, 9, 11 *mises* ou barres ayant à peu près la moitié de la longueur de l'essieu, et formant elles-mêmes une *trousse* qui a 2 fois à 2 fois $\frac{1}{2}$ l'épaisseur qu'il doit recevoir. Ces trousses, chauffées au blanc soudant dans un four à réverbère, sont ensuite battues au marteau de manière à souder à plat l'une sur l'autre les *mises* dont elles sont formées, ce qui ne peut avoir lieu qu'en allongeant en même temps la trousse jusqu'à la longueur de l'essieu à faire et même un peu au delà. J'ai fabriqué 4 à 500 de ces essieux ; chacun d'eux était formé de 7, de 9, quelquefois de 11 et même 13 mises ; *sans aucune exception*, toutes les barres qui ont fourni ces mises ont été cassées devant moi, et je n'ai admis dans les trousses que celles qui avaient donné une cassure *entièrement* nerveuse. Je pouvais donc croire que les essieux seraient nerveux : ce fut cependant l'exception. Par l'effet que j'ai signalé plus haut, les *mises*, sous l'influence de la haute température du four où on les réchauffait, reprenaient l'état grenu que semblent affecter les molécules du fer lorsque la chaleur leur donne la liberté de se disposer à leur convenance, et les chocs répétés du marteau sur ces trousses épaisses et larges, étaient incapables d'étendre de nouveau les *grains* en fibres ou *nerfs*. Un bout laissé à chaque essieu, et cassé longtemps après le refroidissement, a, plus de 90 fois sur 100, montré une cassure à petit grain. C'est, d'ailleurs, au centre que se trouvait le *nerf* dans les parties d'essieu restées fibreuses, parce que, sans doute, les mises du milieu ne pouvaient pas toujours s'échauffer au même degré que celles du dessus et du dessous de la trousse. Si je n'avais pas eu

---

de voir aux forges de Framont, que c'est précisément le contraire qui arrive : que, non-seulement le recuit ramène le nerf à l'état de grain, mais encore que, si le fer est grenu, son grain augmente notablement de volume ; dans le but de rendre l'effet du recuit très-sensible, j'ai conservé un échantillon d'excellent fer qui a été soumis à un recuit non interrompu pendant six mois, près du fer de tympe d'un haut fourneau. Il a acquis un grain bien plus gros que le plus gros grain de la fonte, et il est devenu très-fragile. Je pense que, en persistant dans la pratique du *recuit*, l'artillerie diminue énormément la résistance des pièces qu'elle fait fabriquer dans les forges ; mon opinion est confirmée par les résultats des expériences entreprises jusqu'ici : toutes s'accordent sur ce point que le recuit des fers diminue leur résistance de moitié et souvent plus.

l'occasion de faire ces observations, j'aurais affirmé avec une entière bonne foi qu'il n'était entré que des fers parfaitement et complétement nerveux dans chacune de ces pièces, et, lorsqu'après quelques années de service, dès lors après un nombre infini de chocs, de vibrations, on eût vu ces essieux donner une cassure grenue, on aurait attribué à ces vibrations même un effet qui n'était autre chose que le résultat infaillible et originel de la chaleur. J'ai tout lieu de croire qu'on expliquerait de la même manière les autres exemples qu'on cite des retours du fer de l'état fibreux à l'état grenu; c'est la compression seule qui, suivant moi du moins, développe le premier état, et la chaleur seule suffit pour ramener le second qui paraît être l'état naturel du fer. Les différences considérables que le fer présente sous ces deux formes, lorsqu'il est soumis à l'extension, doivent donc toujours faire préférer l'emploi des barres minces à celui de barres épaisses, et il s'en faut dès lors énormément que, pour un même fer, un accroissement de section augmente proportionellement la résistance à la rupture par extension.

Au reste, il y a de fer à fer des différences considérables. En général, les fers à la houille résistent beaucoup moins que les fers au bois; les fers au vent chaud et au vent froid ne présentent point de différences importantes; mais les essais faits par l'artillerie ont confirmé ce fait, que le laminoir ne peut faire acquérir au fer toutes les *qualités* que lui donne le marteau. Une opinion très-répandue attribue à la gelée une grande diminution dans la ténacité des fers qui y sont exposés, des expériences directes n'ont point toujours confirmé cette opinion. L'expérience enseignerait encore que la ténacité du fer ne diminue avec les accroissements de température qu'au-dessus de 250 à 300 degrés; bien plus, en partant des températures ordinaires, cette ténacité augmenterait, d'après quelques expériences, de $\frac{1}{6}$ à 100 et même 200 degrés : elle serait, vers 300°, égale à celle du métal à froid, se réduirait aux $\frac{2}{3}$ de celle-ci entre 500 et 550°, et au $\frac{1}{3}$ vers 700°, suivant les uns, ou au $\frac{1}{6}$ suivant d'autres, le fer étant alors d'un rouge assez vif pour être aperçu à la lumière du jour. — L'écrouissage paraît augmenter la ténacité du fer, et contrairement à l'opinion générale, tel fer qui martelé à chaud a rompu sous un effort de 42^k par millimètre carré de section, a exigé 49^k après avoir été martelé à froid. L'air humide oxide lentement le fer qui se recouvre d'une couche d'hydrate de peroxide de fer; je ne sais si sa ténacité en est beaucoup diminuée, mais cette oxidation augmente son volume : de sorte que, employé comme crampon et ancre dans les maçonneries, le fer en s'oxidant a quelquefois déterminé par cette augmentation de volume la rupture des pierres. Le zinc, dont on l'a recouvert depuis quelques années par des moyens électro-chimiques pour prévenir cette oxydation, n'exerce, suivant MM. *Mallet* et *Davy*, qu'une action protectrice momentanée. L'oxide de zinc se

trouve transporté à la surface, et l'effet salutaire cesse alors d'exister. Le laiton ne vaut pas mieux, et il semble encore jusqu'ici que le meilleur moyen de préserver le fer de la rouille consiste à l'enduire d'une couche de charbon en poudre délayé dans l'huile de lin, avec ou sans résine copale. La chaux, dans laquelle plongent les amarres des ponts suspendus, les ronge en peu d'années, et l'on s'étonne de voir l'administration persister dans cette pratique.

Le poids spécifique des fers est assez variable ; quoique les tables indiquent 7.788 au maximum, il dépasse très-souvent 7.800, atteint 7.900 et même 8000 pour certains fers martelés; il en résulte qu'on est presque toujours en déficit dans les devis, lorsqu'on y calcule les poids des fers en partant de leurs volumes.

Quant aux fontes, leur texture toujours à grains plus ou moins fins, mais surtout la couleur *noire*, *grise*, *truitée* ou *blanche* de leur cassure, sont encore les caractères ou les indices les moins incertains pour reconnaître leurs qualités mécaniques. On désigne habituellement ces couleurs dans les usines sous les numéros respectifs 1, 2, 3 et 4, mais il faut bien remarquer que tel numéro d'une usine ne correspond pas au même numéro d'une autre. En général, les fontes se moulent, se liment, résistent à la rupture, par extension, par des efforts transversaux ou par le choc, d'autant mieux que leur numéro est moins élevé ou qu'elles sont plus grises ; elles résistent à l'écrasement d'autant mieux qu'elles sont plus blanches. Toutefois, il y a de fontes à fontes, présentant un même grain et une même cassure, des différences notables dans leurs qualités mécaniques, suivant qu'elles proviennent de tels minérais ou de tels autres, et suivant que ces minerais ont été traités au coke ou au charbon de bois. Pour un même grain et une même couleur à la cassure, je n'ai jamais trouvé aucune différence constante dans la résistance d'une même espèce de fonte, soit qu'elle fût de *première*, soit qu'elle fût de *seconde fusion*.

Le poids spécifique des fontes est presque aussi variable que celui des fers. Les poids 7000 à 7200, admis dans les tables, sont souvent trop faibles.

Résistance de la fonte à l'écrasement.

CHARGES PAR MILLIMÈTRE CARRÉ QUI ONT ÉCRASÉ DE PETITS CUBES DE FONTE.

Fonte grise et douce.	100k	Reynolds.
Idem, *idem*.	110	Rennie.
Idem coulée horizontalement, poids spécifique, 7113. . . .	114	*Id.*
Idem coulée debout, ayant un poids spécifique moindre, 7074.	125	*Id.*
Fontes blanches.	125, 150 et 180	*Id.*

Lorsque la fonte est moulée en pièces ayant une hauteur un peu plus grande que le côté de la base, ces pièces se rompent en se déchirant transversalement, suivant une surface dont l'inclinaison sur le plan de la base varie en raison des qualités de la fonte, de 48° à

58°, et sous des charges, par millimètre carré, qui ont été déterminées par M. *Hodgkinson* comme suit :

Fonte de Buffery.	n° 1 au vent froid. . . .	66k
Idem.	n° 1 au vent chaud. . .	60
Fonte de Coed-Talon. . .	n° 2 au vent froid. . . .	58
Idem.	n° 2 au vent chaud. . .	58
Fonte de Carron.	n° 2 au vent froid. . . .	75
Idem.	n° 2 au vent chaud. . .	76
Idem.	n° 3 au vent froid. . . .	81
Idem.	n° 3 au vent chaud. . .	93

Les auteurs français, qui ont reproduit ces résultats, n'ont pas remarqué que les charges indiquées ici ne sont pas rapportées à la section S du solide perpendiculaire à son axe, mais bien à la section *réelle* de rupture $\frac{S}{\cos.\alpha}$, inclinée de l'angle α, variable de 48° à 58°, sur le plan de la base.

Lorsque, au contraire, les pièces de fonte reçoivent des hauteurs L, qui excèdent 30 fois le côté D de leur base ou leur diamètre D, elles se rompent, mais en pliant, et sous des charges totales K, qui sont exprimées par les formules suivantes de M. *Hodgkinson*, dans lesquelles j'ai tout transformé en *mètres* et en *kilogrammes*.

Ces formules sont l'expression directe de l'expérience.

$$K = \frac{D^{3.56}}{H^{1.7}} \times 2\,739\,024\,000 \text{ kilog.},$$ lorsque le support est plein;

$$K = \frac{D^{3.56} - d^{3.55}}{H^{1.7}} \times 2\,750\,188\,500 \text{ kilog.},$$ lorsque la colonne creuse a D pour diamètre extérieur et d pour diamètre du vide.

On trouverait, en faisant l'application de la première formule, qu'une colonne pleine, de 0m.12 diamètre et de 4 mètres de hauteur, romprait infailliblement par flexion sous une charge de 125k par millimètre carré de section transversale, ou une charge totale K = 1400000k en nombre rond.

Pour les colonnes plus courtes, qui rompent à la fois par déchirement transversal et par flexion, on peut prendre avec assez d'approximation pour le poids W qui déterminera la rupture.

$$W = \frac{KK'}{K + \frac{3}{4}K'},$$

K étant comme ci-dessus la charge qui romprait le support s'il ne cédait que par flexion, et K′ celle qui le romprait par déchirement transversal, sans le faire fléchir.

Les colonnes renflées, dont le diamètre au milieu est une fois et demie ou deux fois celui de leurs extrémités, offrent une résistance

plus grande de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{9}$ que les colonnes cylindriques de même fonte, de même poids et de même hauteur.

Résistance de la fonte à la rupture par extension. Les pièces cylindriques en fonte au charbon de bois, essayées, en 1815, par MM. *Minard* et *Desormes*, ont rompu sous des charges par millimètre carré de section, qui ont varié de $8^k.51$ à $14^k.3$. On remarque dans leur tableau que les moindres résistances correspondent en général à une température extérieure de 6° au dessous de zéro, et les plus fortes à une température de + 5°; toutefois, dans une expérience où la fonte a été portée à 60°, la rupture a eu lieu sous une charge de $11^k.39$. La moyenne générale de ces essais = $11^k.36$. Des barreaux cylindriques de fontes du Rhin au charbon de bois, ont donné pour moyenne 13^k 34.

Des barreaux carrés de fonte anglaise au coke ont donné à *G. Rennie* $13^k.1$ et $13^k.7$, suivant qu'ils étaient coulés horizontalement ou verticalement. Enfin, le résultat moyen des essais de *Brown* sur d'autres barreaux carrés est de $14^k.2$, et les résultats extrêmes 11^k et 16^k.

Résistance de la fonte à l'allongement et à la compression. Aucune expérience directe ne paraît avoir été faite; les allongements indiqués dans quelques tables sont deduits d'une théorie peut-être contestable (Voy. *Résistance des matériaux*).

Résistance de la fonte à la rupture par le choc. Je ne connais aucune expérience sur la résistance des fontes à ce mode de rupture; voici les résultats de quelques essais que j'avais commencés : sur un cube de fonte de plus de $0^m.40$ de hauteur, et dès-lors inflexible, j'ai disposé deux couteaux ou appuis, ayant chacun la forme d'un prisme triangulaire isocèle, dont la section verticale était un triangle ayant $0^m.04$ base et $0^m.04$ hauteur; les sommets des triangles sur lesquels posaient les barres à essayer étaient un peu arrondis, et ces couteaux étaient invariablement placés de manière que leurs arêtes supérieures fussent parallèles horizontales et distantes de $0^m.16$.

Sur ces couteaux on plaçait des barres carrées de fonte de $0^m.20$ de longueur, et on laissait tomber sur ces barres un boulet de 12 kilog.; les premiers barreaux de fonte de Framont ayant été limés et dressés jusqu'à ce que l'épaisseur et la largeur aient été chacune réduite à $0^m.04$, ils ont été placés sur les couteaux, et j'ai laissé tomber le boulet successivement sur chacun d'eux; voici ce qui est advenu :

1er barreau — résiste à une chute de $0^m.50$, casse au second coup sur la même face, sous une chute de 1^m. 2me barreau, résiste à une première chute de $0^m.60$, casse au second coup sur la même face, sous une chute $0^m.70$. Les barreaux, n°s 3, 5, 6, 7, 9, 10, cassent tous au premier choc, à une hauteur de $0^m.50$; mais les n°s 7 et 10 présentent des soufflures. — Les barreaux, n°s 4, 8, 11, résistent

tous à la première chute de 0m.50; ils cassent tous au second coup sur la même face, dû à une chute de 0m.60.

Des barreaux de même dimension en bois d'aulne, de sapin, de chêne, de hêtre, de charme, d'acacia, de frêne, ont résisté beaucoup plus que les barreaux de fonte.

J'ai essayé douze autres barreaux de fonte de Niederbronn, d'une section un peu plus forte et $= (0.042)^2$. Le n° 1 résiste à une chute de 0m 50, et casse au second coup sur la même face, sous une chute de 0m.60. Les barreaux nos 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11 et 12, cassent tous au premier coup, sous une chute de 0m.50; le n° 3 résiste sous 0m.50, et casse au second coup sur la même face, sous 0.55; le n° 4 résiste au premier coup sous 0.50, je le retourne sens dessus dessous, il casse au second coup, sous 0m.50. Le n° 10 résiste au premier coup sous 0m.50, je le retourne sens dessus dessous, et, au second coup, sous 0m.50, il se fend sur presque toute son épaisseur: la rupture s'achève en le laissant tomber lui-même d'une faible hauteur.

On peut donc admettre que, en général, des barreaux de bonne fonte grise au charbon de bois, de $(0^m.04)^2$ à $(0^m.042)^2$ d'équarrissage, et de 0m.16 entre les appuis, résistent tout au plus au choc d'un boulet de 12 kil. tombant de 0m.50 sur leur milieu.

Résistance de la fonte à la flexion. Le barreau de fonte est posé horizontalement sur deux appuis distants de L; la charge Q, appliquée au milieu de cette distance, donne au barreau une flèche f; la largeur du barreau est l, son épaisseur e.

	l	e	L	Q	f	
	m.	m.	m.	k.	m.	
Fonte française au charbon de bois, grise. . .	0.027	0.027	1.137	152.7	0.0124	Rondelet.
Douce.	0.027	0.027	1.137	152.7	0.0104	*Id.*
Grise.	0.027	0.027	0.569	220.3	0.0023	*Id.*
Douce.	0.027	0.027	0.569	220.3	0.0020	*Id.*
Fonte anglaise au coke.						
Grise douce.	0.0254	0.0254	0.864	9.1	0.0025	Tredgold.
Autre.	0.0381	0.0762	1.956	199.8	0.0019	*Id.*
La même pièce. . .	0.0762	0.0381	1.956	162.4	0.0064	*Id.*
Fonte moins douce. . . .	0.0229	0.0229	0.914	81.7	0.0046	*Id.*
La même.	0.0229	0.0229	0.914	81.7	0.0048	*Id.*

Flexions successives. Je donne ci-dessous le résultat *moyen* d'un assez grand nombre d'observations que j'ai eu l'occasion de faire sur des barreaux de fonte solidement encastrés par une extrémité, et portant des poids successifs posés avec beaucoup de douceur dans un plateau de balance suspendu à l'autre extrémité. Tous ces barreaux avaient $(0.026)^2$ d'équarrissage, la suspension était à 0m.775 de l'encastrement, et les flèches ont été mesurées au-dessus du point de

suspension. La fonte était de bonne qualité, grise et obtenue au charbon de bois.

Poids successifs. . 0	k. 67	k. 87	k. 97	k. 107	k. 112	k. 116	k. 124
Flèches correspondantes. 0	m. 0.034	m. 0.047	m. 0.056	m. 0.065	m. 0.070	m. 0.073	m. 0.080

Arrivé à ce point, il suffisait habituellement d'attendre un quart-d'heure ou une demi-heure pour que la rupture eût lieu. J'ai quelquefois décidé la rupture immédiate sous la charge de 124 kil., en mouillant le barreau d'eau froide lorsqu'il avait été exposé au soleil pendant l'essai.

Résistance de la fonte à la rupture par flexion. L est la distance des appuis, *l* la largeur du barreau, *e* son épaisseur verticale. K le poids qui, appliqué au milieu de L, a déterminé la rupture, φ est la flèche de rupture.

	l	*e*	L	K	φ
Rondelet.	m.	m.	m.	k.	m.
Fonte grise.	0.027	0.027	1.137	220.3	0.0147
Fonte douce.	*id.*	*id.*	*id.*	171.3	0.0096
La même.	*id.*	*id.*	*id.*	519.5	0.0316
La même.	*id.*	*id.*	*id.*	318.2	0.0354
Fonte grise.	*id.*	*id.*	0.5685	264.3	0.0023
La même.	*id.*	*id.*	*id.*	514.0	0.0045
Fonte douce.	*id.*	*id.*	*id.*	807.7	0.0118
La même.	*id.*	*id.*	*id.*	622.6	0.0045
G. Rennie.					
Barre carrée.	0.0254	0.0254	0.914	407.2	
Idem, *idem*.	0.0254	0.0254	0.813	493.0	
La moitié de cette barre. .	*id.*	*id.*	0.4065	1080.5	
Barre posée diagonalement	*id.*	*id.*	0.813	386.4	
La moitié de cette barre. .	*id.*	*id.*	0.4065	710.5	
Barre de même section. .	0.00635	0.1016	0.813	1806.5	
Idem même section. . . .	0.0127	0.0508	0.813	992.0	
Moitié de la même. . . .	*id.*	*id.*	0.4065	2046.6	
Barre de même section. .	0.0085	0.0762	0.813	1628.9	
Moitié de la même. . . .	*id.*	*id.*	0.4065	3111.7	
Prisme triangulaire équilatéral de même section :					
L'angle à la concavité. .	. . . . .	. . . . .	0.813	652.4	
L'angle à la convexité. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	381.4	
Fairbairn.					
Barre carrée, fonte n° 2 au vent froid, n'a rompu qu'au bout de 37 jours.	0.0257	0.0254	1.372	203.1	0.0516
Idem fonte n° 2 au vent chaud.	0.0257	0.0264	1.372	177.7	0.038

J'ai cassé bon nombre de barres solidement encastrées par une extrémité, en chargeant peu à peu de poids successifs un plateau de balance suspendu à un couteau portant sur l'autre extrémité de la barre à une distance de l'encastrement désignée par L. Il est rarement arrivé, malgré les précautions extrêmes prises pour éviter les secousses, que la rupture ait eu lieu à l'encastrement même ; presque toujours elle s'opérait entre la charge et l'encastrement, quelquefois au delà, à une distance de celui-ci, que je désigne par $\mp\Delta$; le signe — correspond au cas où la rupture s'opérait entre l'encastrement et la charge, et le signe + au cas où la rupture s'opérait au delà de l'encastrement, de sorte que l'on a K $(L \mp \Delta)$ pour le moment de la charge de rupture. Enfin, je n'ai presque jamais vu la fracture s'opérer suivant un plan ; la section de rupture présentait très-généralement en profil la forme d'une courbe tournant toujours sa concavité vers le côté de la charge, l'élément supérieur de cette courbe était normal à la face convexe de la barre, et la courbe se raccordait avec la face concave à peu près tangentiellement à celle-ci.

Voici quelques-uns des résultats que j'ai obtenus :

	l	e	L	Δ	K
	m.	m.	m.	m.	k.
Fonte au bois de Framont n° 2.	0.0245	0.0245	0.78	—0.01	81.25
Idem, *idem*.	0.0242	0.0245	0.49	—0.084	111.00
Idem au vent chaud, 2e fusion (a cassé en trois morceaux à la fois). . .	0.0245	0.0247	0.79	0	102.00
Fonte de seconde fusion, n° 1.	0.0245	0.0245	0.80	—0.03	117.00
Idem, *idem*, *idem*.. . . .	0.0245	0.0245	0.61	0	152.00
Idem, *idem*, n° 2 (a cassé suivant un plan).	0.025	0.025	0.74	—0.065	90.00
Fonte de Villerupt en seconde fusion, blanche cristalline.	0.026	0.0265	0.805	+0.02	67.00
Idem, *idem*, *idem*. . . .	0.026	0.0265	0.805	+0.025	66.00
Fonte de Framont, 2e fusion, vent froid, n° 2. .	0.0265	0.026	0.762	—0.04	117.00
Idem vent chaud, n° 2. . .	0.026	0.026	0.695	—0.097	136.00

Influence de la température. Il semble résulter d'expériences anglaises que la résistance de la fonte à la rupture par flexion atteint son maximum à la température zéro ; qu'elle décroît sensiblement depuis zéro jusqu'à cent degrés, pour croître de nouveau de 100 à 300°, et diminuer ensuite à mesure qu'elle se rapproche du rouge sombre où elle ne perdrait que 0.12 de la ténacité qu'elle avait à son maximum.

Résistance de la fonte à la rupture par torsion. d est le côté de la section de la barre, lorsqu'elle est rectangulaire, ou son diamètre lorsqu'elle est ronde ; *s* est sa section, *l* est la distance du point d'encastrement de la barre au point où l'effort de torsion s'exerce, M le moment qui a déterminé sa rupture, ou le poids en kilog. qui l'aurait rompue en agissant à 1 mètre de distance.

	l	*d*	*s*	M	
	m.	m.	mm	k.	
Barreau carré.	. . . . .	0 0254	0.000645	177.6	Banks.
Idem, rond.	0,06985	0.0508	0.002025	542.2	Dunlop.
Idem, idem.	0.08255	0.0572	0.002569	833.6	*Idem.*
Idem, idem.	0.07620	0.0635	0.003165	884.7	*Idem.*
Idem, idem.	0.07620	0.0698	0.003825	1518.1	*Idem.*
Idem, idem.	0.10160	0.0826	0.005357	2537.5	*Idem.*
Idem, idem.	0.12700	0.0889	0.006588	2593.9	*Idem.*
Idem, idem.	0.12700	0.0952	0.006801	3604.7	*Idem.*
Idem, idem.	0.12700	0.1016	0.008104	4202.8	*Idem.*
Idem, idem.	0.15240	0.1080	0.009156	4680.0	*Idem.*
Barre au carré, coulé horizontalement.	. . . . .	0.00635	0.000040	2 8	Rennie.
Idem, verticalement. . . .	. . . . .	*id.*	*id.*	3.0	*Idem.*
Idem, horizontalement. .	0.0127	*id.*	*id.*	2.0	*Idem.*
Idem, idem.	0.0190	*id.*	*id.*	2.3	*Idem.*
Idem, idem.	0.0254	*id.*	*id.*	2.4	*Idem.*
Idem, verticalement. . . .	0.0127	*id.*	*id.*	2.8	*Idem.*
Idem, idem.	0.0190	*id.*	*id.*	2.4	*Idem.*
Idem, idem.	0.0254	*id.*	*id.*	2.3	*Idem.*
Idem, idem.	0.1524	*id.*	*id.*	2.8	*Idem.*
Idem, horizontalement. .	. . . . .	0.0127	0.000161	26.4	*Idem.*
Idem, idem.	. . . . .	0.0127	0.000161	20.8	*Idem.*
Idem, idem.	0.2540	0.0127	0.000161	14.7	*Idem.*
Barreau carré.	0.0254	0.0254	0.000645	98.3	Bramah.
Idem, idem.	0.0508	0.0254	0.000645	90.1	*Idem.*

Règles pratiques relatives à l'emploi de la fonte. On admet assez généralement dans la pratique, 1° que la fonte employée d'une manière quelconque dans les constructions ne doit pas y être soumise à un effort plus grand que le quart, ou même le cinquième de celui qui déterminerait sa rupture instantanée, mais à la condition que la construction ne soit pas exposée à de fortes secousses; 2° que le plus grand allongement qu'elle puisse subir, sans que son élasticité longitudinale soit altérée, est $0^{m}.00068$ par mètre, chiffre que les expériences de *Tredgold* élèvent même à $0^{m}.00083$. Cet allongement correspondrait, d'après la théorie, à un effort longitudinal $= 10^{k}$ par millimètre carré ; 3° la rupture instantanée par extension s'opérant sous un effort d'environ 13^{k} par millimètre, on se conformerait à la première règle en limitant dans la pratique les efforts d'exten-

sion à 3ᵏ 25 par millimètre carré, effort qui répond à peu près à un allongement de 0ᵐ.00023 au plus par mètre ; 4° on admet, en effet, qu'en deçà de la limite d'extension pour laquelle l'élasticité est altérée, les allongements sont proportionnels aux efforts ; 5° on admet encore que, tant que l'élasticité n'est pas altérée, les fibres de la fonte résistent à la compression comme à l'extension : mais cette hypothèse, née du besoin de simplifier la théorie, doit être absolument rejetée par les praticiens. La résistance à la compression dépasse considérablement la résistance à l'extension, ainsi que l'ont prouvé les expériences récentes de M. *Hodgkinson* ; et, dès lors, les pièces de fonte exposées à des flexions doivent recevoir toujours des formes telles que la plus grande masse du métal soit portée du côté de la convexité, et la plus petite du côté de la concavité. De deux poutrelles en fonte identique, coulées dans le même moule, dont la section avait à peu près la forme d'un **T**, l'une disposée ainsi **⊥**, a exigé, pour être rompue, une charge supérieure, en son milieu, de 9 quintaux ; l'autre placée ainsi **T** a rompu sous une charge de 2 quintaux $\frac{1}{2}$.

Au reste, ces règles pratiques, acceptées depuis longues années, se modifient tous les jours par suite des nombreuses expériences faites récemment en Angleterre ; et, déjà, les ingénieurs prudents réduisent au $\frac{1}{10}$ de l'effort qui produirait instantanément la rupture *par flexion* les charges permanentes des pièces en fonte soumises dans les constructions à ce genre d'efforts. Encore est-il à craindre que cette réduction au $\frac{1}{10}$ ne suffise pas dans les cas fréquents où il importe que les pièces ne se déforment pas avec le temps ; on peut voir, en effet, dans les nombreuses expériences de M. *Hodgkinson*, que des barreaux de fonte ont conservé une déformation permanente, et peut-être atteint dès-lors leur limite d'élasticité, après avoir été soumis à des efforts de flexion qui n'ont été que les 0.0341, 0.0338, 0.0308, 0.019, et même les 0.012 de ceux qui produisirent la rupture instantanée. Enfin, nous verrons ci-dessous qu'il ne semble plus permis de douter que la durée d'un même effort suffise seule pour accroître les déformations, durée dont la théorie n'a tenu aucun compte jusqu'à présent.

Résistance du fer à l'écrasement. Les petits cubes de fer forgé s'écrasent sous une charge de 50 kil. par millimètre carré. Lorsque le fer est forgé en colonne cylindrique pleine ayant au moins trente diamètres, la colonne rompt par flexion sous une charge K en kilogrammes, qui est, d'après M. *Hodgkinson*,

$$K = \frac{D^{3,55}}{H^2} \times 5\,808\,645\,333.,$$

D et H étant le diamètre et la hauteur en *mètres*. Ainsi, toutes

choses égales d'ailleurs, la résistance des colonnes en fer forgé est à celle des colonnes en fonte pleine environ, comme 1745 à 1000.

Je remarquerai, avec M. *Hodgkinson*, que les résistances à la rupture des colonnes *semblables* ne croissent pas comme les carrés de leurs dimensions homologues, mais comme les puissances 1.865 de ces dimensions. Ce même résultat s'applique aux colonnes ou piliers en fonte.

Résistance du fer à la rupture par extension. Les poids en kilogrammes expriment la tension par millimètre carré de section transversale.

	Poids.	Allongement par mètre, lors de la rupture.	
	k.	m.	
Fer anglais laminé.	40	. . . .	
Idem. . . . martelé.	47	. . . .	Brunel.
Fer russe.	42	. . . .	Lamé.
Id. suédois.	50	. . . .	Rennie.
Id. français, fabriqué au charbon de bois et au marteau de 0m014 × 0.006 tout nerf.	83	. . . .	Rondelet et
Le même avec un tiers de grain.	42	. . . .	Soufflot.
Le même avec plus de moitié de grain. .	31	. . . .	*Idem*.
Fer français de 0.009 × 0.009 :			
A gros grain sans nerf.	18	. . . .	*Idem*.
A grains moyens sans nerf.	24	. . . .	*Idem*.
A grains fins sans nerf.	35	. . . .	*Idem*.
A gros grains moitié nerf.	35	. . . .	*Idem*.
A grains moyens moitié nerf. . . .	43	. . . .	*Idem*.
Tout nerf.	62	. . . .	*Idem*.
Grain moyen brillant.	45	0.13	Minard et
Le même, les morceaux soudés.	45	0.05	Désormes.
Même fer, échantillon un peu plus fort.	40	0.025	*Idem*.
Fer grain fin gris-bleu.	30	0.025	*Idem*.
La même barre.	42	0.095	*Idem*.
Idem.	35	0.01	*Idem*.
Idem chauffée au blanc avant l'épreuve.	42	0.185	*Idem*.
Morceaux corroyés et étirés.	42	0.15	*Idem*.
Les mêmes.	35	0.045	*Idem*.
Les mêmes chauffés au blanc et trempés dans l'eau froide.	37	0.08	*Idem*.
Fer rond provenant du corroyage de rognures de tôle au laminoir de Guérigny.	32	0.241	E. Martin.
Fer à câble de Rigny.	29	0.226	*Idem*.
CHAINES à chaînons elliptiques sans étais, fer de 0m.012.	34	. . . .	Brunel.
Idem, idem, avec étais.	39	. . . .	Barlow.
TÔLES tirées dans le sens du laminage.	de 36 à 45	. . . .	Navier.
Idem. . . . . dans l'autre sens.	de 33 à 39	. . . .	*Idem*.
Idem. . . . . dans le sens du laminage.	22	. . . .	Mitis.
Idem. . . . . dans l'autre sens.	28	. . . .	*Idem*.

	Poids.	Allongement par mètre, lors de la rupture.	
	k.	m.	
FILS DE FER anglais de $\frac{1}{4}$ de millimètre.	de 57 à 68	....	Telford.
Idem. . . . russes de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{12}$ de millim.	de 95 à 143	....	Lamé.
Idem. . . . de Bourgogne de 1 millim.	73	....	Seguin.
Idem. . . . *idem*, recuit.	36	....	*Idem.*
Idem. . . . de Besançon de 0m.0006..	86	....	*Idem.*
Idem. . . . d'Allemagne, non recuit. .	67	0.00374	Brix.
Idem. . . . *idem*, recuit..	43	0.00832	*Idem.*

Résistance des fers à l'extension. P. Barlow a déduit les résultats suivants des expériences qu'il a entreprises vers 1838, dans le but d'éclairer la question de l'établissement des chemins de fer.

L'élasticité des bons fers n'est point instantanément altérée tant que l'effort d'extension ne dépasse pas 14 à 15 kil. par millimètre carré de section transversale.

A cette extrême limite, l'allongement de la barre est à très-peu près de 1 millimètre par mètre, soit 0,001.

Tant que cette limite n'est pas atteinte, l'allongement est proportionnel aux efforts et peut dès lors être considéré comme égal à 0m.00006666 par mètre, pour chaque kilogr. d'effort par millimètre carré de section.

D'après M. *Navier*, ce dernier chiffre ne serait que 0.00005166, et pour les fils de fer en particulier, M. *Vicat* a trouvé 0.0000579 au plus. Je donne ci-dessous les allongements par mètre observés par M. *Barlow*, sur une barre carrée de $(0.0254)^2$ et une longueur de 3m.04, ainsi que ceux observés par M. *Bornet* sur une barre ronde de 0m.0495 diamètre. La première colonne indique les charges par millimètre carré qui ont produit les allongements. On peut remarquer que la proportionnalité entre les allongements et les efforts n'est nullement confirmée par ce tableau au delà des plus faibles charges.

Charges par millimètre carré.	BORNET. — Allongement par mètre.	BARLOW. — L'allongement par mètre a varié de	à
k.	m.	m.	m.
1.575			
2.000	0.00003	0	0
3.151	. . . .	0.00016	0
4.000	0.00016		
4.726	. . . .	0.00031	0.0000625
6.000	0.00031		
6.302	. . . .	0.00041	0.00015

Charges par millimètre carré.	BORNET. — Allongement par mètre.	BARLOW. — Allongement par mètre a varié de	a
k.	m.	o.	o.
7.877	. . . .	0.00056	0.00024
8.000	0.00036		
9.452	. . . .	0.00067	0.00035
10.000	0.00047		
11.028	. . . .	0.00079	0.00044
12.000	0.00055		
12.603	. . . .	0.00091	0.00052
14.000	0.00069		
14.179	. . . .	0.00103	0.00062
15.754	. . . .	. . . .	0.00070
16.000	0.00086		
17.329	. . . .	. . . .	0.00081
18.000	0.00220		
18.905	. . . .	. . . .	0.00113 (*)
20.000	0.01576		
22.000	0.02434		
24.000	0.03479		
26.000	0.04696		
28.000	0.06770		
30.000	0.08939		
32.000	0.13248		
33.000	rupture.		

(*) L'élasticité est altérée, les barres ne reviennent plus à leur longueur primitive à partir de ce dernier allongement 0m.00113. Il semble qu'il en ait été de même pour la barre de M. Bornet, lorsqu'elle a atteint le même allongement.

Résistance des fers à la flexion. J'emprunte les résultats suivants aux expériences de *P. Barlow*, et je les traduis en mesures françaises. — *l* est la largeur de la barre, *e* son épaisseur verticale, L la portée, Q le poids qui agit au milieu, *f* la flèche correspondante à ce poids. — Les lettres E A signifient que l'élasticité de la barre est altérée, c'est-à-dire que, le poids Q enlevé, la barre ne reprend pas sa forme primitive.

	l	*e*	L	Q	*f*	
	m.	m.	m.	k.	m.	
Bon fer anglais. . . .	0.0483	0.0508	0.838	127	0.00086	
	id.	*id.*	*id.*	254	0.00118	
	id.	*id.*	*id.*	508	0.00145	
	id.	*id.*	*id.*	1016	0.00194	
	id.	*id.*	*id.*	1524	0.00244	
	id.	*id.*	*id.*	2032	0.00310	
	id.	*id.*	*id.*	2286	0.00338	
	id.	*id.*	*id.*	2540	0.00379	EA
Bon fer anglais. . . .	0.038	0.0762	*id.*	127	0.00109	
	id.	*id.*	*id.*	508	0.00150	
	id.	*id.*	*id.*	1016	0.00188	
	id.	*id.*	*id.*	1524	0.00211	

	l	*e*	L	Q	*f*
	m.	m.	m.	k.	m.
Bon fer anglais. . . .	0.038	0.0762	0.838	2032	0.00241
	id.	*id.*	*id.*	2540	0.00257
	id.	*id.*	*id.*	3048	0.00277
	id.	*id.*	*id.*	3556	0.00305
	id.	*id.*	*id.*	4064	0.00330
	id.	*id.*	*id.*	4572	0.00356
Rail à double renflement, pesant 31 kil. le mètre.	. . . . .	0.1143	0.838	1016	0.00089
		id.	*id.*	2032	0.00099
NOTA. J'ai choisi, dans la série des expériences sur les rails, celle qui a donné les plus fortes flèches.		*id.*	*id.*	3048	0.00112
		id.	*id.*	4064	0.00122
		id.	*id.*	5080	0.00137
		id.	*id.*	6096	0.00150
		id.	*id.*	7112	0.00163
		id.	*id.*	8128	0.00175
		id.	*id.*	9144	0.00193
		id.	*id.*	10160	0.00208
		id.	*id.*	11176	0.00218
		id.	*id.*	12192	0.00244

Sous le passage d'une locomotive, dont le poids porté par les roues tirantes était 5880^k, un rail à renflements égaux supérieur et inférieur, du poids de 30^k au mètre, de 0^m.1016 hauteur, les coussinets étant à 0^m.914 de distance, accuse des flèches qui ont varié de 0^m.0010 à 0.0036, qu'on peut cependant évaluer communément à 0^m.0015. Lorsque les rails consécutifs ne sont pas de niveau, la flèche de courbure d'un rail, sous le passage d'un train, peut s'élever au double de celle qui serait produite par une égale charge au repos.

Résistance des fers à la rupture par flexion. Je ne connais point d'expériences relatives à ce mode de rupture, et elles sont même presque impossibles sur la plupart des bons fers au bois qu'on ne parvient pas toujours à rompre par flexion, même après les avoir entamés à la *tranche*. Les fers à grains seuls pourraient être soumis à ce mode d'essai; quant aux fers nerveux, j'en ai pliés et depliés six fois sur eux-mêmes sans les rompre, l'une des moitiés de la barre décrivant ainsi, chaque fois, un angle de 180° autour de l'autre moitié sur laquelle on la ramenait ensuite par un mouvement inverse.

Résistance des fers à la rupture par torsion. Je n'ai trouvé sur ce mode de rupture que les expériences suivantes dues à *G. Rennie*. *M* est ici le moment qui a produit la rupture ou le nombre de kilogrammes qu'on peut supposer avoir agi à l'extrémité d'un levier de 1 mètre, *s* est la section de la barre.

	L	s	M
		m.	k.
Fer forgé anglais.	0	$(0.00635)^2$	2.794
Idem de Suède.	0	*id.*	2.620
Acier.	0	*id.*	4.710

Résistance des fers à la torsion. L est la longueur de la barre comptée de son encastrement au point d'application de l'effort de torsion, *d* est le diamètre de la barre ou le côté de sa section si elle est carrée, α est l'angle de torsion en degrés sexagésimaux et fractions *décimales* de degré; le moment de torsion M est constant pour toutes ces barres et $= 10^k \times 0^m.32$ soit $3^k.2$ appliqués à un bras de levier de 1 mètre. Les expériences sont de M. *Duleau*.

	L	d	α
	m.	m.	o
Fer rond du Périgord.	2.81	0.0142	13.4
Idem. . . *idem*.	3.17	0.0197	6.
Idem. . . anglais.	2.40	0.0198	4.
Idem. . . de l'Ariége.	3.57	0.0215	4.8
Idem. . . *idem*.	2.89	0.0215	4.5
Idem. . . du Périgord.	3.19	0.0221	3.32
Idem. . . *idem*.	2.89	0.0230	3.
Idem. . . anglais.	3.24	0.0235	2.34
Idem. . . du Périgord.	2.94	0.0265	1.82
Idem. . . *idem*.	3.35	0.0267	1.87
Idem. . . *idem*.	2.92	0.0357	0.625
Idem. . . de l'Ariége.	2.77	0.0268	1.65
Fers carrés anglais.	4.12	0.02	6.5
Idem. . . . *idem*.	2.52	0.02	4.
Idem. . . . du Périgord. . . .	2.52	0.0204	3.08
Idem. . . . *idem*.	3.39	0.0326	0.62
Fer plat anglais.	2.91	0.0340 0.0086	11.4
Idem. . *idem*.	1.55	0.0340 0.0086	5.6
Idem. . du Périgord.	2.91	0.0340 0.0105	7.2
Idem. . anglais.	1.45	0.0678 0.0147	0.85

Règles pratiques relatives à l'emploi des fers. On admet, dans la pratique, que les fers ne doivent pas être soumis d'une manière permanente à des efforts plus grands que le $\frac{1}{6}$ ou même le $\frac{1}{7}$ de ceux qui détermineraient leur rupture instantanément. Il est peut-être à craindre, qu'en se conformant à ce précepte, on ne fasse point une part assez large à l'influence de la *durée* des efforts.

Influence de la durée des efforts. Le plus grand nombre des expé-

riences entreprises jusqu'ici sur les fontes et les fers soumis à l'extension et à la flexion, semblent prouver que les allongements et les flèches croissent avec le temps, sous des efforts constants même très-inférieurs à ceux qui détermineraient la rupture instantanée. Des expériences délicates de M. *Vicat* ont montré, par exemple, que le fer en fils soumis au $\frac{1}{4}$ de l'effort qui en produirait la rupture par extension, et soustrait à tout mouvement d'oscillation et de trépidation, continuait encore à s'allonger même après plusieurs années d'expérience. M. *Fairbairn*, de son côté, a soumis un barreau de fonte à un effort de flexion peu supérieur à la moitié de celui qui l'aurait rompu, et la flèche a été constamment en croissant pendant quinze mois. L'influence de la durée des efforts sur les accroissements des allongements et des flèches est encore plus sensible lorsque ces efforts se rapprochent de ceux qui produiraient la rupture instantanée.

Considéré au point de vue de la chimie, le fer est un corps simple gris bleuâtre dont le poids spécifique est 7.788 au maximum. Très-magnétique à froid, il perd cette qualité à la chaleur blanche, et même au rouge vif, d'après *Faraday*. — Il s'oxide à froid au contact de l'eau et de l'air humide, et il décompose l'eau à la chaleur rouge en formant un oxide particulier, l'oxide magnétique ; — il décompose aussi l'acide carbonique à une haute température, et s'oxide en s'emparant d'une partie de son oxygène; à cette même température, l'oxide de carbone réduit complétement ses oxides.

On connaît quatre oxides de fer : 1° le protoxide, 2° l'oxide des battitures ou deutoxide, 3° l'oxide magnétique qui provient de la décomposition de l'eau, 4° le peroxide. Voici leurs compositions :

Fer.	77.23	74.50	71.78	69.34
Oxigène.	22.77	25.50	28.32	30.66
	100.00	100.00	100.00	100.00
	protoxide.	deutoxide.	ox. magn.	peroxide.

Les minerais de fer se trouvent dans tous les terrains. La métallurgie n'exploite que les oxides et les carbonates. Le carbonate de fer pur contient :

Fer métallique.	47.47	} = 61.47 protoxide de fer.
Oxigène.	14.00	
Acide carbonique.		38.53
Carbonate de protoxide de fer. . . .		100.00

On trouve, page 32, les méthodes ordinaires pour analyser les minerais de fer; j'aurais désiré ajouter ici quelque procédé sûr pour l'analyse des fontes, des fers et des aciers, j'ai le regret de n'en connaître encore aucun; entre tous ceux qui ont été proposés, il n'en

est pas deux quelconques qui conduisent à des résultats approximativement semblables.

FILONS et **COUCHES** (*Planche* LXXI). Gîtes de minéraux utiles compris entre deux nappes plus ou moins ondulées, habituellement peu distantes et sensiblement parallèles, encaissés dans la masse des roches stériles à travers laquelle ils courent, et parfois se contournent et se ramifient sans se confondre avec elle.

La distance moyenne des nappes terminales est l'épaisseur ou la *puissance* moyenne de la couche ou du filon; cette dimension, très-variable d'ailleurs, est toujours très-faible comparativement aux deux autres dimensions du gîte, lesquelles dépassent souvent plusieurs centaines et même plusieurs milliers de mètres, au moins dans un sens. Le plus *puissant* filon en cours d'exploitation est le filon argentifère de la *Veta-Madre* au Mexique. Sa *puissance* varie de 30 à 45 mètres; il a été suivi, dans l'autre sens, sur une longueur de plus de 12000 mètres, et les travaux dépassent 400 mètres en profondeur. Comme autre limite de puissance, on peut citer certains filons d'étain dont l'épaisseur varie de 0m.01 à 0m.03.

Lorsque les filons ou les couches s'étendent à travers des TERRAINS stratifiés (*fig.* 1 *et* 3), ils peuvent en recouper les assises sous toutes les inclinaisons possibles, depuis le parallélisme jusqu'à la perpendicularité.

On affecte plus particulièrement le nom de *couches*, de *bancs*, de *lits*, de *veines*, à ceux des gîtes (*fig.* 3) dont le plan général est sensiblement parallèle à celui des assises des roches stériles encaissantes, et l'on réserve le nom de *filons* (*fig.* 1) aux gîtes qui recoupent ces assises.

On rencontre en *couches* la houille, et souvent, avec elle, le fer carbonaté lithoïde, l'anthracite, le plâtre, le sel gemme, le fer oxidé hydraté, le fer en grains, etc.

Presque tous les autres minerais se rencontrent en filons.

Les filons diffèrent encore des couches en ce qu'ils traversent parfois plusieurs TERRAINS différents, et aussi en ce que les matières qui les constituent le plus souvent sont à l'état cristallin plus ou moins parfait.

Tous les minéraux utiles ne se trouvent point nécessairement en *couches* ou en *filons* dans le sein de la terre. Il en est encore qui s'y disposent en agglomérations de formes indéterminées qu'on désigne sous le nom d'*amas*. Ainsi, le gypse et le sel gemme qu'on trouve souvent en couches, se rencontrent aussi en *amas*. Certains amas semblent être le résultat d'une dissémination de la matière métallique dans les nombreuses fissures des roches encaissantes, et même d'une sorte de pénétration ou d'imbibition de ces roches elles-mêmes; on les désigne alors sous le nom de *stockwerk*. Le célèbre gîte de

Rancié (Ariége), qui alimente plus de soixante forges depuis plusieurs siècles, est un *stockwerk*. Les amas et les stockwerks présentent souvent des masses métalliques plus riches que dans les filons, mais on les regarde comme plus facilement épuisables que ceux-ci. Il est encore une classe de gîtes qui ne contiennent de substances métalliques que dans le voisinage du sol, véritables amas sans étendue et sans profondeur que les praticiens désignent sous le nom caractéristique de *coureurs de gazon*. Ceux des géologues dont les *coureurs de gazon* troublent les théories en contestent l'existence.

Définitions techniques. Quelle que soit la dénomination d'un gîte, la nappe terminale supérieure qui le recouvre en est le *toit* (*fig.* 1), la nappe inférieure en est le *mur*; le toit et le mur prennent le nom commun d'*Epontes*. Il arrive fréquemment que, aux épontes, le gîte est isolé des roches encaissantes par des matières différentes tant de celles du gîte que de ces roches elles-mêmes. Ces couches étrangères, lorsqu'elles existent, se nomment *salbandes*. Les salbandes sont formées quelquefois de plusieurs couches distinctes; leur ordre de superposition au toit est toujours inverse de celui qu'on retrouve au mur. Enfin, lorsqu'un gîte vient couper le sol et y montrer sa tranche, cette tranche prend le nom d'*affleurement* (*fig.* 1). Ce sont, dans la très-grande généralité des cas, les affleurements *seuls* qui ont décelé l'existence des gîtes minéraux.

Direction d'un gîte. Imaginez un plan tangent T en un point Z du toit d'un gîte. Faites passer par ce même point un plan méridien M dirigé vers le nord; recoupez ces plans T et M par un troisième plan horizontal H passant par Z, l'angle plan horizontal, formé par les intersections de H sur T et M, est la *direction* du gîte au point Z. Elle se compte toujours à partir du méridien nord où elle est zéro, jusqu'à 180°, soit vers l'est, soit vers l'ouest, ce que l'on a soin d'indiquer par les signes respectifs E ou O. Elle s'évaluait souvent autrefois en *heures* à la manière allemande; *l'heure* n'est ici rien autre chose qu'un *angle* de 15 degrés; elle se compte alors de 0 heures à 12 heures, soit vers l'est E, soit vers l'ouest O, et toujours en partant du méridien nord. Ainsi, dire qu'un filon est dirigé sur 8 heures E, c'est dire que sa *direction* est 120° E; ou bien encore 4 heures O ou 60° O, si l'on veut éviter l'emploi des angles obtus.

Le méridien pris pour plan de départ est d'ailleurs le méridien vrai, ou le méridien magnétique donné par l'aiguille. Dans le premier cas, on a la direction *vraie*; dans le second, la direction *ma-*
tique. Cette dernière est la plus usuelle et la plus incertaine, on ramènerait facilement à la première si la déclinaison de l'aiguille
iantée était connue et fixe.

L'inclinaison en un point Z d'une couche ou d'un filon, est l'angle u compris entre le plan T tangent à la couche en ce point, et le

plan horizontal H passant par ce même point. On indique, avec l'inclinaison en degrés, vers lequel des points cardinaux a lieu la plongée ou le pendage du filon. Des directions et inclinaisons prises en un nombre de points d'une couche d'autant moins grand qu'elle est moins contournée, on conclut la direction et l'inclinaison moyenne ou générale du gîte.

Origine des filons. Comment les filons se sont-ils formés? comment ont-ils été remplis de matières minérales distinctes des roches encaissantes? Tel est le problème qui occupe encore quelques géologues modernes, et dont la solution semblerait avoir été déjà cherchée antérieurement au temps de Pline. Les hypothèses de l'antiquité ne sont pas toutefois parvenues jusqu'à nous, et il faut redescendre la série des âges jusqu'à *Agricola*, pour retrouver le germe d'une théorie, assez confuse d'ailleurs, de la formation des filons (*de Re metallicâ*).

A partir de cette époque (XVI[e] siècle) les filons sont successivement considérés, d'abord comme une simple transformation de la roche, — puis comme des fentes ouvertes par le haut, et postérieurement à leur formation remplies de matières minérales. — *Lassius* ou *Lassus*, émet enfin l'idée que, aux temps géologiques, les eaux, chargées de dissolvants et surtout d'acide carbonique, se seraient emparées des parties métalliques et terreuses de la masse des roches, se seraient ensuite infiltrées ou déposées dans les fentes et les fissures du sol; puisque, par l'arrivée de quelque précipitant, elles auraient abandonné dans ces crevasses les principes constituants de la matière des filons. Plus tard, il y a environ un siècle, *Werner* adoptant en partie les hypothèses de ses prédécesseurs, les étendant et les complétant à l'aide de nombreuses et consciencieuses observations qui lui étaient propres, crée ou développe la théorie *neptunienne*. Dans ce système, les couches des montagnes originairement humides et recevant sans cesse de nouveaux dépôts, se seraient affaissées et auraient glissé lorsque l'accumulation aurait été trop grande, et ces mouvements auraient produit les fentes qui sont devenues les gîtes des filons. D'après *Werner*, le retrait que la masse des couches aurait éprouvé en se desséchant pourrait aussi être considéré comme la cause première de la formation des fentes et des fissures. Les gîtes ouverts, il fallait les remplir. Il y pourvut par la précipitation des matières dissoutes dans les eaux qui recouvraient alors les terrains où les fentes s'étaient formées. Le calme dont les eaux jouissaient dans ces cavités avaient d'ailleurs, par un effet bien connu, favorisé la cristallisation des précipités; les druses qu'on rencontre dans les filons avaient pris naissance dans les parties qui n'avaient pas été entièrement remplies; enfin la présence des galets, des pierres arrondies qu'on y trouve parfois, celle du sable, du limon, les empreintes de corps organisés pétrifiés, prouvaient encore

que les filons avaient été remplis de haut en bas, du sol vers l'intérieur, de la circonférence vers le centre. *Werner* appuyait sa théorie d'une foule de faits curieux et qui lui survivront; il signalait la formation actuelle de crevasses, tantôt par l'effet d'une humidité prolongée, tantôt à la suite de tremblements de terre, etc., etc... Les objections ne manquèrent pas toutefois. On demanda comment les eaux s'étaient chargées de principes métalliques? comment, ainsi chargées, ne les avaient-elles précipités que dans les fentes, sans laisser souvent aucune trace de ces mêmes principes ni dans la masse, ni à la surface du terrain qui contient le filon? Comment des crevasses de plusieurs milliers de mètres en direction et de plusieurs centaines de mètres en inclinaison, quelquefois très-peu obliques à l'horizon, avaient pu rester béantes un seul instant, ouvertes qu'elles étaient dans des matières molles, sans que la masse supérieure, en s'affaissant, eût comblé la cavité? Comment, dans certains filons, se rencontraient d'énormes fragments des roches encaissantes complétement isolés de celles-ci dans tous les sens, et ayant dû dès lors flotter dans le sein du liquide métallifère beaucoup moins dense que ces fragments? Pourquoi les filons ne présentaient aucun indice de stratification horizontale, s'ils étaient le produit d'une action sédimentaire? pourquoi les matières métalliques y étaient souvent disposées dans un ordre inverse de leurs poids spécifiques? pourquoi, etc., etc.? *Werner* et son école répondirent plus ou moins heureusement à quelques-unes de ces objections; toutefois, l'insuffisance de son hypothèse à expliquer la formation d'une classe nombreuse de filons devint de plus en plus évidente à mesure que les observations se multiplièrent, et la grande masse des géologues se jeta dans la théorie *plutonique* ou *vulcanique* de *Hutton*.

Hutton, géologue écossais, se basant sur l'hypothèse d'un *feu central*, attribua à l'incandescence intérieure de la terre et la formation et le remplissage des filons à la fois. Dans ce système, les métaux et les terres fondus, ou même réduits en vapeur par l'excessive température intérieure du globe, auraient, par leur force expansive, fendu çà et là son enveloppe solide, et en auraient en même temps rempli les crevasses du bas, vers le haut, du centre vers la circonférence par injection et par sublimation; et le refroidissement postérieur aurait été la cause de la cristallisation plus ou moins confuse de la matière des filons.

Mais le système *huttonien* ne souleva pas moins d'objections que la théorie de *Werner*. Le *feu central*, base générale de cette hypothèse, est-il lui-même autre chose qu'une hypothèse? Si l'on doit admettre que le globe terrestre ait été originairement fluide et même gazeux, n'est-ce pas par son centre et non par sa surface que la solidification a plus vraisemblablement commencé (Voy. *Chaleur terrestre*)? En supposant que l'inverse ait eu lieu, que la solidification

se soit propagée de la surface vers le centre, comment dans un même filon rencontre-t-on des matières distinctes en contact immédiat, et telles cependant que, si elles avaient jamais été en fusion, elles n'auraient pu manquer de se combiner entre elles, vu leur grande affinité? Comment certaines combinaisons, au contraire, s'y trouvent-elles intactes, alors qu'une température relativement très-faible suffit à leur décomposition dans nos laboratoires? Comment les filons cuivreux, de prétendue origine ignée, contiennent-ils parfois de l'oxide noir de cuivre, qui ne peut éprouver une température élevée sans passer à l'état de protoxide? Comment l'argile, qu'on rencontre si fréquemment dans les filons, pourrait-elle avoir une origine ignée? Comment la silice, qui s'y trouve fort répandue et en présence de bases énergiques, ne s'est-elle point combinée avec celles-ci, comme cela a lieu dans les fourneaux de l'industrie? Comment ces injections métallifères du bas vers le haut, de l'intérieur vers l'extérieur, comment ces sublimations n'ont-elles pas toujours laissé à la surface du sol, et au moins dans le voisinage des affleurements, les traces d'un excédant de remplissage, des matières en excès condensées ou épanchées autour des cratères, à la manière des volcans? Les forces d'expansion centrale se sont-elles donc exactement proportionnées aux espaces qu'elles avaient à remplir, etc.?

De systèmes en objections nous arrivons aux théories modernes. L'une, encore fort vague, tendrait à attribuer la formation des filons à l'influence des courants électriques, aux décompositions énergiques et même aux transports de matières que nous les voyons opérer dans les laboratoires de la science; cette théorie n'est encore qu'à l'état de conjecture. L'autre, enfin, depuis long-temps admise dans l'enseignement, n'est, au fond, que la conciliation de tous les systèmes que nous avons passés précédemment en revue. Je ne saurais la résumer plus fidèlement que par la reproduction du texte même des maîtres de la science. « Quelques filons ont été remplis « de matières fondues qui y ont été injectées; d'autres filons paraissent avoir été remplis par des matières sublimées ou entraînées « par un courant gazeux; d'autres, enfin, paraissent avoir été remplis par des matières tenues en dissolution dans des eaux qui, « peut-être, étaient à une haute température. » C'est avec cette réserve que s'expriment MM. *Dufrenoy* et *Elie de Beaumont*, dans l'introduction à l'explication de la carte géologique de la France.

Je me serais dispensé de résumer ces diverses spéculations dans un ouvrage comme celui-ci, si les conséquences qu'on en a déduites n'étaient imposées au praticien, non pas seulement comme des vérités irréfragables qu'il ne peut ignorer, mais surtout comme des guides infaillibles de l'art d'exploiter les filons, et, de plus, journellement citées comme un exemple des services que le géologue peut rendre au mineur.

Voici donc ces conséquences : lorsqu'un filon a été rempli de haut en bas, par voie aqueuse, par sédimentation, son étendue en profondeur est nécessairement limitée, et il ne s'enfonce généralement qu'à une faible profondeur. Les filons, au contraire, qui ont été formés par voie ignée, par injection du bas vers le haut, par la sublimation des matières vaporisées au foyer souterrain, doivent jouir et jouissent dès lors d'une *continuité indéfinie* dans la profondeur. Le principe de la continuité indéfinie dans la profondeur de ceux des filons qui ont été formés par voie ignée, est un dogme géologique que la science, je le répète, ne permet pas à l'art de mettre en doute, « sous peine de s'anéantir lui-même. » Les travaux de recherche sur cette classe de filons que la science, du reste, ne nous enseigne pas à distinguer toujours nettement des autres, seraient donc bien simplifiés. « Plus de ces puits rapprochés et irrégu-« liers, plus de ces galeries sinueuses des anciens dont la disposition « atteste encore leur ignorance complète des conditions de conti-« nuité des gîtes en direction et en inclinaison (*Traité de l'exploita-« tion des minéraux utiles*). On ne croyait alors à l'existence du mi-« nerai que lorsqu'on le voyait (p. 110). Aujourd'hui, on peut cal-« culer à l'avance à quelle profondeur, à quelle distance, on ren-« contrera un filon par un puits ou une galerie pratiqués dans le « terrain qui le renferme (p. 110) ; malgré les irrégularités des filons, « toutes les fois qu'on aura constaté la direction et l'inclinaison de « l'un d'eux, un travail fait pour aller le recouper en profondeur, « *sera toujours certain* et ne sera exposé qu'aux chances ordinaires « des variations de puissance ou de richesse, sans que la suppression « en profondeur soit jamais à craindre (p. 125). »

A Dieu ne plaise que nous prétendions discuter le principe de la continuité indéfinie des filons formés par voie ignée, puisqu'il est un article de foi; nous ne pouvons cependant nous dispenser de faire remarquer combien, fût ce dogme inattaquable, il contribue peu à assurer notre salut, à nous hommes de pratique, et combien cette révélation géologique est au moins stérile si on ne l'envisage qu'au point de vue de l'exploitation qui doit être le nôtre. Ainsi que l'a déjà démontré *M. Pernollet*, dans un excellent Mémoire inséré aux *Annales des mines de* 1847, et où il s'est montré le digne organe des ingénieurs exploitants, ce qu'il importe à ceux-ci n'est point du tout de savoir si un filon s'étend indéfiniment dans la profondeur, mais uniquement s'il y est *indéfiniment exploitable*, s'il fournira dans la profondeur du minerai *en quantité* et en *qualité* telles que les frais d'exploitation soient au moins couverts. Là, et là seulement est la vraie question, et nulle théorie géologique ne l'a jusqu'à présent résolue. Que si, sur ce point capital, nous demandons au praticien les lumières que le géologue ne saurait encore nous donner, il nous répond, avec prudence, que les filons ne sont pas

moins bizarres et capricieux que les couches; que trop souvent le calcul de la distance à laquelle un percement devait atteindre un gîte, a été déjoué; que les profondeurs ne tiennent pas toujours les promesses des affleurements; que les indices superficiels, que les premiers travaux d'exploration eux-mêmes, n'apprennent rien sur la valeur *commerciale* d'un gîte, la seule à considérer; qu'il faut dès lors que ces travaux d'exploration aient été déjà bien multipliés et bien étendus, avant qu'on puisse songer raisonnablement à l'établissement des grands ouvrages d'avenir qui assureront l'économie de l'exploitation; que la méthode des anciens, qui consistait à marcher pas à pas, est encore celle que préféreront les ingénieurs soucieux du bon emploi des capitaux qu'on leur confie; et qui sait si, avec M. *Pernollet*, il n'ajouterait pas encore que l'application de la géologie à l'art d'exploiter les mines n'existe pas, et que, hormi les *failles*, les géologues n'ont pas jusqu'ici résolu un seul problème d'exploitation, même par approximation. Le paragraphe qui suit confirmera peut-être en partie ces conseils de la pratique.

Accidents des filons. Les filons, aussi bien que les couches, présentent parfois dans leur allure générale, dans leur richesse, dans le mode de distribution des matières utiles, des variations, des écarts, des irrégularités que l'on caractérises, en général, par le nom d'*accidents*. Des couches planes et horizontales se *plissent* et se renversent en zigzags comme les couches de houille des environs de Mons, *fig*. 4, elles se contournent en *selles*, elles se relèvent en *dressans*, formant ainsi ce que l'on appelle dans certains districts, *fond de bateau*, *fig*. 4. Les filons ne sont pas exempts de ces irrégularités; le filon de pyrite de Saint-Bel esquissé, *fig*. 5, en offre un exemple. Les filons, comme les couches, sont encore sujets à des *renflements* et à des *amincissements*, tant dans le sens de la direction que dans le sens de l'inclinaison; lorsqu'il y a série de renflements et d'amincissements, l'allure est dite en *chapelet*. Parfois, l'amincissement croissant progressivement, le toit et le mur arrivent au contact, et la couche ou le filon est momentanément supprimé. Cet accident prend, dans le nord, le nom de *crain* ou de *coufflée*. On croit avoir remarqué que les *crains* étaient plus fréquents dans les couches puissantes que dans celles qui ne dépassent pas un mètre. On retrouve assez fréquemment la couche après une interruption plus ou moins longue, en suivant attentivement la séparation parfois assez bien indiquée du toit et du mur. J'ai ainsi perdu, puis retrouvé la puissante couche de fer spathique d'Ustelegay, après dix-sept mètres de cheminement en direction dans le grès, en 1847. On donne encore, dans certains districts, le nom de *crains* à ce que l'on appelle plus généralement des *failles* (*fig*. 3). Ce sont des espèces de fissures qui traversent le terrain encaissant le gîte, et disloquent celui-ci en rompant sa continuité; lorsque la *faille* est puissante, que ce qu'on

pourrait appeler son toit et son mur sont assez distants, les matières comprises entre ceux-ci sont fréquemment formées de blocs anguleux mêlés et embrouillés, qui a fait donner à l'accident le nom de *brouillage* (*fig.* 5); enfin, les filons sont souvent recoupés par d'autres filons, parfois stériles, qu'on appelle *filons croiseurs* (*fig.* 2). Les *failles*, les *brouillages* et les *croisements* donnent presque toujours lieu à des *rejets* du filon *croisé*; on a essayé dans les *fig.* 2 et 4 d'offrir une idée de ce genre important d'accidents, en vertu duquel le filon ou la couche peuvent être rejetés à droite, à gauche, en haut ou en bas, à des distances parfois très-considérables. La grande couche de houille exploitée à *Newcastle*, par exemple, présente, en allant du sud vers le nord, un rejet qui la relève d'abord de 3m.76, puis un second qui la relève de 10m.97, puis un troisième qui l'abaisse de 27m.20, puis un quatrième qui la relève de 73m.16, puis un cinquième qui l'abaisse de 20m.11, puis un sixième qui l'abaisse de 265 mètres. Comme rejet dans le sens horizontal, on peut citer celui du filon de *Veta grande* au Mexique par le filon de *San Diego*. Bien que ces filons ne se coupent pas sous un angle très-aigu, la distance horizontale qui sépare les deux portions du filon croisé est de 241 mètres. L'école enseigne, d'après *Schmidt*, que, dans ce genre de dislocation, il y a eu le plus souvent glissement du toit du filon croiseur sur son mur suivant la ligne de plus grande pente; elle déduit de cette règle des méthodes plus ou moins faillibles pour retrouver le filon croisé. On prétend aussi que la partie rejetée d'un filon croisé se retrouve le plus souvent du côté de l'angle obtus formé par l'intersection des plans qui se croisent.

Les filons présentent encore parfois de grandes *irrégularités dans le sens de leur direction*. On citera comme exemples pouvant complétement fourvoyer un exploitant sans défiance les filons de Poullaouen, de Huelgoat, ceux de Claustall et de Zellerfeld, ceux de Veta grande au Mexique.

Les filons peuvent aussi offrir de grandes *irrégularités dans le sens de l'inclinaison*.

On cite les filons d'Andreasberg (*pl.* XVI de l'atlas *de la Richesse minérale*). Si, en vue d'aller rejoindre le *Gnade-Gottes* par un puits vertical, à 150 mètres au-dessous de la traverse *mm*, on s'était basé sur la pente régulière des 80 mètres situés au-dessous, on aurait pu descendre indéfiniment sans rien rencontrer. On citera encore, entre autres : 1° le filon exploité dans la mine du prophète Jonas, en Saxe, qui d'une pente de 65 à 70° près du jour, passe à une pente voisine de 90° dans la profondeur; 2° la pente du filon principal de Lorentz-Gegentrüm, en Saxe, qui varie tellement que, d'après Jars et Duhamel, *on ne peut la déterminer*.

Les explorations partielles, suivant la pente du gîte, sont donc

généralement préférables; elles donnent du minerai et révèlent ces déviations.

Comme *irrégularités en direction et en inclinaison* à la fois, *Jars* et *Duhamel* citent le filon de *Besthert-Gluk*.

On ne peut donc déduire avec certitude l'allure d'une portion inconnue d'un filon de l'allure de la portion connue, quelle que soit l'étendue de cette dernière.

Si les filons s'enrichissent quelquefois dans la profondeur, ils s'appauvrissent non moins souvent.

On citera, d'après M. *Burat*, le gîte argentifère de Potosi qui, dans les affleurements, offrait une richesse moyenne au-dessus de 0.0015, laquelle s'est réduite à 0,0004 dans la profondeur. A la Sierra Almagrera, d'après M. *Pernollet*, les travaux n'avaient pas atteint la profondeur de 150 mètres que la richesse du minerai était déjà réduite dans le rapport de 3 à 1. Ainsi que le remarque fort sagement cet ingénieur : un degré d'appauvrissement de plus dans l'un ou l'autre de ces gîtes, et le minerai ne serait plus que de la roche sans valeur; il aurait disparu dans la profondeur pour l'exploitant, sinon pour le géologue. Par conséquent un puits, poussé tout d'abord à la profondeur correspondante, aurait eu le double inconvénient d'induire en erreur sur la valeur intrinsèque du gîte, et de retarder la réalisation des produits.

Ces variations de richesse ont souvent lieu aux passages d'un filon, d'un terrain dans un autre. — Ainsi les filons de plomb du Cumberland, riches dans le calcaire, s'appauvrissent en entrant dans le grès, et deviennent presque stériles dans le schiste.

On prétend assez généralement que les points où les filons se renflent, se bifurquent en plusieurs branches, sont ceux qui sont les plus avantageux, non-seulement en raison de la quantité de minerai, mais en raison de l'élévation de son titre.

La matière des filons, et même des couches, change parfois de nature dans la profondeur. — Ainsi, des carbonates s'y transforment en sulfures, des oxydes de fer sont remplacés par des pyrites, le schiste bitumineux se substitue à la houille; beaucoup de filons du Cornwall, exploités autrefois comme mines d'étain près de la surface, le sont aujourd'hui à de grandes profondeurs comme mines de cuivre; ainsi, aux oxydes d'étain de la surface succèdent les pyrites de cuivre dans la profondeur.

Enfin, il y a des exemples de tentatives infructueuses pour retrouver des minerais à certains niveaux.

On citera entr'autres l'ensemble des filons de plomb et argent de *Hummelfurst* (*pl.* XIII de l'*Atlas* de *Heron de Villefosse*). Avant 1815, les travaux avaient atteint la profondeur de 300 mètres; le massif principal faisait défaut dans les cent derniers mètres, les massifs latéraux avaient manqué à une profondeur moindre encore. Depuis

1815, le niveau moyen des exploitations est arrivé entre 300 et 400 mètres sans amélioration de cette mine importante, « et il paraît bien prouvé, d'après M. *Pernollet*, que ce n'est pas seulement « en un point que le minerai *semble* disparaître, mais que c'est bien « réellement sur toute l'étendue du développement horizontal de « 4000 mètres que les filons de *Hummelfurst* présentent. »

Evaluation pratique des chances de succès d'une exploitation naissante.

En Saxe, d'après *d'Aubuisson*, sur plusieurs centaines de filons traversés dans la partie sud du district de *Freyberg*, il n'y en a peut-être pas deux assez riches en métal pour suffire aux frais d'une exploitation.

Un demi-siècle avant l'époque où *d'Aubuisson* écrivait, *Jars* et *Duhamel* avaient constaté que, sur 193 mines exploitées dans ce même district, et 31 dont le travail était suspendu, 11 seulement donnaient des produits supérieurs aux dépenses, 19 étaient au pair, toutes les autres étaient en perte, fait dont on déduit $\frac{11}{224}$ pour la probabilité de bénéficier, $\frac{30}{224}$ pour la probabilité de ne pas perdre.

Passant en revue tous les filons de cette même localité qui, depuis six siècles, ont, à différentes époques, donné des produits notables, *M. d'Aubuisson* n'en trouve que 42 sur 900; d'où, en supposant que ces produits aient donné eux-mêmes des bénéfices, $\frac{42}{900}$ pour la probabilité de gagner.

Dans le Hartz, *Jars* trouvait que, sur 50 mines qui étaient exploitées vers 1776, on n'en comptait que 2 qui fussent en bénéfice, et 1 qui payait ses frais; d'où probabilité de béneficier $= \frac{2}{60}$, et probabilité de ne pas perdre $\frac{3}{60}$.

En France, sur près de 500 gîtes reconnus ou exploités à différentes époques pour plomb, cuivre, argent ou or, sans parler des autres métaux, 25 au plus subsistent aujourd'hui : les autres ont été abandonnés après avoir donné lieu à des dépenses plus ou moins considérables; d'où $\frac{25}{500}$ pour la probabilité de gagner, en supposant encore que les 25 gîtes exploités donnent des bénéfices.

Si, comme le remarque M. *Pernollet*, on était disposé à attribuer l'abandon de ces gîtes à l'ignorance prétendue des anciens, aux guerres civiles ou à d'autres causes étrangères à la valeur intrinsèque des gîtes, il suffirait de remarquer que, pendant ces vingt dernières années, sur 50 concessions obtenues après rapports favorables des ingénieurs de l'Etat, 2 seulement donnent des produits, savoir : Pont-Gibaud dans le Puy-de-Dôme, et Lacoste dans le Gard; d'où $\frac{2}{60}$ pour la probabilité de bénéficier sur l'exploitation des gîtes de plomb, cuivre, argent ou or.

Résumé. Sur vingt et un filons qu'on s'est décidé à fouiller, un seul a été profitable!

FILTRATIONS. *Voyez* INFILTRATIONS.

FLOTS DE FOND. M. le colonel *Emy* a désigné sous ce nom des masses d'eau en forme de segments qui s'avanceraient sur le fond de la mer conduites par les oscillations de sa surface.

Les flots de fond ne se produisent que lorsqu'il y a un ressaut du fond. Conduits par l'ondulation jusqu'à la limite de la mer, ils s'avanceraient sur la grève avec toute la vitesse qu'ils ont acquise par la pression continuelle des ondes supérieures.

C'est à des flots de fond que M. le colonel *Emy* attribue la cause de ce jet majestueux qui enveloppe le phare d'Édystone, et le dépasse de plus de 25 mètres pendant la tempête, et celle de plusieurs phénomènes du même genre.

Les flots de fond seraient encore la cause d'un effet bien connu des habitants des côtes, sans qu'on en ait donné d'explication satisfaisante. *La mer*, dit-on, *rejette tout ce qu'elle a englouti*, c'est que les flots de fond, en roulant sur le fond de la mer, se succèdent continuellement, et agissant toujours et toujours dans le même sens, draguent et entraînent tous les objets mobiles qu'ils rencontrent et les poussent au rivage, même lorsque la marée descend.

A l'appui de sa théorie des flots de fond, M. *Emy* cite encore les faits suivants :

Si, pendant que la mer baisse, on y jette deux sphères de liége, l'une d'elles étant chargée en son centre d'un noyau en plomb d'un poids suffisant pour la faire couler à fond, on verra, pourvu qu'il y ait des ondes bien formées et un brisement au rivage, la plus légère sphère surnager et obéir au seul mouvement d'ondulation, sans s'éloigner ni s'approcher sensiblement de la terre, tandis que la sphère plombée et coulée à fond est roulée sur le lit de la mer et poussée au rivage.

Dans les parages où les plus fortes ondes ne peuvent point atteindre les ressauts du fond pour former les flots de fond, les objets coulés restent éternellement submergés. Partout ailleurs, dès qu'il y a des flots de fond, les objets naufragés sont infailliblement rejetés à la côte, à moins que leur forme ou leur poids n'empêche les flots de fond de leur faire remonter des ressauts trop élevés contre lesquels ils sont alors arrêtés. Voyez l'explication de plusieurs autres phénomènes intéressants au traité du *Mouvement des ondes* de M. le colonel *Emy*.

FLUORURES. Un moyen facile et certain de reconnaître les plus petites quantités de fluorures métalliques à l'état solide, consiste à verser dessus de l'acide sulfurique concentré, et à chauffer le tout dans un creuset de platine; il se dégage alors de l'acide hydrofluorique dont les plus petites traces se décèlent par l'action corrosive qu'elles exercent sur le verre.

FLUX ou FONDANTS. Réactifs qui facilitent la liquéfaction des gangues dans les essais par la voie sèche, ou dans le traitement en grand des minerais, et qui permettent ainsi au métal de se séparer, en vertu de son plus grand poids spécifique, des matières étrangères auxquelles il est associé.

La soude, la potasse, la chaux, leurs carbonates, le BORAX et quelques flux complexes sont les fondants les plus employés dans les essais en petit.

Les carbonates alcalins, destinés à ces essais, doivent être préalablement calcinés, puis réduits en poudre et passés au tamis de soie; on les conserve à l'abri de l'humidité dans des flacons bien bouchés.

La proportion des fondants à employer dans les essais en petit est, pour une partie de gangue à liquéfier, de moitié environ de son poids de carbonate de soude ou de potasse, et les $\frac{3}{4}$ de ce poids si le fondant est le carbonate de chaux. En général, on ne doit pas redouter un excès de fondant.

Les anciens chimistes faisaient un grand emploi de flux plus ou moins complexes; les docimasistes modernes n'en ont guère conservé que le flux *blanc* et le flux *noir*, dont je rappelle la préparation :

Flux blanc. Faire détonner un mélange intime de deux parties de nitre et une partie de crème de tartre, le résidu est le flux blanc; c'est un carbonate de potasse, contenant quelques centièmes de carbonate de chaux, provenant du tartrate de chaux que le tartre renferme toujours, d'après M. Berthier.

Flux noir. Mélanger entièrement deux parties au moins de crème de tartre et une partie de nitre ; — placer le mélange dans un vase de fer ; — y mettre le feu ; — laisser brûler tranquillement ; — le résidu est le *flux noir* ; — on le broie ; — on le passe au tamis de crin serré pendant qu'il est encore chaud, et on le conserve, pour l'emploi, dans un flacon bien bouché, à l'abri de l'humidité. — On fait un grand usage de ce flux dans les essais de plomb et de cuivre. Ce ne serait, d'après M. Berthier, que du carbonate de potasse mêlé à quelques centièmes de carbonate de chaux et de charbon extrêmement divisé.

Le carbonate de chaux, sous le nom de *castine*, ou la chaux en nature, sont, parmi les fondants ci-dessus, les seuls que leur bas prix permettent d'employer dans les grandes opérations métallurgiques. La théorie de l'action des fondants est encore trop obscure pour pouvoir guider la pratique avec sécurité, et dans le travail des hauts-fourneaux surtout, ses prescriptions, quant à la nature et quant à la proportion des fondants, ne doivent jamais prévaloir contre les anciens usages. Que si quelque notable économie devait résulter d'une modification dans le dosage d'un fondant, ce ne serait que par des essais dans le haut-fourneau même, qu'elle devrait être tentée ; et en conduisant ces essais avec prudence et une sage lenteur, ils ne pré-

senteraient aucun danger, et ils décideraient nettement la question sans appel. Les essais au creuset brasqué n'enseignent rien ni sur la nature ni sur la proportion des fondants à employer dans un haut-fourneau, et les docimasistes qui préconisent ce mode d'essai confondent deux appareils qui n'ont entre eux qu'une ressemblance fort éloignée.

FOIN. Dans une note intéressante, publiée en 1848, M. le colonel *A. Morin* a montré comment, à l'aide de presses convenablement manœuvrées, les foins gros et durs pouvaient être condensés au point de peser, hors de presse, 350 kil. le mètre cube, et les foins tendres, 440 kil.; il calcule que la main-d'œuvre, les bandelettes de fer, les boulons, planchettes, et l'entretien des presses, porteraient, en France, le prix du pressage à 0 fr. 75 par quintal métrique de foin amené à la densité ci-dessus. Cette extrême densité diminue notablement les frais de tranports des foins, soit par mer, soit par les chemins de fer; elle réduit, à peu près au quart, la capacité des magasins destinés à leur conservation, et dans une proportion correspondante les dépenses de construction. Enfin, des expériences dirigées par M. *Morin*, et faites sur une grande échelle, ont montré que, soumis à cette grande compression, les foins ne brûlaient plus qu'à la surface des bottes, presque sans flamme, et que, même après une heure de feu, une pompe à incendie pouvait, en quinze à seize minutes, éteindre la combustion de 2000 kil. de foin.

La ration d'un cheval étant d'environ 5 kil. de foin par jour, on voit que son approvisionnement, pour une année, peut être réduit à un volume de 5 mètres cubes. A l'état de bottes ordinaires, le foin, empilé dans les greniers, ne pèse que 80 à 90 kil. le mètre cube; en petites meules de 6 à 7000 quintaux métriques, 76 kil.; en meules deux fois plus considérables, 92 kil. (*Voyez note sur le pressage du foin, par A. Morin.*)

FONCTION. De quelque manière qu'une quantité x dépende d'autres quantités p q...., on dit que x est *fonction* de ces quantités, et l'on exprime, en général, cette dépendance par des notations de ce genre :

$$x = f(p, q..) \quad x = F(p, q..) \quad x = \varphi(p, q..)$$

f, F, φ indiquent des fonctions différentes les unes des autres; des modes de dépendance distincts de mêmes quantités.

$$x = f(m, n) \qquad \text{et } z = f(p, q..)$$

indiqueraient au contraire que les quantités x et z dépendent de la même manière de quantités différentes m et n, p et q; x et z sont *la même fonction* de quantités différentes.

$m^2 - 2mn + 1$ est dite *fonction implicite* de m et n, parce que ces quantités sont mêlées ensemble.

Au contraire, $m = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$ serait une *fonction explicite* de n, parce que les inconnues sont séparées.

Les *fonctions* sont *algébriques*, quand les calculs ne comportent que des opérations d'algèbre, jusques et y compris les extractions de racines.

Elles sont *transcendantes*, quand elles renferment des logarithmes, des exposants inconnus, des sinus des cosinus, etc., etc. On n'énonce ordinairement, dans une fonction, que celles des lettres qui y entrent auxquelles on veut avoir égard, d'après le but qu'on se propose.

FONDATIONS ou FONDEMENTS. Bases souterraines et artificielles d'une construction, destinées à assurer la parfaite stabilité de celle-ci. En général, ce but sera atteint : 1° lorsque le sol sur lequel les fondations reposent sera par lui-même résistant et incompressible, ou aura été rendu tel ; 2° lorsque les résultantes de tous les efforts supérieurs couperont successivement tous les lits de la fondation, sans en éviter aucun, et ce, en dedans de sa propre masse ; 3° lorsque, enfin, les directions de ces résultantes successives formeront, avec les normales à ces lits et au sol, des angles plus petits que les angles de frottement ou de glissement des matériaux en contact. On verra, au mot *Stabilité*, comment les matériaux, dans toute construction, peuvent être disposés pour satisfaire à la deuxième et à la troisième condition ; nous ne nous occuperons ici que des moyens pratiques usuellement employés pour fonder.

Étude du sous-sol. La reconnaissance du sous-sol s'opère, soit par des sondages, soit par des puits, soit par des tranchées, poussés en profondeur jusques aux terrains *vierges*. Il ne faut pas négliger d'y joindre les renseignements que l'on obtiendra toujours facilement des ouvriers et des habitants de la localité, sur le genre de défauts de ces terrains, ainsi que sur les divers moyens qu'on aura pu employer pour y porter remède ; il conviendra d'ailleurs de contrôler ces renseignements par un examen attentif de l'état des plus anciennes constructions locales. La reconnaissance matérielle du sous-sol doit toujours s'étendre en surface un peu au delà des limites du projet ; et, si ce projet avait une grande importance, il serait prudent de s'assurer, par quelques trous de sonde poussés à une bonne profondeur, s'il n'existe point de bancs d'argile ou de marne au-dessous du roc ferme qu'on aurait d'abord rencontré.

Le terrain étant résistant et incompressible, du roc dur par exemple, on creuse la tranchée des fondations de la profondeur et de la largeur fixées au projet, y compris l'empattement ; on enlève les parties supérieures du roc qui auraient pu être décomposées par les eaux pluviales. — On pique le roc vif à coups de marteau têtu,

enfin, si le terrain est très-mauvais, on pourra encore ficher, dans les angles de chaque cellule du grillage, un ou deux pieux de remplage diagonalement posés. Alors on remplira les cases de gros quartiers de pierre, puis d'une bonne maçonnerie, sur laquelle on s'établira définitivement. Quelques praticiens recommandent encore de couvrir le grillage par une plate-forme de madriers jointifs qui sert alors de base à la fondation ; d'autres considèrent cette dépense comme inutile quand le terrain est assez sec.

Le terrain étant hanté par les eaux vives, on établit un batardeau autour de l'enceinte des fondations, et si le sous-sol n'est pas perméable, on fait la vidange des eaux et l'on fonde d'après la nature du sous-sol. Si les sources viennent du fond, on les étouffe en y jetant des boules d'argile sèche mêlées de pierres ; — des sacs remplis de glaise ; — de la chaux maigre vive, mélangée de mortier, et ces moyens ne réussissant pas, on drague le fond, on le nivèle, et l'on étouffe les sources par une couche de béton d'une épaisseur suffisante, étendue sur toute la surface du fond. Si l'on craignait l'irruption des eaux du dehors et l'affouillement du pied de la fondation, on le contre-garderait par des pilots et palplanches de bordage, en avant desquels on établirait encore un *parafouille* en béton et en enrochements.

Les murs qui peuvent être affouillés par le pied, les murs de quai par exemple, s'établissent habituellement sur un grillage en bois de chêne, porté lui-même par de longs pilots, dont la rangée extérieure est inclinée vers le dehors. Ces pilotis sont eux-mêmes protégés par un enrochement qu'on recharge jusqu'à ce qu'il cesse de s'affaisser.

Le terrain étant couvert par les eaux, la fondation devant être celle d'une pile de pont par exemple, voici, d'après *Perronnet*, le résumé des opérations à exécuter :

Planter autour de la base de l'ouvrage à fonder, et à 4^{m} de distance, la file intérieure des pieux de batardeau, au moyen de sonnettes portées sur des radeaux ; — planter une file parallèle à la première à une distance telle que, en nommant D cette distance et $(3+m)$ mètres la hauteur d'eau à supporter, on ait $D=3+0.32m$. Les pieux de batardeau doivent être enfoncés au refus de $0^{m}.025$ par volée, pénétrer de $1^{m}.50$ et être espacés de $1^{m}.30$; — réunir ces pieux par des liernes et des entretoises ; — placer des panneaux dans l'intérieur des files et renforcer les panneaux à mesure que le draguage avance ; — remplir le coffre du batardeau de terre franche ou de terre végétale, mélangée de $\frac{1}{20}$ de chaux hydraulique en pâte ; — placer les machines à épuiser, et disposer des auges en bois pour l'écoulement des eaux ; — faire l'épuisement ; — déblayer le terrain vaseux et trop mobile ; — enfoncer les pieux de fondation ; — les recéper à la hauteur convenable ; — poser le grillage ; — en remplir les cases de terre grasse, de maçonnerie sèche, de maçonnerie hy-

draulique ; — clouer la plate-forme ; — élever les fondations jusqu'au niveau des hautes eaux ; — démolir le batardeau (*voyez* Ardant, *Cours de construction*).

Les épuisements étant parfois trop dispendieux, parfois même impossibles, on fonde, sans épuiser, par diverses méthodes dont l'objet général consiste à *relever* le plan de la fondation proprement dite. On atteint ce but tantôt par un massif de béton, tantôt par un pilotis avec enrochements intercalaires. M. Deschamps, au pont de Bordeaux, a de plus assuré la stabilité individuelle des pilotis enrochés de chaque pile par un enrochement général courant d'une pile à l'autre, tout en travers du fleuve et, avant de procéder à la construction des arches, il a chargé chaque pilotis d'un poids d'essai de beaucoup supérieur aux charges permanentes et éventuelles qu'il devait porter. Enfin, on fonde encore à l'aide de *caissons* en charpente, bien calfatés, qu'on échoue sur place, en élevant la maçonnerie des fondations sur leur propre fond comme sur une plate-forme ; mais je renvoie aux mémoires spéciaux des Labélie, Decessart, Perronet, etc., pour le détail de ces méthodes.

Fondations sur sable. Elles conviennent aux mauvais terrains, à la condition qu'ils ne soient pas hantés par les eaux vives. On creuse la tranchée, y compris un bon mètre de largeur d'empattement ; on la remplit de sable qu'on tasse par couche de niveau de 0m.20 à 0m.30, la profondeur totale de la couche de sable devant avoir 1m,50 à 2m,00. On l'immerge pendant trois jours ; et, quelquefois, on recouvre le tout d'une plate-forme en bois. A l'hôpital de Bayonne, on n'a point fait usage d'une plate-forme, et les premières pierres de la fondation ont été posées sans mortier sur le sable recouvert de 0m.03 à 0m.04 d'eau. Le radier de sable avait 2 mètres de profondeur, il dépassait l'aplomb des murs de 1m.50, et la tranchée a été remplie d'eau avant qu'on y jetât le sable. Quelques fissures se sont déclarées dans les bâtiments, la partie de droite a tassé de 0m,04 à 0m,06, ce qui a donné naissance à une lézarde qui a obligé de reconstruire six fenêtres de la façade. (*Voyez* les Mémoires de MM. Moreau et Niel dans le *Mémorial du génie*).

Les bassins des réservoirs d'eau de l'avenue de Ménilmontant ont également été fondés sur sable par M. *Mary*. Le massif de sable d'une profondeur de 2m.50 a été bien humecté et brassé à mesure qu'on le posait ; il est, en outre, contenu par des murs en maçonnerie de moellons de 1 mètre d'épaisseur, descendus à 1 mètre en contre-bas de la couche de sable.

Il doit paraître évident que, dans la pratique, on ne rencontrera pas toujours des terrains rentrant exactement dans les classifications que nous avons admises. Il y aura lieu alors de combiner entre eux les divers procédés, que nous avons sommairement rappelés, suivant

la nature complexe des sols, de les modifier même au besoin, en tenant compte de la qualité des matériaux dont on peut disposer, de la durée présumée de la construction, de sa destination, du temps alloué pour l'édification et surtout de la dépense. « Ce n'est que sur « les lieux, disait très-sagement Bélidor, qu'on peut s'apercevoir « des différentes pratiques dont on sera obligé de se servir, et alors « la nécessité, avec un peu de génie, fournissent mille moyens pour « surmonter les obstacles à mesure qu'ils se présentent. Si je voulais « rapporter toutes les différentes manières de fonder, selon les « occasions qui se peuvent présenter, je ne finirais jamais. »

FORCES. 1. Efforts dont l'intensité est toujours mesurable par un poids, et exprimable dès lors en kilogrammes.

2. L'exercice d'une force implique nécessairement la réaction d'une autre force contraire et précisément égale ; ce que Newton exprimait en disant que l'action est toujours égale et de signe contraire à la réaction. Pour qu'un ressort puisse être pressé par une force de dix kilogrammes, il faut bien que son élasticité réagisse en sens contraire avec le même effort ; — et, lorsqu'un corps suspendu à un fil a déterminé la rupture de celui-ci, quelque grand que le poids du corps puisse être, il ne saurait avoir exercé sur le fil un effort supérieur à celui qui suffit pour le rompre.

3. Le principe de l'action et de la réaction est tout à fait général ; il s'applique donc encore au cas où une seule force agit sur un corps entièrement libre d'ailleurs, mais la réaction du corps est alors ce qu'on nomme sa *force d'inertie.*

4. *Loi de l'inertie.* L'inertie est cette passivité de tous les corps en vertu de laquelle ils tendent à conserver éternellement et la grandeur et la direction de la vitesse qu'ils ont une fois acquise, nul corps purement matériel ne pouvant de lui-même modifier son état de mouvement ou de repos. Toute modification dans l'état ou le mouvement actuel d'un corps, toute variation dans l'intensité ou la direction de sa vitesse suppose donc l'action d'une force ; l'intensité de la réaction ou résistance que son inertie oppose à cette variation, est précisément la *force* d'inertie du corps (*vis insita*), et, comme toutes les autres forces, elle s'exprime en kilogrammes.

5. La *force* d'inertie ne préexiste pas dans le corps qui va réagir contre l'action d'une force modificatrice ; elle ne se développe que sous l'action de celle-ci, et l'intensité de l'une croît alors en même temps que celle de l'autre. Prenons pour exemple le cas du choc de deux corps libres, dont l'un serait au repos ; les forces d'inertie, mises en jeu à partir du moment du contact, pourront être justement assimilées aux tensions d'un ressort interposé entre eux ; par l'une de ses extrémités, ce ressort opposerait aux pressions différentes et successives du corps choquant des réactions précisément égales à leurs

intensités, réactions qui naîtraient, grandiraient, diminueraient et s'éteindraient avec celles-ci; par l'autre extrémité, le ressort transmettrait au corps choqué les mêmes efforts qu'il a détruits dans le corps mobile, de sorte que le ressort ou l'inertie est comme le canal par lequel les forces du corps choquant s'écoulent dans le corps choqué, et l'animent progressivement aux dépens de l'activité du premier.

6. *La durée de la transmission* des forces n'est jamais nulle; un temps quelquefois très-court (28), mais toujours appréciable, s'écoule entre l'instant où une force commence à agir sur un corps matériel et celui où le corps obéit; et les *forces instantanées* sont des fictions que des ingénieurs n'ont jamais à considérer que comme des concepts qui peuvent quelquefois faciliter et abréger les démonstrations.

7. *Mouvement uniforme.* Si nous suivons le corps choqué du § 5, à partir du moment où toute action, et dès lors toute réaction, ont cessé entre lui et le corps choquant, et si nous le supposons alors entièrement libre, il paraîtra évident que, ne pouvant modifier de lui-même ni sa direction, ni la vitesse qu'il a acquise, il devra se mouvoir éternellement en ligne droite avec cette même vitesse que nous appellerons u, c'est-à-dire qu'il tendra à parcourir toujours des espaces égaux x dans des temps égaux t, de sorte que son mouvement ultérieur, nécessairement *uniforme*, serait exprimé par les relations

$$u=\frac{x}{t}\ \ldots\ x=ut\ \ldots\ t=\frac{x}{u}\ \ldots\ldots\ (1)$$

8. *Vitesse.* Nous appelons proprement *vitesse* d'un mobile, la longueur, le chemin rectiligne exprimé en mètres, qu'il *tend* à parcourir en une seconde.

Dans le mouvement uniforme, la valeur de la vitesse est donc le quotient du nombre quelconque x de mètres que le corps libre décrira en un nombre t de secondes, divisé par ce nombre t; et un mouvement uniforme ne se distingue d'un autre mouvement uniforme que par la grandeur de ce quotient.

Le rapport $\frac{x}{t}$ restant constant dans un même mouvement uniforme, quelque grands ou quelque petits que soient les temps et les espaces correspondants, on peut encore prendre pour l'expression générale de la vitesse dans ce genre de mouvement le quotient $\frac{dx}{dt}$ de l'espace dx que parcourra le mobile dans l'élément du temps dt, divisé par cet élément, et poser

$$u=\frac{dx}{dt}\quad \text{d'où}\quad dx=udt\ \ldots\ dt=\frac{dx}{u}\ \ldots\ (2)$$

9. *Mouvement varié.* On dit que le mouvement d'un mobile est varié, lorsque la durée de ce mouvement étant partagée en instants égaux et infiniment courts dt, les espaces de, de', de'' . . . qu'il tend à parcourir pendant chacun de ces instants successifs, sont inégaux. Un mouvement *varié* n'est donc rien autre chose qu'une succession, parfois très-rapide, de mouvements uniformes différents, et, dès lors, pour chacun de ces instants dt, les vitesses du mobile ont la même expression générale que ci-dessus (2)

$$v = \frac{de}{dt} \qquad v' = \frac{de'}{dt} \qquad v'' = \frac{de''}{dt} \; . \; . \; . \; (2)$$

10. *Loi de la proportionnalité entre les forces et les variations de la vitesse.* Lorsqu'un même corps est successivement soumis pendant des temps égaux à l'action de deux forces d'intensités différentes, les accroissements de sa vitesse sont proportionnels aux intensités des forces. Cette loi, qui paraît avoir été entrevue ou soupçonnée par les anciens, a été mise en évidence et complétement démontrée par les expériences de Galilée, vers l'année 1638.

Le mode d'expérimentation de Galilée consista à laisser descendre le long de plans inclinés, de 5 à 6 mètres de hauteur, des sphères d'une grande densité. Quoiqu'il n'eût à sa disposition que des moyens assez imparfaits de mesurer le temps, bien que la résistance de l'air, le frottement de roulement et la rotation même des sphères contribuassent à masquer la loi du mouvement, son génie sut opposer l'une à l'autre ces causes d'erreur, les atténuer, en tenir compte, et saisir enfin la loi du phénomène qui est devenue depuis la base fondamentale de toute la mécanique. On savait déjà, au temps de Galilée, que la *force* qui tend à faire descendre un corps le long d'un plan incliné égale la fraction du poids P de ce corps exprimée par le rapport $\frac{h}{l}$ de la hauteur à la longueur du plan. Indépendamment de toute théorie antérieure, une expérience aussi facile et aussi incontestable qu'une *pesée* ordinaire eût d'ailleurs démontré le *fait*. Il suffisait donc, pour faire varier la force mouvante d'une sphère d'un poids connu, de faire varier l'inclinaison du plan le long duquel elle descendait; de sorte, par exemple, que les forces mouvantes étaient successivement un dixième, un vingtième, un centième du poids de la sphère, lorsque les longueurs du plan incliné étaient égales à dix fois, vingt fois, cent fois sa hauteur, la force mouvante étant nécessairement *constante* pendant toute la durée d'une même descente, aussi bien que le poids à mouvoir. Ses expériences le conduisirent au résultat suivant, pour toutes les inclinaisons des plans, pour toutes les intensités des forces mouvantes et résistantes, et pour toutes les durées du mouvement :

11. *Les espaces parcourus sous l'action continue d'une force constante sont proportionnels aux carrés des nombres de secondes écoulées depuis le commencement de la descente.*

A la fin de la première seconde, l'espace parcouru est $\frac{1}{2} g \frac{h}{l}$.

La valeur de la constante g a été déterminée depuis avec plus d'approximation qu'il n'était permis à Galilée de le faire, et trouvée égale à 9m.80896 par Borda, à la latitude de Paris.

12. Il est facile de voir que la proportionnalité entre les forces et les accroissements de vitesse résulte de cette loi.

Soient en effet, h et l, h' et l' les hauteurs et longueurs respectives de deux plans inclinés différents, sur lesquels un même corps de poids P descend successivement, en partant du repos. Soient encore e, e' les espaces parcourus par ce corps sur chacun de ces plans, après un même nombre de secondes t; désignons enfin par F et F' les forces constantes qui agissent sur le poids P, pour le faire descendre le long des plans, nous avons

$$F = P\frac{h}{l}; \quad F' = P\frac{h'}{l'} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{P} = \frac{h}{l}; \quad \frac{F'}{P} = \frac{h'}{l'}$$

et les expériences de Galilée donnant directement pour les espaces parcourus

$$e = \frac{1}{2} g \frac{h}{l} t^2 \quad \ldots (3) \ldots \quad e' = \frac{1}{2} g \frac{h'}{l'} t^2$$

il vient, par substitution

$$e = \frac{1}{2} g \frac{F}{P} t^2 \quad \ldots (4) \ldots \quad e' = \frac{1}{2} g \frac{F'}{P} t^2.$$

Ces relations ayant lieu, quelque petits que soient les temps et les espaces, on a (2) après un temps t quelconque, en passant aux limites

$$\frac{de}{dt} = v = \frac{gF}{P} t \quad \ldots (5) \ldots \quad \frac{de'}{dt} = v' = \frac{gF'}{P} t$$

$$dv = \frac{gF}{P} dt \quad \ldots (6) \ldots \quad dv' = \frac{gF'}{P} dt$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \varphi = \frac{gF}{P} \quad \ldots (7) \ldots \quad \frac{d^2e'}{dt^2} = \frac{dv'}{dt} = \varphi' = \frac{gF'}{P}$$

13. La relation (6) démontre donc que la loi de la proportionnalité entre les forces constantes F, F' et les accroissements de vitesse dv, dv' qu'elles font naître dans le même corps, pendant un même élé-

ment de temps dt, n'est point une hypothèse scientifique, mais qu'elle se déduit par le raisonnement de l'expérience elle-même, dont les praticiens ne recusent pas du moins les enseignements.

14. En soumettant à des forces mouvantes égales $F'=F$ des sphères de poids différents P P' pendant un même temps t, ce qui revient à laisser descendre les sphères P P' pendant ce même temps, le long de deux plans inclinés, tels qu'on ait

$$F=\frac{h}{l}P=\frac{h'}{l'}P'=F' \quad \text{ou} \quad \frac{h}{l}=\frac{F}{P} \quad \text{et} \quad \frac{h'}{l'}=\frac{F}{P'}$$

on obtiendrait, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\frac{du}{du'}=\frac{P'}{P}\ \ldots\ (8).\ \ldots\ \text{et}\ \frac{du'}{dt}=\gamma'=\frac{gF}{P'}$$

15. C'est-à-dire que, *lorsqu'une même force constante* F *agit successivement sur deux corps de poids différents, elle leur imprime, dans l'élément du temps* dt, *des accroissements de vitesse* du, du', *qui sont en raison inverse de ces poids* P' P.

16. *Accélération.* Les mécaniciens nomment *accélérations* les quotients $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$ de l'accroissement de la vitesse divisé par l'élément du temps, et les géomètres appellent ces mêmes rapports *forces* accélératrices. Il est évident que ces quantités ne sont point des *forces* (1); que ce sont des longueurs exprimables en mètres, de même que la constante $g=9^{m}.80896$; ce sont les accroissements de vitesse que recevront, *en une seconde*, les poids P P P', quand les forces constantes F F' F, qui sollicitent ces poids, pourront agir sur eux pendant toute cette durée. La forme des valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$ montre que l'*accélération* est toujours égale à la fraction de la constante g exprimée par le rapport du poids mouvant au poids résistant (27). L'accélération est dès lors constante, lorsque ces poids sont eux-mêmes constants; elle varie au contraire avec les intensités F, F' de la force mouvante (équation 7), le poids P à mouvoir demeurant le même.

17. *Accroissements de vitesse*; *mouvement uniformément varié.* Il importe de ne pas confondre ces accélérations $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$ avec dv, dv', du'. Nous venons de dire que les accélérations exprimaient les sommes $\varphi\ \varphi'\ \gamma'$ de tous les accroissements de vitesse que le mobile acquerrait *pendant une seconde*; dv, dv', du' sont bien aussi des accroissements de vitesse, mais ce sont ceux-là seulement qui seront acquis durant l'élément de temps dt. Ils sont eux-mêmes les élé-

ments des vitesses finales v v' u', acquises (équat. 5) après un nombre t de secondes. — Lorsque le poids à mouvoir et la force mouvante sont l'un et l'autre constants (équat. 6), les accroissements de vitesse dv sont *égaux* pour chacun des instants dt du mouvement; ce qui fait dire que ce mouvement est *uniformément varié*. Les forces mouvantes F F′ agissent donc sur le mobile P, à chacun des instants du mouvement, comme s'il était en repos, et la vitesse, qu'il peut avoir acquise à un instant quelconque, n'influe pas sur la grandeur de l'accroissement de vitesse qu'il reçoit dans l'instant suivant.

18. *Vitesses finales ou acquises*. Dans le mouvement uniformément varié, les vitesses finales ou acquises v v' (*éq.* 5) sont les sommes des accroissements *égaux* de vitesse accumulés dans le mobile depuis l'origine du mouvement, et sont dès lors proportionnelles au nombre t des secondes écoulées depuis cette origine. Leurs valeurs générales $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ expriment, ainsi que nous l'avons dit plus haut, les nombres de mètres que le mobile *tend* à parcourir en une seconde, à partir du moment où les vitesses finales v v' lui sont acquises. Les vitesses finales v v' acquises par un même poids P à la fin d'un même temps t, croissent (*éq.* 5) avec les intensités F F′ de ces forces mouvantes.

19. *Chemins parcourus*. En introduisant dans les équations (4) les vitesses finales v v' (5), il vient

$$e = \tfrac{1}{2}\, v\, t \quad . \; . \; . \; (9). \; . \; . \; . \quad e' = \tfrac{1}{2}\, v' t$$

Ces relations montrent que les chemins parcourus dans la direction de forces *constantes* qui ont agi d'une manière continue sur un mobile pendant le temps t, à partir du repos, sont le produit de ce nombre de secondes par la moitié des vitesses finales. On a donc aussi pour le cas du mouvement uniformément varié

$$v = \frac{2e}{t} \quad . \; . \; . \; (10). \; . \; . \; . \quad t = \frac{2e}{v}$$

de sorte que la vitesse acquise à la fin de la première seconde est le double de l'espace que le mobile a déjà parcouru dans la direction de la force mouvante.

20. Voici, au reste, un tableau général des formules qui régissent le mouvement uniformément varié qui résulte de l'action continue d'une force constante F sur un corps libre dont le poids est P; t étant toujours la durée de l'action de la force, e est l'espace parcouru à partir du repos à la fin du temps t, et v la vitesse acquise à ce même instant.

$$e = \frac{F}{P}\frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}\frac{P}{F} = \frac{v^2}{2\varphi} = \frac{1}{2}\varphi t^2 = \frac{1}{2}vt \ldots\ldots (11)$$

$$v = \frac{F}{P}gt = \sqrt{2ge\frac{F}{P}} = \sqrt{2\varphi e} = \varphi t = \frac{2e}{t} \ldots (12)$$

$$t = \frac{P}{F}\frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2e}{g}\frac{P}{F}} = \frac{v}{\varphi} = \sqrt{\frac{2e}{\varphi}} = \frac{2e}{v} \ldots (13)$$

$$\varphi = g\frac{F}{P} = \frac{v}{t} = \frac{2e}{t^2} = \frac{v^2}{2e} = v\sqrt{\frac{g}{2e}\frac{F}{P}} \ldots (14)$$

$$F = \frac{P}{g}\frac{2e}{t^2} = \frac{Pv^2}{2ge} = \frac{P\varphi}{g} = \frac{Pv}{gt} = \frac{\varphi^2}{v^2}\frac{P}{g}2e \ldots\ldots (15)$$

Ces formules se déduisent directement des résultats obtenus ci-dessus.

21. *Masse.* On a fait des rapports $\frac{P}{g}$, $\frac{P'}{g}$ qui entrent dans un grand nombre de ces formules des quantités mécaniques d'une espèce particulière qui ont reçu le nom de *masses* (27). Nous continuerons à employer cette expression abrégée, et nous aurons par convention ou définition

$$\frac{P}{g} = M \quad \text{d'où} \quad P = Mg \ldots (16) \ldots \frac{P'}{g} = M' \quad \text{d'où} \quad P' = M'g$$

M, M′ seront dites les masses respectives des poids P P′, et ceux-ci deviennent alors les produits des masses M M′ par l'accélération g due à L'ATTRACTION terrestre.

La masse d'un corps est souvent considérée comme la *quantité de matière* qu'il contient; l'unité qui mesure ces quantités de matière ou la masse 1 est celle du corps qui pèse g kilogrammes à la surface terrestre.

22. *Quantité de mouvement.* On est convenu d'appeler quantité de mouvement d'un corps le produit $Mv = \frac{P}{g}v$ de sa masse $\frac{P}{g}$ par sa vitesse v; et quantité de mouvement élémentaire, le produit $\frac{P}{g}dv$ de sa masse par l'accroissement de vitesse dv qu'il a reçu dans le temps dt. Les équations 6 et 15 donnent les relations

$$\frac{P}{g}dv = M\,dv = F\,dt \ldots (17) \ldots \frac{P}{g}v = Mv = Ft$$

entre ces quantités de mouvement respectives et l'intensité constante F de la force qui les a engendrées en agissant sur la masse M pendant dt ou t.

23. *Force vive.* La force vive d'un corps n'est point une force (1);

cette expression, malheureusement choisie et transplantée depuis quelque temps du domaine des sciences dans le langage de la politique, ne signifie rien autre chose que le produit Mv^2 de la masse $\frac{P}{g}$ d'un corps par le carré v^2 de sa vitesse; — ou bien encore, le produit de sa vitesse v par sa quantité de mouvement $\frac{P}{g}v$.

24. *Travail d'une force.* On appelle travail d'une force F le produit Fe de cette force F par le chemin e que décrit son point d'application dans la *direction* même de son action. Si le chemin e a été parcouru dans le *sens* de l'action de la force le travail est moteur; le travail est résistant et prend dès lors un signe contraire, si le chemin du point d'application a été décrit en *sens* inverse de l'action de la force. Le travail s'exprime en *kilogrammètres*; et *un kilogrammètre* est le travail d'une force de un kilog., dont le point d'application aurait parcouru *un* mètre.

25. *Equation des forces vives.* Il existe, entre la *force vive* d'un corps et le *travail* de la force qui l'a produite, un rapport numérique, très-important, exprimé par l'équation (15)

$$Fe = \tfrac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

et qui peut se traduire ainsi :

La moitié de la variation de la force vive d'un corps est numériquement égale au travail de la force (constante) *qui l'a produite.* Nous verrons plus loin (35) que ce principe est applicable lorsque l'intensité des forces varie.

26. *Mouvement vertical.* Faisant $\varphi = g = 9^m.80896$ et $F = P$ dans les formules 11 à 15, on retombera sur celles que nous avons données, pag. 338, pour la *chute des graves.* On obtiendrait entre autres

$$\left.\begin{array}{ll} e = \tfrac{1}{2}gt^2 & v = gt = \dfrac{2e}{t} \ldots\ldots \\ e = \dfrac{v^2}{2g} = 0.05097\,v^2 & v = \sqrt{2ge} = 4.4292\sqrt{e} \end{array}\right\} \;\ldots\; (19)$$

et pour les mouvements et les temps élémentaires (éq. 2)

$$de = v\,dt \;\ldots\; (20) \;\ldots\ldots\; dv = g\,dt$$

relations qui, multipliées entre elles, donnent encore :

$$g\,de = v\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

27. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la force mouvante F était une fraction du poids P du corps à mouvoir, ou ce poids lui-même : mais on conçoit que les effets produits ne changeraient pas par cela seul que la force mouvante F serait extérieure

au corps mobile, au lieu de résider en lui. C'est sur ce fait que se fonde toute la mécanique des forces, et c'est, comme nous l'avons vu plus haut, les vitesses, les accélérations produites par le poids d'un corps sur ce corps lui-même, qui servent de mesure aux vitesses et aux accélérations que d'autres forces extérieures ou intérieures quelconques, passant par son centre de gravité, produiront sur lui. Ainsi, l'observation ayant appris qu'un corps de poids P, livré à la seule action de l'attraction terrestre ou de la force constante P, avec laquelle il tend sans cesse à descendre, acquerrait, au bout de la première seconde, une vitesse g, la proportionnalité entre les forces et les vitesses autorise à prendre pour la vitesse φ, que ce même poids acquerrait dans la direction d'une force extérieure quelconque, mais constante F, et, pour le même temps, le quatrième terme φ de la proportion (équat. 7)

$$P : g :: F : \frac{Fg}{P} = \varphi$$

On aurait de même (équat. 6), en remarquant que gdt est l'accroissement de vitesse communiqué au poids P par la force P, dans l'instant dt

$$P : gdt :: F : \frac{Fg}{P} dt = dv$$

et c'est parce que les circonstances d'un mouvement quelconque sont ainsi rapportées aux mesures absolues déduites de la *chute des graves*, que l'on voit entrer les rapports $\frac{P}{g}$ (21) et $\frac{g}{P}$ dans les formules de la dynamique.

La plupart des géomètres ont simplifié ces formules en y faisant $\frac{P}{g} = 1$, et quelques-uns même en faisant $g = 1$. Il en est résulté une confusion qui s'est étendue jusqu'à leurs définitions fondamentales. C'est ainsi qu'ils ont été conduits à appeler *forces accélératrices*, les longueurs $\frac{dv}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, g, φ (16).

28. *Force variable.* Nous nous conformons à l'usage en adoptant cette dénomination, par laquelle on désigne *une* force dont les intensités successives différentes seraient, par exemple, F, F', F'', F'''... Nous concevons une source de forces dont le produit serait variable, mais *une* force étant pour nous *un* effort déterminé, *un* nombre concret de kilogrammes et non un autre, nous ne saurions pas plus concevoir *une* force variable qu'*un* poids variable; et de même qu'un poids variable ne peut être qu'une série de poids distincts les uns des autres, nous regarderons, ce qu'on nomme *une* force variable, comme une série d'autant de forces distinctes que l'on peut supposer en elle d'*intensités* différentes $F\,F'\,F''\,F_n$.

En outre, comme « *tout se passe dans le temps* », comme il n'est pas possible de concevoir *dans le temps* une durée *zéro*, ni dès lors une intensité F' ou F'', dont l'existence aurait une durée nulle, il faut bien admettre (6), quelle que soit la rapidité avec laquelle ces forces distinctes F F' F'' pourraient se succéder, que chacune d'elles, ou n'existe pas, ou existe au moins pendant la durée de cet instant insaisissable dt qui sépare le passé de l'avenir, et qui n'est point nul.

Nous sommes ainsi ramenés à ne considérer, dans la force variable des géomètres, qu'une série d'intensités distinctes F F' F'' F'''...., *nécessairement* constante chacune, au moins pendant l'élément dt du temps. En représentant d'une manière générale par F l'intensité *actuelle* qui s'exerce sur le centre de gravité du corps dont le poids est P, nous aurons donc pour les équations du mouvement rectiligne celles précisément qui ont déjà été obtenues 5, 6, 7, et dans lesquelles les espaces, les accroissements de vitesse, etc...., étant pris pour l'instant dt, pourront changer d'un dt au dt suivant avec les intensités différentes F F' F'' F'v, dont la variabilité est toujours l'une des données du problème à résoudre.

29. On aura donc, comme en (7),

$$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{F}{P} = \frac{d^2e}{dt^2}\; . \; . \; . \;(22). \; . \; . \;\frac{dv'}{dt} = g\,\frac{F'}{P} = \frac{d^2e'}{dt^2}$$

$\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$ étant les *accélérations* ou les *tendances* à parcourir $g\frac{F}{P}$ mètres ou $g\frac{F'}{P}$ mètres par seconde, que recevrait le poids P, s'il était soumis pendant une seconde aux forces F ou F'.

30. ***Mesure des forces d'inertie.*** Réciproquement

$$\frac{P}{g}\,\frac{dv}{dt} = F\; . \; . \; . \; . \;(23)$$

serait l'effort en kilogrammes qu'opposerait l'inertie du poids P à la force F, qui tendrait à faire varier sa vitesse de dv dans l'élément du temps. Quant au sens de cet effort, il est toujours de signe contraire à celui de la force modificatrice du mouvement; la force d'inertie est donc puissance ou résistance, suivant que la force, contre laquelle elle réagit, est elle-même résistante ou mouvante.

31. On aurait de même, pour chaque instant, dt, et chaque intensité, F F' F''

$$dv = \frac{gF}{P}\,dt\; . \; . \; . \;(24). \; . \; . \;dv' = \frac{gF'}{P}\,dt$$

de sorte que, si la loi de la variabilité des intensités était connue en FONCTION du temps, il suffirait de mettre la valeur générale de F dans l'équation ci-dessus, et d'intégrer, pour avoir la vitesse finale v, acquise à la fin du temps t.

Cette vitesse v étant connue, comme on a dans un mouvement quelconque (2)

$$de = v\,dt \qquad v = \frac{de}{t}$$

on obtiendrait ensuite l'espace parcouru e par une seconde intégration.

32. Si la variabilité des intensités successives était connue au contraire en fonction de l'espace parcouru e dans la direction des forces, on obtiendrait la vitesse v par l'équation suivante, qui résulte de la multiplication de (24) par (2)

$$v\,dv = g\frac{F}{P}\,de. \;.\;.\;.\; (25)$$

mettant pour F sa valeur générale en fonction de e, et intégrant, on aurait la valeur de

$$v = \frac{de}{dt}$$

qui conduirait elle-même à celle de dt, et, par suite, à celle du temps t.

33. Si la loi des intensités successives est donnée en fonction de la vitesse, on tire de l'équation (24) la valeur de dt, on intègre pour avoir t, et l'on obtient ensuite l'espace.

34. Enfin, si le mouvement du mobile est connu et que l'on veuille déterminer la force, on remontera par des intégrations successives de l'espace à l'accélération, et de celle-ci au temps, puis à la force.

Les problèmes qu'on trouvera plus bas éclairciront le sens de ces règles.

35. *Equation des forces vives.* Avant de passer à l'application de ces théories, nous reprendrons l'équation (25)

$$F\,de = \frac{P}{g}\,v\,dv$$

En l'intégrant entre deux vitesses $v_o < v$, il vient

$$F\,e = \tfrac{1}{2}\frac{P}{g}(v^2 - v_o^2). \;.\;.\;.\; (26)$$

c'est-à-dire que *le travail de la force* F, *le long du chemin e, est numériquement égal à la moitié de la variation de la force vive subie par le corps* P *entre les instants où l'on considère le travail* (§ 25).

La demi-variation de la force vive est donc aussi la mesure même du travail consommé par l'inertie du poids P, s'il était libre.

Supposons maintenant qu'à l'instant où F a terminé son travail, une autre intensité F' lui succède et agisse dans la même direction

le long d'un chemin e', et qu'elle élève la vitesse finale v, précédemment acquise par le poids P, à la valeur v_1, on aura encore

$$F' e' = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v_1^2 - v^2)$$

Une troisième intensité F″, qui succéderait à la seconde et travaillerait le long du chemin e'', changerait encore la vitesse v_1 en une vitesse v_2, telle qu'on aurait

$$\pm F'' e'' = \pm \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v_2^2 - v_1^2)$$

de sorte que, en continuant de raisonner ainsi jusqu'à l'intensité quelconque F_n, agissant le long du chemin e_n, et élevant la valeur v_{n-1} de la vitesse à la valeur finale v_n, on obtiendrait, en faisant d'une part la somme de tous les travaux et de l'autre celle des variations correspondantes des demi-forces vives

$$F e + F' e' + F'' e'' \dots + F_n e_n = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v_n^2 - v_0^2)$$

ainsi, *quelles que soient les intensités successives* F F′... F_n, *quels que soient les chemins respectifs* e e'... e_n, *qu'elles aient décrits dans leurs directions propres, la demi-variation de la force vive du corps* P, *entre les mêmes instants, est numériquement égale à la somme des travaux des forces.*

Et le mot *somme* doit être pris ici dans son acception algébrique, car tous les raisonnements ci-dessus deviennent applicables aux cas où certaines forces du système seraient *résistantes* au lieu d'être *mouvantes*, à la condition de remplacer les expressions vitesses *acquises*, forces vives *acquises*, travail *moteur*, par celles-ci : vitesses *perdues*, forces vives *détruites*, travail *résistant*, et de changer les signes en conséquence, conformément aux notations algébriques.

En réunissant, sous la forme abrégée $\Sigma F\, de$, les sommes des travaux mouvants élémentaires, et $\Sigma R\, dr$, celles des travaux résistants, v_0 étant la vitesse initiale de P lorsque les forces ont commencé à agir, et v sa vitesse finale, on pourra donner, suivant l'usage, à l'équation des forces vives la forme

$$\Sigma \int F\, de - \Sigma \int R\, dr = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 - \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_0^2 \dots \quad (27)$$

36. *Applications.* Une balle de fusil, dont le poids est P, frappe une planche fixe, horizontalement, avec une vitesse u égale à celle que P aurait acquise en tombant librement dans le vide d'une hauteur h; elle pénètre la planche suivant son épaisseur e, et celle-ci oppose à la pénétration une résistance R, qu'on supposera constante; on suppose, en outre, que la balle P ne se déforme pas, et on demande la vitesse v que la balle a conservée lorsqu'elle a traversé une partie

quelconque x de l'épaisseur de la planche, et le temps t qu'elle emploie à parcourir x, ou la durée t de la pénétration.

37. On a d'abord (26)

$$u = \sqrt{2gb} \qquad b = \frac{u^2}{2g} \qquad \frac{u}{\sqrt{2g}} = \sqrt{b}. \;.\;.\; (28)$$

la force vive d'arrivée de la balle est $\frac{P}{g}u^2$, celle qui lui reste lorsqu'elle a traversé l'épaisseur x est $\frac{P}{g}v^2$, le travail de la résistance R est Rx, on a donc, soit en intégrant l'équation des forces vives

$$\frac{P}{g}\int_v^u v\,dv = \int R\,dx$$

entre les vitesses u et v et les chemins o et x, soit directement la relation (équat. 26)

$$\frac{P}{2g}(u^2 - v^2) = Rx. \;.\;.\;.\; (29)$$

dont on déduit immédiatement la vitesse v qui survit au travail de la pénétration x

$$v = \sqrt{u^2 - 2g\frac{R}{P}x} = \sqrt{2g\left(b - \frac{R}{P}x\right)}. \;.\;.\;.\; (30)$$

38. La vitesse v étant maintenant déterminée, on obtiendra le temps t en fonction de cette vitesse par la relation générale

$$dx = v\,dt \qquad \text{d'où} \qquad dt = \frac{dx}{v}$$

qui devient ici

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2g\left(b - \frac{R}{P}x\right)}}$$

et dont l'INTÉGRALE est comme on sait

$$= \frac{-2\sqrt{2g\left(b - \frac{R}{P}x\right)}}{2g\frac{R}{P}} = \frac{-\sqrt{b - \frac{R}{P}x}}{\frac{R}{P}\sqrt{\frac{g}{2}}} + C$$

la valeur de la constante C à y ajouter se détermine en remarquant que le temps t étant compté à partir de l'instant où la pénétration commence, on doit avoir $t = o$, quand la pénétration x est elle-même $= 0$ ou nulle. La constante ou la quantité qu'il faut ajouter à l'ex-

pression ci-dessus pour avoir $t=o$ quand $x=o$ devient donc

$$\text{constante} = + \frac{\sqrt{b}}{\frac{R}{P}\sqrt{\frac{g}{2}}}$$

et l'intégrale complète, ou la valeur du temps t en secondes, devient ainsi

$$t = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b - \frac{R}{P}x}}{\frac{R}{P}\sqrt{\frac{g}{2}}} = \frac{2x}{u+v} \quad . \ . \ . \ . \ (31)$$

réciproquement, si la durée t était connue, on tirerait de l'équation ci-dessus la valeur de la pénétration x

$$x = t\sqrt{2gb} - \frac{R}{P}\frac{1}{2}gt^2 = ut - \frac{R}{P}\frac{1}{2}gt^2 \quad . \ . \ . \ . \ (32)$$

On peut remarquer que le dernier terme, pris positivement, serait l'espace que parcourrait la balle P, si la force constante R, considérée comme une force active, agissait sur elle pendant le temps t (éq. 4).

On a d'ailleurs, en vertu des équations ci-dessus,

$$\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{2}gt^2 = \frac{(u-v)}{2}t$$

d'où cette autre expression de x

$$x = ut - \frac{(u-v)}{2}t = \frac{(u+v)}{2}t \quad . \ . \ . \ . \ (33)$$

39. Faisons quelques applications numériques de ces formules : les expériences de *Robins* lui ont donné $0^m.127$ pour la pénétration totale, dans le bois d'orme, des balles de plomb de $0^m.019$ diamètre, frappant le bloc avec une vitesse $u = 518$ mèt.; et lorsque le bloc était complétement inébranlable, cette pénétration suffisait pour éteindre entièrement la vitesse de la balle ; or il est évident que cette même vitesse $u = 518^m$ de la balle $P = 0^k.041$ serait également éteinte, lorsque P, lancée de bas en haut dans le vide, atteindrait précisément la hauteur b due à la vitesse de projection u. Ceci suppose toutefois, contrairement au fait, que l'attraction terrestre sur le corps P demeure, pour toute élévation, ce qu'elle est à la surface, mais cette hypothèse ne vicie pas les résultats. Le travail Pb de l'attraction terrestre ou de la gravité sur la balle P, est donc égal au travail Rx de la résistance R à la pénétration $x = 0^m.127$ du même projectile ; donc

$$Rx = \frac{Pu^2}{2g} = Pb = \frac{P(518)^2}{19.62} = P \times 13676^m.474$$

et l'on a, pour la résistance R

$$R = P \times \frac{13676.474}{0.127} = 107688\ P = 4415^k.21 \ldots (34)$$

Cette valeur de la résistance nous permet de calculer la vitesse v, que conserverait une balle du même calibre après qu'elle aurait traversé une planche d'orme de $0^m.026$ épaisseur, invariablement fixe, on trouverait, en faisant

$$x = 0.026\,;\ \frac{R}{P} = 107688\,;\ b = 13676^m.474\,;\ 2g = 19^m.62$$

dans la formule (30)

$$v = \sqrt{2\ g\left(b - \frac{R}{P}x\right)} = 461^m.95$$

c'est avec cette vitesse que la balle quitterait la planche; elle ne perdrait donc, en la traversant, que $u - v = 518^m - 461.95 = 56^m.05$ de sa vitesse d'arrivée.

Enfin, la durée t en secondes du trajet, à travers la planche d'orme de $0^m.026$, serait donnée par la formule (31), en y faisant $\sqrt{b} = 116^m.94$, on obtiendrait

$$t = \frac{1''}{18845} = 0''.000053$$

ainsi la durée du trajet n'atteindrait pas même la dix-huit millième partie d'une seconde.

40. Substituons à la planche fixe un bloc d'orme massif pesant Q kil., et supposons que ce bloc, placé sur un plan horizontal, puisse se mouvoir sans frottement par l'effet même de la pénétration de la balle qui le pousse en s'y enfonçant. Soient, pour l'instant quelconque où la vitesse de la balle P est devenue $v = \sqrt{2gp}$, v' celle du bloc qu'on peut regarder comme due à une hauteur $q = \frac{v'^2}{2g}$; et soient enfin y le chemin parcouru par le bloc au même instant, x la pénétration ou le chemin décrit par la balle à l'intérieur du bloc à ce même instant, R étant toujours la résistance à la pénétration supposée constante, u la vitesse d'arrivée de la balle contre le bloc, et b la hauteur $\frac{u^2}{2g}$ due à cette vitesse. On convient de ne pas tenir compte de la déformation de la balle, et l'on suppose que le choc horizontal est dans la direction du centre de gravité du bloc; remarquons que, pendant l'instant dt que le bloc emploiera à parcourir

$$dy = v'dt = dt\sqrt{2gq} \ldots (35)$$

la balle parcourra d'abord dy, comme le bloc, et de plus dx dans son intérieur, ou en somme

$$dy + dx = v\,dt = dt\sqrt{2gp} \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

Divisant cette équation par la première, il vient, pour le rapport des chemins élémentaires simultanément décrits par la balle et le bloc

$$dy + dx = \frac{v}{v'}dy = dy\sqrt{\frac{p}{q}} \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

Or, la formule générale (25) donne immédiatement

$$\mathrm{R}\,(dx + dy) = -\,\mathrm{P}\,dp = -\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,v\,dv = \frac{v}{v'}\,\mathrm{R}\,dy. \; . \; . \; . \; (38)$$

elle donne encore pour le mouvement du bloc seul

$$\mathrm{R}\,dy = \frac{\mathrm{Q}}{g}\,v'dv'. \; . \; . \; . \; (39)$$

relations dont on déduit celle-ci

$$\frac{\mathrm{Q}}{g}\,dv' = -\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,dv. \; . \; . \; . \; (40)$$

de laquelle nous aurions pu partir en nous basant sur les raisonnements de la page 324, ou sur ceux du § 5, et qui montrent que la quantité de mouvement élémentaire acquise par le bloc est nécessairement égale à celle qui a été perdue par la balle.

41. L'intégration de ces quantités de mouvement donne

$$\frac{\mathrm{Q}}{g}\,v' = -\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,v + \text{constante}$$

et cette constante se déterminera en remarquant que, d'après les données du problème, la quantité de mouvement acquise par le bloc est nulle à l'origine, lorsque celle de la balle est encore $\frac{\mathrm{P}}{g}u$, on a donc, pour l'intégrale complète,

$$\frac{\mathrm{Q}}{g}\,v' = -\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,v + \frac{\mathrm{P}}{g}\,u; \quad \text{soit } \frac{\mathrm{P}}{g}\,u = \frac{\mathrm{P}}{g}\,v + \frac{\mathrm{Q}}{g}\,v'. \; . \; . \; . \; (41)$$

c'est-à-dire que, à tout instant, la somme des quantités de mouvement de la balle et du bloc est constante et égale à la quantité de mouvement primitive de la balle.

42. Or la balle perdant à chaque instant dt un degré de vitesse dv, tandis que le bloc acquiert un autre degré de vitesse $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\,dv = dv'$; il arrivera un moment où la vitesse v, qui restera à la balle, sera précisément égale à la vitesse v' acquise par le bloc. Toute réaction cessera alors entre ces corps qui se mouvront avec la vitesse com-

mune v', et la balle aura atteint la plus grande pénétration; v étant alors devenu $= v'$, on a

$$\frac{P}{g}u = \frac{(P+Q)}{g}v' \qquad \text{d'où} \qquad v' = \frac{P}{P+Q}.u. \;.\;.\;.\; (42)$$

Ainsi, de même que pour les corps qui ne réagissent pas (pag. 325), la vitesse commune v' égale la quantité de mouvement primitive divisée par la somme des masses; et la résistance R à la pénétration n'entrant point dans l'expression de v', cette vitesse commune reste la même, quelle que soit l'intensité de R.

43. Pour obtenir la profondeur x de la pénétration, il suffira d'intégrer l'équation (38), qui fournira ainsi la relation

$$Rx + Ry = -\frac{Pv^2}{2g} + \text{constante}$$

et puisque, pour $x + y = o$, on a $v = u$, l'intégrale complète devient

$$Rx + Ry = \frac{Pu^2}{2g} - \frac{Pv^2}{2g} \;.\;.\;.\;.\;.\;. (43)$$

c'est-à-dire (§ 35) que la somme des travaux résistants contre la balle est égale à la variation de sa demi-force vive (§ 35).

44. L'intégration de l'équation (39) donne de son côté

$$Ry = \frac{Qv'^2}{2g} = Qq. \;.\;.\;.\;. (44)$$

et cette intégrale est complète, puisque, pour $y = o$, on doit avoir $v' = o$. Elle enseigne encore, conformément à l'équation (26), que le travail moteur de R sur le bloc est égal à la moitié de la force vive qu'il a acquise.

45. Si nous retranchons de cette équation celle qui la précède, il viendra

$$Ry - Ry - Rx = \frac{Qv'^2}{2g} + \frac{Pv^2}{2g} - \frac{Pu^2}{2g} = \frac{Qv'^2}{2g} - \left(\frac{Pu^2}{2g} - \frac{Pv^2}{2g}\right)$$

ou en changeant les signes des deux membres

$$Rx = \frac{Pu^2}{2g} - \frac{Pv^2}{2g} - \frac{Qv'^2}{2g} = \frac{Pu^2}{2g} - \left(\frac{Pv^2}{2g} + \frac{Qv'^2}{2g}\right). \;.\;.\;. (45)$$

c'est-à-dire que le travail résultant est négatif ou résistant; qu'il se réduit à celui que la résistance R oppose à la pénétration x de la balle; que, en même temps qu'il fait perdre à la balle la demi-force vive $\frac{P}{2g}(u^2 - v^2)$, il augmente celle du bloc de $\frac{Qv'^2}{2g}$, et que, enfin, conformément à l'équation générale (27), ce travail résultant égale la demi-variation de toutes les forces vives du système.

Cette équation et celle (44) qui la précède donneront, d'une part, le chemin y parcouru par le bloc ; de l'autre, la profondeur x de la pénétration au moment où les vitesses absolues des deux masses sont devenues v' et v, et réciproquement on obtiendrait ces vitesses, si l'on avait pu mesurer les chemins y et x.

46. Nous avons vu plus haut comment toute réaction devait cesser entre le bloc et la balle, et comment celle-ci atteignait la plus grande pénétration, lorsque sa vitesse v devenait celle v' du bloc. Appelant X cette plus grande pénétration ou cette valeur maximum de x, nous aurons donc, au moment où les deux corps ont une vitesse commune v'

$$RX = \frac{Pu^2 - (P+Q)v'^2}{2g}$$

d'où l'on tire, pour la plus grande pénétration, en remplaçant v par sa valeur (éq. 42),

$$X = \frac{Pu^2 - (P+Q)v'^2}{2gR} = \frac{PQ}{(P+Q)R} \cdot \frac{u^2}{2g} = \frac{PQb}{(P+Q)R}$$

En écrivant cette relation sous la forme suivante

$$RX = \frac{PQ}{(P+Q)} \frac{u^2}{2g} = \frac{P}{(P+Q)} Qb. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

on pourra reconnaître (page 326) que le travail RX de la pénétration est précisément celui que l'on appelle travail *perdu*, demi-force vive *perdue*, dans la théorie du choc des corps qui ne se débandent pas après la compression. C'est que, en effet, ce travail *perdu* dans le choc est en réalité celui que la déformation des corps a exigé, déformation qui, dans le problème actuel, est une perforation partielle du bloc par la balle.

47. Supposons maintenant que, au lieu d'être libre de se mouvoir sur un plan horizontal et sans frottement, le bloc ait été, dès l'origine, invariablement fixé ; cette condition, qui n'est jamais réalisable matériellement, sera d'autant plus près d'être satisfaite que le bloc fera partie d'une plus grande masse $\frac{Q}{g}$, de la masse du globe par exemple. La vitesse finale v' que prendra cette énorme masse, étant (éq. 42) une fraction $\frac{P}{Q}$ de celle v, d'autant plus petite que Q est plus grand par rapport à P, on voit que v' s'approchera de la valeur zéro, à mesure que Q s'approchera de l'infini. En passant à ces limites extrêmes et irréalisables en toute rigueur, le second terme de la valeur de X deviendra zéro, et si l'on appelle X' la

plus grande pénétration que la balle atteindra dans ce dernier cas, on aura

$$X' = \frac{P u^2}{2 g R} = \frac{P b}{R} = \frac{(P+Q)}{Q} . X. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Ainsi, pour une même résistance à la pénétration, l'enfoncement du projectile est toujours plus grand dans le bloc fixe que dans le bloc mobile, et les profondeurs de ces pénétrations respectives sont entre elles comme la somme des poids est au poids du corps pénétré.

48. Quant à la durée t de la pénétration totale x, on voit clairement qu'elle est la même que la durée du transport du bloc mobile ; or le chemin parcouru par celui-ci est y, et la force R étant constante, l'équation générale (13) donne immédiatement

$$t = \frac{2y}{v'} = \frac{Q v'}{g R} . \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

c'est la quantité de mouvement finale du bloc divisée par la résistance constante, ou le double de l'espace parcouru divisé par la vitesse finale.

49. Donc, si le bloc d'orme supposé mobile avait neuf fois le poids de la balle, l'expérience de *Robins* ayant donné $X' = 0^m.127$ pour un bloc supposé fixe, on aura, pour la pénétration extrême dans le bloc mobile,

$$X = \frac{Q}{(P+Q)} \times 0^m.127 = 0^m.1143 \quad \text{et} \quad X' - X = 0^m.0127$$

la vitesse finale commune devenant, en vertu des données du premier problème,

$$v' = \tfrac{1}{10} \times 518^m = 51^m.8$$

on obtiendrait, pour le chemin parcouru par le bloc,

$$y = \frac{Q v'^2}{2 g R} = \frac{9 P v'^2}{2 g \times 107688 \, P} = \frac{9 \, (51.8)^2}{2 g \times 107688} = 0^m.01143$$

Ainsi, le chemin parcouru par le bloc est ici précisément le $\frac{1}{10}$ de la plus grande pénétration. Ce résultat numérique pourrait paraître au moins bizarre, si l'on ne remarquait pas qu'un examen attentif des formules l'eût fourni immédiatement et sans calcul. On en déduit, en effet, pour le moment de la plus grande pénétration où v' est la vitesse commune du bloc et de la balle

$$\frac{y}{X} = \frac{P}{P+Q} . \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

Quant à la durée t de la pénétration, on trouve facilement qu'elle atteindrait à peine $\frac{1}{2266}$ de seconde.

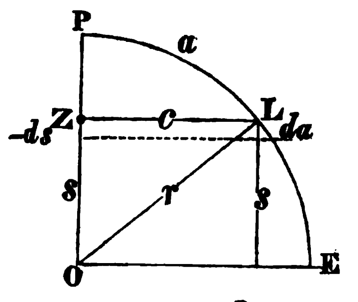
50. Supposons la terre sphérique et d'une densité homogène, on

sait que, dans cette double hypothèse, l'ATTRACTION qu'elle exercerait sur un point intérieur serait proportionnelle à la distance de ce point au centre de la sphère ; on demande, dans ces conditions, quels seraient à chaque instant le poids, la vitesse acquise et la durée totale du mouvement pour un corps dont le poids serait P au pôle, et qui descendrait vers le centre dans un canal rectiligne, dont l'axe coïnciderait avec le rayon polaire. On fait ce rayon OP (pag. 78)

$$\mathrm{OP} = r = 6366198^{\mathrm{m}}$$

il en résulte, pour la valeur de g au pôle (pag. 339)

$$g = 9^{\mathrm{m}}.8329$$



Soient s le sinus et c le cosinus de la latitude EL du parallèle ZL que le corps traverse après une durée t, comptée depuis l'origine du départ, et v la vitesse qu'il a acquise en Z, en tombant du pôle P. Puisque son poids est $\mathrm{P} = \mathrm{M}g$ au pôle, où la gravité est g, si l'on appelle $\mathrm{P}' = \mathrm{M}g'$ le poids qui lui restera en Z, on obtiendra clairement ce poids par la relation

$$\mathrm{P} : \mathrm{P}' :: \mathrm{M}g : \mathrm{M}g' :: r : s \quad \text{d'où} \quad g' = \frac{g}{r}s \quad \text{et} \quad \mathrm{P}' = \frac{\mathrm{P}}{r}s. \quad (50)$$

Ainsi, le poids du corps diminue dans le même rapport que le sinus de la latitude, lequel devenant zéro au centre O, y réduit aussi à zéro le poids du corps qui était P au pôle ; de sorte qu'un corps quelconque demeurerait en repos au centre de la terre, s'il y parvenait sans vitesse acquise.

51. Mais, en descendant de P vers Z, le corps prend à chaque instant dt un accroissement dv de vitesse, de sorte que sa vitesse acquise v augmente à mesure que s diminue, la formule générale (21) donne donc

$$v\,dv = -\,g'\,ds = -\frac{g}{r}\,s\,ds. \;.\;.\;.\;.\; (51)$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$v^2 = -\frac{g}{r}s^2 + \text{constante.}$$

52. Comme, lorsque $v = o$, on doit avoir $s = r$, il faut que

$$o = -\frac{gr^2}{r} + \text{constante}, \quad \text{d'où const.} = gr$$

l'intégrale complète devient ainsi

$$v^2 = \frac{g}{r}(r^2 - s^2) \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{g}{r}(r^2 - s^2)} \ldots \quad (52)$$

or, on a dans le cercle $c^2 = r^2 - s^2$, il vient donc encore

$$v = c\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Ainsi, les vitesses acquises croissent comme les cosinus c de latitude des parallèles traversés. On aurait obtenu la même expression de la vitesse en intégrant l'équation des forces vives, et remarquant que $\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}$, et que le travail instantané ou élémentaire $= -\frac{P}{r} s ds$.

53. Quant à la durée t de la chute, elle sera fournie par la formule générale

$$v dt = - ds$$

qui donne ici

$$dt = -\frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{-ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

remarquant que l'arc élémentaire de méridien da est perpendiculaire au rayon, et le décroissement $-ds$ du sinus perpendiculaire au cosinus c, les triangles semblables donneront

$$\frac{da}{r} = \frac{-ds}{c} = \frac{-ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \quad \text{et} \quad dt = \frac{da}{r}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

intégrant en remarquant que, lorsque $t = o$, l'arc de colatitude $a = PL = o$, on a, pour l'intégrale complète,

$$\left.\begin{array}{l} t = \frac{\text{arc PL}}{r}\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \left(\begin{array}{c}\text{arc de colatitude du} \\ \text{parallèle traversé.}\end{array}\right) \\ t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \left(\begin{array}{c}\text{arc terrestre dont le sinus verse est la} \\ \text{hauteur de la chute.}\end{array}\right) \end{array}\right\} \ldots \quad (53)$$

54. Parvenu au centre O, le corps qui pesait P au pôle, y perd tout son poids; il arrive à ce centre O avec une vitesse $v = \sqrt{gr}$, qui est les 0.707 de celle qu'il aurait acquise, si l'attraction eût été la même qu'à la surface terrestre; et la durée totale du trajet est celle

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \ldots \quad (54)$$

que mettrait un PENDULE simple à accomplir une demi-oscillation, s'il avait pour longueur le rayon r de la terre, et s'il oscillait à sa surface en décrivant de très-petits arcs.

En partant des valeurs adoptées ci-dessus pour r et g, on trouverait

$$\frac{g}{r} = 0.0000015445 \qquad \sqrt{\frac{g}{r}} = 0.001242$$

$$\frac{r}{g} = 647438.50 \qquad \sqrt{\frac{r}{g}} = 804.6$$

$$gr = 62598188.3142 \qquad \sqrt{gr} = 7911^{m}.91$$

$$\frac{\pi}{2} = 1.570796$$

On aurait donc $7911^{m}.91$ pour la vitesse d'arrivée au centre, et $21'.3''.86 = 1263''.86$ pour la durée totale du trajet depuis le pôle jusqu'au centre; il conviendrait de prendre $11111^{m}.111$ pour la longueur moyenne de l'arc terrestre de *un* degré, si l'on faisait d'autres applications numériques.

55. Trouver les lois du mouvement d'un corps qui, parti du point A sans vitesse acquise, descendrait vers la surface terrestre. On néglige la résistance de l'air aussi bien que l'influence attractive de la masse du corps, et l'on ne tient compte que de l'ATTRACTION de la terre, dont l'intensité varie en raison inverse du carré des distances à son centre C.

Soit P le poids du corps mesuré à la surface terrestre en G; lorsque, parti du point A, il sera parvenu au point quelconque O, ou lorsqu'au bout d'un temps t, il aura décrit x, son poids en O sera devenu P′, et l'on aura

$$P : P' :: Mg : Mg' :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(a-x)^2}$$

$$P' = \frac{P r^2}{(a-x)^2} \qquad g' = \frac{g r^2}{(a-x)^2}. \quad . \quad . \quad (55)$$

56. La formule générale (21) donne, pour trouver sa vitesse v au même point quelconque O,

$$v\,dv = g'\,dx = \frac{g r^2}{(a-x)^2}\,dx$$

Intégrant, on obtient

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g r^2}{a-x} + \text{une constante}$$

qui, devant satisfaire, à la condition que v soit zéro, lorsque x est zéro, est donnée par

$$o = \frac{g r^2}{a} + \text{constante}, \quad \text{d'où constante} = -\frac{g r^2}{a}$$

l'intégrale complète devient ainsi

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g\,r^2}{a-x} - \frac{g\,r^2}{a}$$

et l'expression de la vitesse acquise au bout du temps t, lorsque le mobile a parcouru x, devient

$$v = \sqrt{2\,g\,x\,\frac{r^2}{a\,(a-x)}} = \sqrt{2\,g\,x\,\frac{r^2}{(r+h)^2-(r+h)\,x}}. \quad (56)$$

en faisant $a = r + h$.

57. Au point G pour lequel $h - x = o$, la vitesse finale devient

$$v = \sqrt{2\,g\,h}\,.\,\sqrt{\frac{r}{r+h}}\,.\;.\;.\;.\;.\;(57)$$

58. Quant à la durée t de la chute de A au point quelconque O, on a

$$d\,t = \frac{d\,x}{v} = \sqrt{\frac{a}{2\,g\,r^2}}\,\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,.\,d\,x$$

Multipliant en haut et en bas par $\sqrt{a-x}$ pour faciliter l'intégration, il vient

$$d\,t = \sqrt{\frac{a}{2\,g\,r^2}} \times \frac{(a-x)\,d\,x}{\sqrt{a\,x-x^2}}$$

faisant $x = \frac{a}{2} - z$ et dès lors $d\,x = -d\,z$

$$(a-x) = \frac{a}{2} + z; \qquad a\,x - x^2 = \frac{a^2}{4} - z^2$$

on a alors à intégrer

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2\,g\,r^2}} \left\{ \frac{-z\,d\,z}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - z^2}} - \frac{\frac{1}{2}\,a\,d\,z}{\sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 - z^2}} \right\}$$

ce qui donne, en remettant pour z sa valeur, remplaçant a par $h + r$, et remarquant que la constante est nulle

$$t = \sqrt{\frac{h+r}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{(h+r)\,x - x^2} + \tfrac{1}{2}(r+h)\,\text{arc}\left(\cos. = \frac{h+r-2x}{h+r}\right)\right\} \quad (58)$$

59. On en déduit, pour la durée de la chute totale de A en G

$$t = \sqrt{\frac{h+r}{2\,g\,r^2}} \left\{ \sqrt{r\,h} + \tfrac{1}{2}(r+h)\,\text{arc}\left(\cos. = \frac{r-h}{r+h}\right)\right\}\;.\;.\;.\quad (59)$$

Si l'on fait $h = 0.001\,r = 6366^{m}.198$, la vitesse d'arrivée devient $v = 353^{m}.243$; l'arc dont le cosinus $= 0.9980019$ est celui

de $3^{\circ}.37'.38''.8$; il a pour longueur $0^{m}.06331$; le second terme de la parenthèse, dans la valeur de t devient 201723.519, le premier $\sqrt{rh}=201299.1808$, ce qui donne pour la parenthèse 403022.701. Son multiplicateur général étant 0.0000895, on a $t=36''.07$ pour la durée de la chute totale.

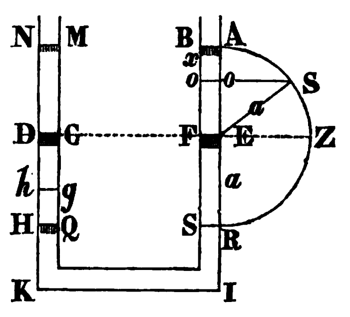
60. Si, conformément à l'hypothèse de Galilée, on avait regardé l'attraction comme une force constante, la vitesse u due à cette même chute, et la durée θ auraient été trouvées

$$u=\sqrt{2gh}=353^{m}.381\,;\quad \theta=\sqrt{\frac{2h}{g}}=36''.02.\;.\;.\;(60)$$

d'où, pour une chute de $6366^{m}.198$,

$$u-v=0^{m}.138 \quad \text{et} \quad t-\theta=0''.05$$

Cette application numérique montre peut-être mieux que les formules générales, à quelles insignifiantes erreurs on s'expose dans toutes les recherches industrielles, lorsqu'on y regarde l'attraction terrestre comme une force constante; et qu'on y néglige les variations de poids que les corps éprouvent, en effet, sur une même verticale.



61. Un tube vertical à deux branches parallèles d'une section constante s, contient un liquide dont le poids spécifique est ϖ, et qui s'y dispose d'abord de niveau, suivant DC . FE; l'axe de la colonne liquide totale a pour longueur L ; une pression T agit momentanément à la surface DC, abaisse le niveau dans la branche gauche de DC en HQ, ce qui ne peut avoir lieu sans que le liquide monte en BA dans la branche droite d'une hauteur $FB=DH=a$. Lorsque le liquide a atteint ce niveau BA dans la branche droite, la tension T s'anéantit tout à coup, on demande, à partir de cet instant, toutes les circonstances du mouvement que prendra la colonne totale.

Le poids total de la colonne liquide est $\varpi s L=P$, l'excès de pression, qui a lieu à droite au premier instant, est évidemment $\varpi s.2a=p=\frac{P}{L}\,2a$; il déterminera le mouvement de la droite vers la gauche, et se trouvera réduit à

$$\varpi\, s.\,2(a-x)=p'=\frac{P}{L}\,.\,2(a-x)$$

au moment où BA sera descendu d'une quantité quelconque $Bo=x$,

et où HQ sera dès lors élevé de la même quantité, la longueur L étant invariable. p' est donc la force mouvante à cet instant, et $\frac{P}{g}$ étant la masse totale sur laquelle elle s'exerce, la formule générale (25) donne pour un chemin élémentaire dx

$$p'dx = \frac{P}{L}\,2(a-x)\,dx = \frac{P}{g}\,v\,dv$$

qui, intégrée, en remarquant que la constante est zéro, fournit pour la vitesse v correspondante au moment où le chemin parcouru est x, les relations

$$\frac{P}{2g}v^2 = \frac{P}{L}(2ax - x^2) = \frac{P}{L}\,2ax - \frac{P}{L}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$\text{et} \qquad v = \sqrt{2gx\frac{(2a-x)}{L}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}\,\sqrt{2ax - x^2}$$

La première relation aurait été obtenue sans intégration, en remarquant que la demi-force vive acquise par la masse totale $\frac{P}{g}$, est le résultat du travail de descente du poids p' de la hauteur x, diminué du travail nécessaire pour élever à cette même hauteur x, dans l'autre branche, le poids $\frac{Px}{L}$ du liquide qui y est entré.

On voit aussi que la vitesse est indépendante de la densité du liquide; qu'elle serait dès lors la même, toutes choses égales d'ailleurs, pour le mercure, l'eau ou l'alcool : ce qui s'explique très-naturellement en remarquant que si, dans le cas du mercure, la force motrice est dix-sept fois plus grande que dans le cas de l'alcool, la force d'inertie des masses à mouvoir croît ainsi dans le même rapport.

62. La vitesse v diminue d'ailleurs à mesure que la racine carrée de la longueur L augmente; pour une même longueur L, la vitesse s'accélère continuellement de BA en FE, où elle atteint son MAXIMUM

$$V = \sqrt{\frac{2ga^2}{L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

elle décroît ensuite à partir de ce niveau primitif FEDC, mais elle ne devient nulle que lorsque $x^2 = 2ax$ ou $x = 2a$, c'est-à-dire lorsque, dans la branche droite, le niveau du liquide s'est abaissé, jusqu'à SR, d'une quantité a égale à celle dont il était élevé au-dessus de FE à l'origine du mouvement. Mais cet abaissement à droite ne pouvant avoir lieu sans un exhaussement égal à gauche, le liquide se trouve en NM dans cette dernière branche au niveau NMBA; les choses se trouvent alors disposées à gauche comme elles l'étaient

d'abord à droite, le mouvement que nous venons de suivre recommence en sens inverse, et les extrémités de la colonne oscilleraient perpétuellement entre BA et NM, si le frottement n'éteignait ces oscillations à la longue.

Traçant du point E comme centre, avec le rayon a, le demi-cercle AZR, remarquant que le facteur $\sqrt{2ax-x^2}$ de la vitesse = la demi-corde os correspondante à l'extrémité de x, on voit clairement la vitesse croître de A en E, atteindre son maximum EZ au niveau primitif, décroître ensuite de E vers R où elle est zéro comme en A.

63. Recherchons la durée t du mouvement; la formule générale (2) donne

$$dt = \frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{L}{2g}}\left(\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\right) = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{\frac{L}{2ga^2}}$$

Mais, ainsi que nous l'avons vu dans un autre problème, on a, dans le cercle AZR de rayon a

$$\text{arc AS} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

le temps t, que le niveau a exigé pour s'abaisser de x, ou de BA en OS, est donc

$$t = \sqrt{\frac{L}{2ga^2}} \times (\text{arc de rayon } a \text{ dont le sinus verse} = x). \quad . \quad (63)$$

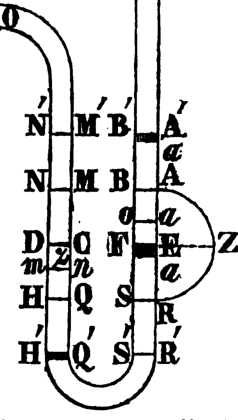
64. Si $x = a$, l'arc devient $\frac{1}{2}\pi a$, et le temps de la descente au niveau primitif FE est alors

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}} \quad . \quad . \quad (64)$$

65. Ainsi le temps que le niveau emploiera pour s'abaisser de A en R ou s'élever de H en N, sera

$$t = \pi\sqrt{\frac{L}{2g}} \quad . \quad . \quad (65)$$

c'est la durée d'une oscillation d'un pendule simple, dont la longueur serait la moitié $\frac{L}{2}$ de l'axe liquide; et la hauteur a, à laquelle on a élevé le niveau primitif d'une branche, n'entrant pas dans l'expression du temps, il en résulte que cette hauteur n'affecte pas la durée de l'oscillation du liquide; de sorte que, quelle que fût cette hauteur, le liquide d'un *niveau d'eau*, par exemple, dont l'axe aurait une longueur de $1^m.9871$, accomplirait chacune de ses oscillations dans une seconde de temps moyen à Paris, quelles que soient leurs amplitudes.



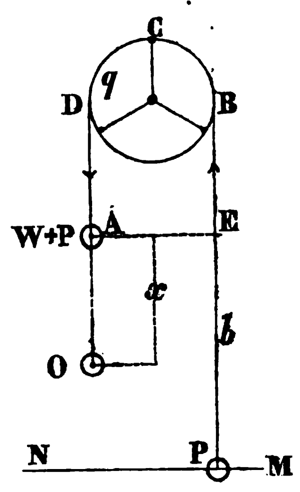
66. Nous avons supposé jusqu'ici que les branches verticales du tube étaient perpendiculaires à un canal horizontal IK de même section, mais tous les résultats ci-dessus s'appliqueraient identiquement à un tube recourbé de section uniforme, dont les branches seraient verticales et parallèles, L étant toujours la longueur développée de l'axe liquide total; tels sont, par exemple, les manomètres que l'on emploie pour mesurer la tension des machines soufflantes, et quelquefois celle de la vapeur.

Si, pour élever le niveau primitif FE en BA, ou établir, entre les extrémités de la colonne liquide, la différence de niveau RA $= 2a$, on avait, entre autres moyens, mis tout à coup l'orifice O du tube en communication avec un grand réservoir d'air comprimé ou de vapeur, où la tension T serait absolument constante, mesurée par une colonne du même liquide que celle du tube, et d'une hauteur précisément égale à $2a$, l'on n'aurait point atteint le but.

Soient, en effet, $z = Dm$ le chemin parcouru par le niveau primitif DC, à un instant quelconque, sous l'action de la force constante $T = \pi s 2a = \frac{P}{L} 2a$. Il est facile de voir que, en raisonnant absolument comme ci-dessus, on parviendra à l'expression suivante de la vitesse v correspondante à l'instant où DC est en mn

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L}(2az - z^2)} \ldots (66)$$

or cette valeur de v montre que la vitesse ne pourra devenir nulle qu'à la condition $2az = z^2$ ou $z = 2a$; ce qui exige que DC soit abaissé en H'Q', et que dès lors FE se soit élevé de $2a$ en B'A'; ainsi la différence totale S'B' des niveaux primitifs devient d'abord $4a$; elle est *double* de celle à laquelle ferait *équilibre* la force constante $T = \frac{P}{L} 2a$; et il semble que l'on n'ait pas toujours eu égard à cette circonstance importante dans les expériences où l'on a mesuré, par des appareils du genre de ceux des figures ci-dessus, les variations de tension des vapeurs, des gaz ou la pression variable exercée sur la carène des bateaux. Cette remarque incidente montre encore combien sont incertaines les indications des manomètres placés sur les machines soufflantes à piston, et explique la *mesure de* T que j'ai adoptée page 600, et où l'on ne tient compte que de la *moitié* de la variation due aux changements brusques des niveaux.



67. Soit une poulie, dont le poids total q est supposé entièrement condensé dans sa circonférence ; un fil PEBCDA, dont la longueur totale est L et le poids total p, passe sur la gorge de la poulie ; il porte à une de ses extrémités un poids P, et à l'autre un poids P égal au premier, plus un poids additionnel w ; on demande la loi du mouvement du système à partir de l'instant où les choses sont disposées comme dans la figure, où $w+P$ est élevé de b au-dessus du niveau MN de P. x étant, à un instant quelconque du mouvement, l'espace qui a été décrit par $w+P$, $\frac{x}{L}p$ est le poids de la partie du fil qui l'a suivi, et $\frac{(b-x)}{L}p$ le poids de la partie du fil qui reste au-dessous du niveau AE ; la force mouvante totale est donc, à cet instant,

$$P+w+\frac{px}{L}-\left(\frac{b-x}{L}\right)p-P=\frac{Lw+2px-bp}{L}=F$$

faisant le poids $2P+q+w+p$ de la masse à mouvoir $=Q$, la formule générale

$$v\,dv=\frac{Fg\,dx}{Q}$$

donne, par l'intégration, en remarquant que la constante est nulle,

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{wx}{Q}+\frac{px^2-bpx}{LQ}\right)}\ldots (67)$$

c'est la vitesse à l'instant où $w+P$ est en O ; si l'on négligeait le poids p du fil, elle se réduirait, en faisant $p=o$, à (12)

$$v=\sqrt{2gx.\frac{w}{Q}}$$

si, au contraire, on ne peut négliger le poids p du fil, la première expression se réduit encore à la seconde pour l'instant précis où $x=b$, soit lorsque les poids moteur et résistant ont échangé leurs niveaux primitifs. Tant que x est $< b$, le poids du fil diminue la vitesse du mouvement ; cette diminution atteint son maximum au moment où $x=\frac{b}{2}$, c'est-à-dire lorsque les poids moteur et résistant passent au même niveau ; elle décroît ensuite et devient nulle, ainsi que nous venons de le voir pour $x=b$; puis, passé ce terme,

x étant $> b$, le poids du fil augmente sans cesse la vitesse du mouvement.

68. On obtiendrait la durée t du mouvement par l'intégration assez pénible de $dt = \frac{dx}{v}$, qui fournirait, toute réduction faite, la relation

$$t = \sqrt{\frac{2LQ}{gp}} \times \text{log. hyp.} \frac{\sqrt{px} + \sqrt{Lw - bp + px}}{\sqrt{Lw - bp}} \quad . \; . \quad (68)$$

69. Si l'on néglige le poids du fil, il ne reste plus dans le système que des forces constantes, et l'on a immédiatement (éq. 18)

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \frac{Q}{w}} \quad . \; . \; . \quad (69)$$

70. *Mouvement curviligne*. Nous avons, dans tout ce qui précède, considéré l'action de forces qui agissaient, soit dans le même *sens*, soit dans les deux sens directement contraires, mais toujours dans la même *direction*, de sorte que la *trajectoire* du centre de gravité du mobile était nécessairement une ligne droite se confondant avec la direction même des forces.

71. Pour obtenir cette trajectoire lorsque les forces qui agissent sur le centre de gravité du poids P sont en nombre quelconque, d'intensités et de directions quelconques, on décompose successivement chacune d'elles, F F′ F″ F‴ en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires, menés par le point que le centre de gravité du mobile occupe à l'origine du temps t, et l'on applique alors aux sommes X, Y et Z des composantes suivant chacun des axes, tout ce qui a été dit au sujet des mouvements rectilignes.

On a donc (page 701, § 40),

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos.a + F'\cos.a' + F''\cos.a'' \pm \ldots = R\cos.\alpha \\ Y &= F\cos.b + F'\cos.b' + F''\cos.b'' \pm \ldots = R\cos.6 \\ Z &= F\cos.c + F'\cos.c' + F''\cos.c'' \pm \ldots = R\cos.\gamma \end{aligned}\right\} (a)$$

en appelant $a\, a'\, a''$ les angles respectifs formés par chacune des forces F F′ F″ avec l'axe des x; $b\, b'\, b''$ les angles des mêmes forces avec l'axe des y, et $c\, c'\, c''$ ceux qu'elles forment chacune avec l'axe des z, R la résultante de toutes les forces, et α 6 γ les angles qu'elle forme avec les mêmes axes.

On a encore

$$\left.\begin{aligned} &R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ &\cos.\alpha = \frac{X}{R}; \quad \cos.6 = \frac{Y}{R}; \quad \cos.\gamma = \frac{Z}{R} \end{aligned}\right\} (b)$$

chacune des composantes ayant un effet indépendant des deux autres, on tirera immédiatement des principes détaillés à l'article ÉQUILIBRE sur la composition des forces des vitesses ou des chemins, ainsi que des équations (5, 6, 7), celles du mouvement, parallèlement à chacun des axes; en sorte que v_x v_y v_z étant les vitesses estimées parallèlement à ces axes, V la vitesse sur la courbe décrite par le corps P, et dont l'élément est ds, dx dy dz les petits espaces parcourus dans l'élément du temps dt parallèlement à chacun des axes, on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{gX}{P};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{gY}{P};\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{gZ}{P}\ \ldots\ldots\ldots\ (c)$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{Xg}{P}t;\quad v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{Yg}{P}t;\quad v_z=\frac{dz}{dt}=\frac{Zg}{P}t.\ .\ (d)$$

$$dv_x=\frac{gX}{P}dt;\quad dv_y=\frac{gY}{P}dt;\quad dv_z=\frac{gX}{P}dt.\ \ldots\ (e)$$

$$V=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}=\sqrt{v^2_x+v^2_y+v^2_z}.\ \ (f)$$

$$V\cos.\alpha=\frac{dx}{dt};\quad V\cos.6=\frac{dy}{dt};\quad V\cos.\gamma=\frac{dz}{dt}.\ \ldots\ (g)$$

$$\cos.\alpha=\frac{dx}{ds};\quad \cos.6=\frac{dy}{ds};\quad \cos.\gamma=\frac{dz}{ds}.\ \ldots\ (h)$$

72. En multipliant chacune des trois équations (c) par le chemin dx, dy ou dz respectivement décrit par le mobile P, dans la direction de chacun des axes, et les ajoutant entre elles, on a :

$$Xdx+Ydy+Zdz=\frac{P}{g}\left(\frac{dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{dz\,d^2z}{dt^2}\right).\ .\ (i)$$

intégrant, il vient (éq. f)

$$\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\int R\,ds=\tfrac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{d^2x+d^2y+d^2z}{dt^2}\right)=$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{P}{g}V^2+\text{const.}=\tfrac{1}{2}\frac{P}{g}\,\frac{d^2s}{dt^2}+\text{const.}\ \ldots\ldots\ (k)$$

relation qui n'est rien autre chose que *l'équation des forces vives* (27) étendue au cas où les forces ont des directions quelconques, et qui peut se traduire ainsi :

La demi-variation de la force vive subie pendant un certain temps par une masse $\frac{P}{g}$ qui obéit à l'action de plusieurs forces quelconques,

est toujours numériquement égale aux travaux de ces forces, ou au travail de leur résultante.

73. *Trajectoires.* Nous allons montrer, par quelques exemples simples, comment les équations ci-dessus peuvent servir à déterminer la trajectoire d'un mobile, et les circonstances de son mouvement.

Soit demandée (*fig.* 6, *planch.* L, et pag. 592) la courbe décrite par le filet moyen d'une veine d'eau lancée du point o, avec une vitesse u, dans une direction qui plonge de l'angle θ au-dessous de l'horizontale oX. Prenons cette horizontale pour l'un des axes, et la verticale oY pour le second axe; il est évident que la veine ne pouvant sortir du plan de ces axes, il n'y a point à considérer les valeurs générales qui se rapportent à celui des Z; car, indépendamment de sa vitesse acquise u, la veine fluide n'est plus soumise qu'à l'accélération g de la gravité ; on a donc à la fois (éq. c)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=o \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=g$$

une première intégration donne

$$\frac{dx}{dt}=o+\text{constante } c. \ . \ . \frac{dy}{dt}=gt+\text{constante } c'$$

la première constante c est visiblement la composante $u\cos.\theta$ de la vitesse suivant l'axe des x, et la seconde c' est la composante $u\sin.\theta$ de cette même vitesse, suivant l'axe des y, il vient donc

$$dx=u\cos.\theta.\, dt \qquad dy=(gt+u\sin.\theta)\,dt$$

intégrant une seconde fois, on a

$$x=u\cos.\theta t \qquad y=\tfrac{1}{2}gt^2+u\sin.\theta t$$

équations qui fixent la position de la molécule o au bout du temps t. En éliminant ce temps t entre elles, on obtient l'équation suivante de la COURBE qui serait décrite dans le vide par le filet moyen de la veine liquide

$$y=x\,\text{tang.}\,\theta+\frac{gx^2}{2u^2\cos.^2\theta}$$

Cette courbe est un arc de *parabole* qu'on a enseigné à tracer p. 592.

Pour avoir la vitesse V dans la direction de la courbe, on pourrait employer l'équation des forces vives, qui donnerait pour cette vitesse au point qui a y pour ordonnée

$$V=\sqrt{u^2+2gy}.$$

74. On obtiendrait, par les mêmes méthodes, toutes les équations suivantes relatives au mouvement d'un projectile dans le vide :

R = A B étant la longueur de la droite inclinée d'une manière quelconque au-dessus de l'horizon, et qui joint le point de départ A du projectile au but B à atteindre. R sera la *portée.*

H = la hauteur due à la vitesse initiale du projectile.

V = cette vitesse initiale en A.

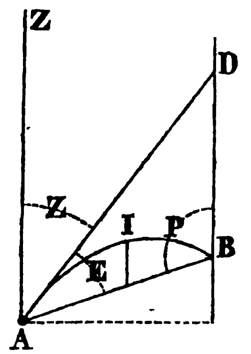
i = la plus grande hauteur verticale du projectile au-dessus du plan.

T = le nombre de secondes écoulées entre le départ du projectile et son arrivée en B.

E = l'angle DAB d'*élévation* compris entre la droite AB = R et la direction de la tangente en A à la trajectoire.

Z = angle compris entre la direction de la tangente en A à la courbe, et la verticale du même point A.

P = angle DBA compris entre la direction BA et la verticale BD passant par le but B.



$$R = \frac{\sin.E \sin.Z}{\sin.^2 P} 4H = \frac{2\sin.E \sin.Z.V^2}{g \sin.^2 P} = \frac{g \sin.Z}{2\sin.E} T^2 = \frac{\sin.Z}{\sin.E}. 4i. \quad (l)$$

$$V = \sqrt{2gH} = \sin.P \sqrt{\frac{gR}{2\sin.E \sin.Z}} = \frac{g \sin.P}{2\sin.E} T = \frac{2\sin.P}{\sin.E}\sqrt{\frac{gi}{2}}. \quad (m)$$

$$T = \frac{2\sin.E}{\sin.P}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{2\sin.E}{g \sin.P} V = \sqrt{\frac{2\sin.E.R}{g \sin.Z}} = \sqrt{\frac{2i}{g}}. \ . \quad (n)$$

$$i = \frac{\sin.E}{4\sin.Z}.R = \frac{\sin.^2 E}{\sin.^2 P}.H = \frac{\sin.^2 E}{\sin.^2 P}\cdot\frac{V^2}{2g} = \frac{1}{8} g T^2. \ . \ . \ . \ . \ . \quad (o)$$

$$H = \frac{\sin.^2 P.R}{4\sin.E \sin.Z} = \frac{V^2}{2g} = \frac{\sin.^2 P}{\sin.^2 E}\cdot\frac{1}{8} g T^2 = \frac{\sin.^2 P}{\sin.^2 E}.i \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (p)$$

On tirerait facilement la valeur de l'angle d'élévation E du plus grand nombre de ces formules. Si AB est horizontal, l'angle DBA = P = 90°, d'où sin. P = 1; d'autre part Z devient le complément de E; enfin sin. E cos. E = 2 sin. 2 E; sin.² E = 2 sin. verse 2 E, etc., il vient, pour ce cas particulier,

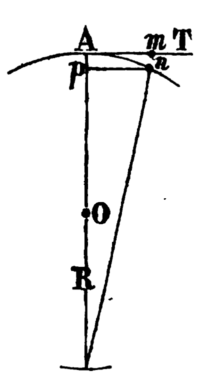
$$R = 4H \sin.E \cos.E = 2H \sin.2E = \sin.2E \frac{V^2}{g} = \frac{gT^2}{2\text{tang}.E} = \frac{4i}{\text{tang}.E} \quad (l')$$

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{gR}{\sin.2E}} = \frac{gT}{2\sin.E} = \frac{2}{\sin.E}\sqrt{\frac{gi}{2}}. \ . \ . \ . \quad (m')$$

$$T = 2\sin.E \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2R\,\text{tang}.E}{g}} = \frac{2\sin.E}{g} V = 2\sqrt{\frac{2i}{g}} \quad (n')$$

$$i = \frac{R.\text{tang}.E}{4} = H \sin.^2 E = \frac{\sin.\text{vers}.2E}{4g}.V^2 = \frac{1}{8} g T^2. \ . \ . \ . \ . \quad (o')$$

$$H = \frac{R}{8\sin.2E} = \frac{V^2}{2g} = \frac{gT^2}{16\sin.\text{vers}.2E} = \frac{i}{\sin.^2 E} = \frac{i}{2\sin.\text{vers}.2E}. \quad (p')$$



75. *Forces centripète et centrifuge.* Un corps de poids P décrit un arc de cercle de rayon R avec une vitesse circulaire V, ce qui ne peut avoir lieu (4) sans qu'une force C le retienne sur la courbe; on demande l'intensité de cette force C.

Si, à un instant quelconque dt du mouvement, le poids P devenait libre, il continuerait évidemment, en vertu de son inertie, à se mouvoir en ligne droite dans la direction AT du dernier élément de la courbe qu'il aurait parcouru. En outre (7), il conserverait sa vitesse V, et parcourrait dès lors, sur cette tangente, dans le temps dt, un espace $Am = Vdt = de$. Or nous supposons qu'une force centrale C, que la tension d'un fil, par exemple, l'oblige à décrire sur la courbe, dans le même temps dt, un arc $An = de = Vdt$ de même développement que Am; la force *infléchissante* C doit donc avoir une intensité telle, que, dans ce même temps dt, elle puisse faire parcourir au corps P, suivant le rayon, le sinus verse Ap de l'arc $An = Am$; donc (15)

$$C = \frac{P}{g} \cdot \frac{2(Ap)}{dt^2}$$

Or, on a, entre l'arc élémentaire An, son sinus verse Ap, et le diamètre $2R$ du cercle (*Géom.* — D. — 33) la relation

$$Ap : An :: An : 2R \quad \text{ou} \quad Ap = \frac{V^2 dt^2}{2R}$$

Il en résulte, pour la valeur de C

$$C = \frac{P}{g}\frac{V^2}{R} \text{ kilogrammes} = \frac{P}{g}\omega^2 R$$

en introduisant la vitesse *angulaire* ω du mobile, ou l'arc de *un* mètre de rayon qu'il décrirait en vertu de sa vitesse $V = \omega R$.

C est la force *centripète;* la force *centrifuge*, précisément égale et de signe contraire, est la réaction correspondante. L'une ou l'autre exprime donc la valeur en kilogrammes de la tension du fil qui retiendrait le poids P dans la courbe, abstraction faite de la gravité.

76. Si le plan de la courbe décrite était vertical, la tension du fil deviendrait évidemment la résultante de la force centrifuge et de la composante normale à la courbe du poids P du mobile. Ainsi V étant supposé constant pour plus de simplicité, et α étant l'angle aigu variable de l'élément du cercle avec la direction de la verticale, passant par cet élément au moment où le poids P le décrit, la tension du fil deviendra

$$\frac{P}{g}\frac{V^2}{R} - P \sin.\alpha = P\left(\frac{V^2}{gR} - \sin.\alpha\right)$$

pendant que le mobile décrira le demi-cercle supérieur, et

$$\frac{P}{g}\,\frac{V^2}{R} + P\sin.\alpha = P\left(\frac{V^2}{gR} + \sin.\alpha\right)$$

pendant qu'il décrira le demi-cercle inférieur; ces tensions deviennent respectivement au haut et au bas du diamètre vertical du cercle, points pour lesquels $\alpha = 90°$ et $\sin.\alpha = 1$

$$P\left(\frac{V^2}{gR} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad P\left(\frac{V^2}{gR} + 1\right)$$

77. On trouverait encore que la pression exercée en vertu de la seule *force centrifuge* sur l'orifice d'un tube entretenu constamment plein de liquide et tournant horizontalement, serait la même que si cet orifice était chargé d'une colonne du même liquide d'une hauteur $h = \frac{V^2}{2g}$ due à sa vitesse circulaire $V = \omega R$.

FOSSILES (coquilles). *Voyez* les *planches* **LXXII**, **LXXIII**, **LXXIV**, **LXXV** et **LXXVI**.

FOURNEAUX *de chaudières à vapeur*. Il semble résulter des expériences de M. *Combes*, savoir :

Que la somme des vides compris entre les barreaux étant le quart de la surface totale S de la grille, et K le nombre de kilogrammes de houille grasse qu'on veut brûler par heure, on doive avoir

$$S = \frac{3}{200}K$$

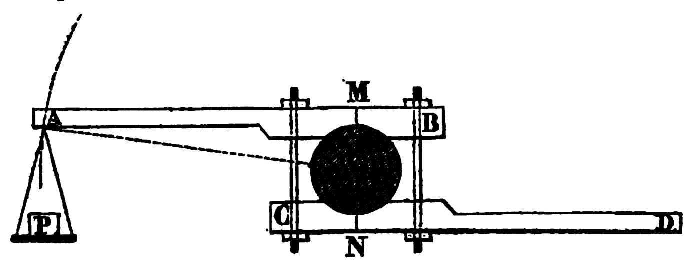
et, pour l'orifice supérieur A de la cheminée (p. 302),

$$A = \tfrac{1}{3}S = \frac{K}{200}$$

la hauteur de cette *cheminée* étant d'environ vingt mètres.

Les carneaux doivent avoir une section A égale à l'orifice supérieur de la cheminée. Enfin il convient, pour diminuer la fumée, d'établir deux conduits débouchant à $0^m.15$, à $0^m.20$ de distance en arrière de la grille, de telle sorte que les courants d'air jaillissent en face l'un de l'autre dans le conduit des gaz inférieur à la chaudière, suivant des directions opposées et perpendiculaires au courant gazeux. Le débouché de chacun de ces conduits aurait une section égale à $\frac{1}{50}$ de la surface S de la grille; et ces conduits devraient être munis de registres, de manière que l'entrée de l'air pût être à volonté interceptée. Les registres seraient ouverts au moment de la charge et après le ringardage, puis ils seraient fermés après un temps déterminé par l'expérience dans chaque cas.

FREIN DYNAMOMÉTRIQUE. Appareil créé par M. *de Prony* à l'occasion des expériences qu'il entreprit sur la machine à vapeur du Gros-Caillou, et qu'il décrivit dans une note publiée en 1826. Le frein est destiné à mesurer le *travail* des moteurs. Dans le principe, il se composait de deux pièces de bois AB, CD, parfaitement symétriques, échancrées circulairement, de manière à mieux embrasser la circonférence de l'arbre O, dont on voulait mesurer le travail; ces deux pièces AB CD étaient reliées entre elles par deux forts boulons, dont on serrait ou desserrait les écrous à volonté. On interrompait pendant l'essai la communication de l'arbre moteur avec la machine, puis, après divers tâtonnements, on parvenait à trouver le poids qui, placé dans le plateau suspendu en A, maintenait le levier AB du frein dans des situations alternatives très-peu éloignées de la direction horizontale, en même temps que le frottement, déterminé par le serrage des boulons, laissait prendre à l'arbre moteur précisément la vitesse uniforme de rotation qu'il acquérait pendant le travail régulier de la machine. Dans cet état, le frottement inconnu F, dont l'intensité s'exerçait à l'extrémité du rayon R de l'arbre moteur, consommait nécessairement, pendant un nombre n de révolutions, un travail $2\pi R n F$ égal à celui que développait habituellement le moteur pendant le travail régulier de la machine, pour un même nombre de révolutions.



E étant dès lors le chemin parcouru dans le même temps t par un point de la circonférence du récepteur que nous supposons, pour fixer les idées, être une roue hydraulique verticale, Q l'effort en kilogrammes exercé en ce même point; faisant d'ailleurs abstraction de l'influence du frottement des tourillons de la roue, on a évidemment

$$QE = 2\pi RFn. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Mais, d'un autre côté, L étant la longueur du levier du frein comptée du point d'attache A du plateau à la direction de la verticale OM passant par l'axe de l'arbre, et P la somme des poids et du plateau suspendus en A, on a, entre les moments du frottement F et du frein l'égalité

$$FR = PL. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

aussi longtemps du moins que le levier du frein reste sensiblement immobile et horizontal. Substituant cette valeur de F R dans l'équation (1), il vient

$$QE = nP\,2\pi L \text{ kilogrammètres,}$$

et si t est le nombre de secondes écoulées pendant que l'arbre a accompli n révolutions, on a, en divisant par t et remarquant que $\frac{E}{t}$ = la vitesse V moyenne et uniforme de l'effort Q,

$$QV = \frac{P \times 2\pi L.n}{t} \text{ kilogrammètres,}$$

pour la mesure du travail moteur QV en une seconde, — mesure qui n'est, à très-peu près, que le *produit de la surcharge du frein, par le chemin que le point d'application* A *de cette surcharge tend à décrire en une seconde autour du centre* O.

Il était toujours assez difficile d'obtenir que le levier demeurât immobile et horizontal; on s'arrangeait alors pour que le point A ne décrivît que des arcs d'une faible amplitude, mais surtout égaux tant en dessus qu'en dessous de sa position normale, et l'on remplaçait alors, dans la formule ci-dessus, la longueur L par un bras de levier *moyen* qu'on obtenait en multipliant L par $\frac{\sin.\alpha}{\alpha}$, α étant la longueur dans le cercle de rayon *un* de la moitié de l'arc total 2α, décrit par le point A autour du centre O.

Cet ingénieux appareil sera longtemps encore employé dans les localités et les usines éloignées, où l'on ne pourrait se procurer les instruments plus commodes et aussi surs, inventés depuis. Il peut être facilement exécuté par le charpentier le plus ordinaire, et à bas prix, mais il a surtout l'inconvénient grave d'obliger à suspendre toute fabrication pendant la durée des expériences. On lui substitue aujourd'hui les *dynamomètres* plus exacts, et surtout plus commodes, que M. le colonel *Morin* a exécutés, et dont il reconnaît devoir le principe à son savant maître et ami M. *Poncelet*. On peut voir au Conservatoire des arts et métiers ces ingénieux appareils décrits d'ailleurs avec figures dans une notice intéressante, publiée par M. Morin en 1841. Ce sont, dans ces dynamomètres, les flexions de lames d'acier qui mesurent les efforts, et ces flexions sont indiquées, pour chacun des instants de l'expérience, par un style, crayon ou pinceau, qui en marque la trace sur une bande de papier qui se déroule devant lui. Quelques-uns portent, en outre, un compteur avec moteur chronométrique. Ceux d'entre eux que M. Morin a nommés *dynamomètres de rotation*, permettent de mesurer le travail d'un arbre moteur, sans que l'on interrompe le travail de l'usine; l'un d'eux est destiné à donner ce travail, avec toutes ses variations, pendant un nombre de révolutions qui peut s'élever de 150 à 450,

et même plus; il peut être appliqué à une ou plusieurs machines à la fois, et transporté de l'une à l'autre avec facilité. L'autre, en conservant les avantages précédents, permet de prolonger les expériences pendant une journée, une semaine, une quinzaine au besoin. Voyez *Notice sur divers appareils dynamométriques propres à mesurer le travail ou l'effort développé par les moteurs animés ou inanimés, ou consommé par les machines de rotation, ainsi que la tension de la vapeur dans le cylindre des machines à vapeur à toutes les positions des pistons*, par A. Morin.

FROID ARTIFICIEL. On l'obtient en mélangeant promptement et d'une manière intime, soit certains sels entre eux, soit des sels et des acides, soit plus communément et plus économiquement des sels ou des acides avec de la neige ou de la glace pilée. Ainsi

1 neige + 1 sel marin abaissent le thermomètre	de 0 à — 17°
2 neige + 3 chlorure de calcium	de 0 à — 27°
3 neige + 4 potasse.	de 0 à — 28°
1 neige + 1 acide sulfurique étendu.	de — 6° à — 51°
2 glace pilée + 1 sel marin.	de — 17° à — 20°
Neige et acide nitrique étendu.	de — 17° à — 45°
1 neige + 2 hydrochlorate de chaux.	de — 17° à — 54°
1 neige + 3 hydrochlorate de chaux.	de — 40° à — 58°
8 neige + 10 acide sulfurique étendu.	de — 55° à — 68°

On fait les mélanges dans des vases minces peu conducteurs; ceux de grès ou de verre sont très-convenables. On met une couche de sel, une couche de neige, puis par-dessus une nouvelle couche de sel, et ainsi de suite, et l'on agite en tous sens avec une spatule de bois.

FROTTEMENTS. Résistances que les corps éprouvent en se mouvant l'un sur l'autre.

Ces résistances ne peuvent être déterminées que par des expériences, et ces expériences présentent des difficultés qui expliquent la discordance des résultats obtenus jusqu'ici, et dont nous donnons ci-dessous un tableau assez complet.

Au sujet de ces difficultés, on remarquera que, dans les pertes de travail que l'on attribue aux seuls frottements, sont toujours comprises celles qui sont dues aux vibrations et aux ébranlements communiqués aux supports des surfaces frottantes; ébranlements d'autant plus considérables que ces supports sont moins bien fixés, moins solidement établis, moins inébranlables en un mot. Il en résulte que l'on porte au compte du frottement des pertes de travail dues en partie à ces ébranlements, et que, dans les expériences, on obtient des résultats qui doivent varier avec le degré de fixité des supports. On ne peut guère douter d'ailleurs que les pertes de travail dues aux ébranlements ne soient considérables par rapport à celles qui proviennent du frottement seul, et il suffit, pour s'en convaincre, de

comparer au faible travail direct qu'eût exigé, par exemple, l'usure d'un tourillon, celui qu'il a fait perdre avant de parvenir à ce même degré d'usure. Je citerai, à ce sujet, l'observation que j'ai eu l'occasion de faire d'un tourillon de roue de marteau en fer, portant sur son palier en fonte sur une longueur de $0^m.14$. Ce tourillon qui, neuf, avait $0^m.065$ de rayon, n'avait plus, après quatorze ans de service, qu'un rayon de $0^m.055$; ce rayon avait donc diminué, par l'effet du frottement de fer sur fonte, de $0^m.01$ en quatorze ans, ou de $0^m.000714$ moyennement en un an. Comme on ne travaillait que 216 jours par an, cette diminution de rayon équivaut à $0^m.0000033$ par jour. Il n'avait jamais été graissé, et était continuellement mouillé d'eau chargée parfois de sable fin ; la résultante des pressions qui agissaient sur lui était d'environ 2000 kil., et il faisait d'ailleurs 9 à 10,000 révolutions par jour. Prenant $0^m.06$ pour son rayon moyen, $0^m.2$ pour le rapport du frottement à la pression, on voit que l'usure d'une lame de $0.14 \times 2\pi \times 0.06 = 0^{mm}.052752$ et de $0^m.0000033$ d'épaisseur, aurait exigé un travail de 1350000 kil.m., ce qui pourra paraître énorme en présence du faible effet produit, et tend bien à montrer, je crois, que c'est en effet à des ébranlements et vibrations que sont dues, en grande partie, les pertes de travail que l'on attribue aux frottements.

S'il en était ainsi, les coefficients, donnés dans les tableaux, ne se rapporteraient qu'à un certain état des supports et non à un autre, et on ne devrait les regarder que comme des moyennes qui augmenteront ou diminueront suivant que les supports et les bâtis des machines auront moins ou plus de fixité, suivant qu'ils vibreront moins ou plus. *Voyez*, à ce sujet, des considérations intéressantes p. 108, du *calcul de l'effet des machines* par M. *Coriolis*.

Quoi qu'il en soit, M. *Morin* a déduit, de ses expériences, les lois générales qui suivent :

1° *Le frottement est proportionnel à la pression ;*

Cette première loi a été soupçonnée par *Amontons*, niée par *Muschembroek* et le docteur *Vince*, reconnue vraie par *Coulomb ;* les expériences de *Rennie* ne la confirment point ;

2° *Le frottement ne dépend que de la nature des corps en contact et de celui de l'enduit ;*

3° *Il est indépendant de l'étendue de la surface de contact ;*

Loi soupçonnée par *Amontons*, niée par *Muschembroek*, par le docteur *Vince* et par *Coulomb* qui regardait le frottement comme dépendant de l'étendue des surfaces en contact entre lesquelles, suivant cet illustre physicien, il se développait souvent une force d'adhérence, dont les tableaux donnent, dans quelques cas, la valeur. Suivant le docteur *Vince*, le frottement diminuerait avec l'étendue de la surface en contact ;

4° *Le frottement est indépendant de la vitesse du mouvement.*

Cette loi est niée par *Muschembroek* et admise partiellement par *Coulomb.*

L'expérience a également montré la nécessité de distinguer deux cas principaux :

1° Celui où les substances ont été quelque temps en contact;

2° Celui où les substances sont depuis quelque temps en mouvement l'une sur l'autre.

Le quotient de l'effort qui doit déterminer le glissement par la pression exercée sur la surface est souvent plus grand dans le premier cas que dans le second.

Entre les divers moyens employés pour déterminer ce quotient, nous nous bornerons à indiquer le suivant :

Angle du frottement, coefficient du frottement. Placez le corps sur un plan, et soit P le poids de ce corps, inclinez le plan jusqu'à ce que le glissement commence; soit à cet instant φ, l'angle du plan avec l'horizon; cet angle est précisément celui qu'on appelle *angle du glissement ou du frottement* des deux substances en contact. En effet, le poids P du corps se décompose à cet instant en une pression $P \cos.\varphi = N$ normale au plan, et en un effort $P \sin.\varphi$, parallèle à la longueur de ce plan, effort qui peut être regardé comme égal et directement opposé à la force totale F due au frottement total qui s'exerce entre les substances du corps et du plan. On a donc

$$\frac{P \sin.\varphi}{P \cos.\varphi} = \frac{F}{N} = f = \text{tang.}\,\varphi$$

c'est ce rapport f du frottement à la pression qu'on appelle proprement le *coefficient du frottement,* et c'est ce nombre que les tables suivantes indiquent. On voit encore que *le coefficient du frottement est la tangente même de l'angle du frottement;* nous avons partout donné la valeur de cet angle, on trouvera dès lors facilement son cosinus et son sinus à la table des SINUS naturels. En général, on a, entre les *coefficients* f et les *angles* φ du frottement, les relations suivantes :

$$\text{tang.}\,\varphi = f = \text{coefficient du frottement,}$$

$$\sin.\varphi = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}; \qquad \cos.\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$$

Frottement de glissement des surfaces planes, après qu'elles ont été quelque temps en contact.

		f	Angle du frottement.	
			° ′	
Briques sur calcaire oolithique.	A plat sans enduit. (M.) (*).	0.67	33 50	
Briques sur muschelkalk.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.67	33 50	
Caisse en bois sur le pavé.	. . . . (Régnier).	0.58	30 7	
Idem sur la terre battue.	. . . . (Herbert).	0.33	18 16	
Chêne sur chêne.	Fibres parallèles. . . . (C.)	0.44	23 45	*f* parvient au maximum au bout de quelques secondes.
Idem, *idem*. . . .	*Idem*. . . . . . . et la surface réduite à des arêtes arrondies. . . . . . . (C.)	0.42	22 47	
Idem, *idem*. . . .	Fibres croisées. . . . (C.)	0.27	15 7	
Idem, *idem*. . . .	Les surfaces garnies d'un enduit renouvelé à chaque expérience. . . . . (C.)	0.38	20 49	*f* parvient au maximum en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 49 kil. par mèt. carré dans le premier cas, et de 39 k. dans le dernier.
Idem, *idem*. . . .	Les mêmes, après un long usage, en mettant du vieux oing. . . . . (C.)	0.21	11 52	
Idem, *idem*. . . .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.62	31 48	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, frottées de savon sec. . . . . (M.)	0.44	23 45	
Idem, *idem*. . . .	Fibres perpendiculaires, sans enduit. . . . . (M.)	0.54	28 22	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.71	35 23	
Idem, *idem*. . . .	Bois debout sur bois à plat, sans enduit. . . . . (M.)	0.43	23 16	
Idem sur orme. .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.38	20 49	
Idem sur sapin. .	Fibres parallèles.. . . (C.)	0.67	33 50	*f* atteint son maximum au bout de quelques secondes.
Idem sur pierre calcaire oolithique.	Bois debout, sans enduit. (M.)	0.63	32 13	
Idem sur muschelkalk.	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.64	32 38	
Corde de chanvre sur chêne. . . .	Fibres parallèles sans enduit. . . . . (M.)	0.80	38 40	

(*) (M.) signifie que l'expérience est de M. *Morin*, et (C.) qu'elle est due à *Coulomb*.

		f	Angle du frottement.	
			° ′	
Courroies en cuir noir corroyé. . .	Sur surface plane en chêne, fibres parallèles sans enduit. . . . . (M.)	0.74	36 30	
Idem, *idem*. . . .	Sur tambour en chêne, fibres perpendiculaires sans enduit. . . . . (M.)	0.47	25 11	
Idem, *idem*. . . .	Sur poulie en fonte à plat, sans enduit. . . . . (M.)	0.28	15 39	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.38	20 49	
Cuir tanné sur chêne.	Le cuir à plat, sans enduit. (M.)	0.61	31 23	
Idem, *idem*. . . .	Le cuir de champ, sans enduit. . . . . (M.)	0.43	23 16	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.79	38 19	
Idem de bœuf pour garniture de piston, sur fonte. .	A plat ou de champ, mouillées d'eau. . . . . . (M.)	0.62	31 48	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, avec huile, suif ou saindoux. . . . . . . (M.)	0.12	6 51	
Cuivre sur chêne.	. . . . (C.)	0.18	10 12	Il n'est pas certain que f eût atteint son maximum.
Idem jaune sur chêne.	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.62	31 48	
Idem sur fer. . . .	. . . . (C.)	0.26	14 35	f atteint son maximum en quelques secondes.
Idem, *idem*. . . .	La surface réduite à des pointes émoussées. . (C.)	0.17	9 38	
Idem, *idem*. . . .	Les surfaces garnies d'un enduit de suif neuf. (C.)	0.11	6 17	f atteint son maximum en quelques heures.
Idem, *idem*. . . .	*Idem idem* d'huile. . . (C.)	0.17	9 38	La résistance de l'adhérence est d'environ 7 kil. par mètre carré.
Idem, *idem*. . . .	*Idem idem* de vieux oing. (C.)	0.14	7 58	
Fer sur chêne. . .	. . . . (C.)	0.20	11 19	Il n'est pas certain que f eût atteint son maximum.
Idem, *idem*. . . .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.62	31 48	
Idem, *idem*. . . .	Fibres parallèles, mouillées d'eau. . . . . (M.)	0.65	33 2	
Id. sur fer.	. . . . (C.)	0.28	15 39	f atteint son maximum en quelques secondes.
Id. sur fonte. . .	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.19	10 46	
Id. sur calcaire oolithique. . . .	*Idem*. . . . . (M.)	0.49	26 7	

		f	Angle du frottement. ° ′	
Fer sur muschelkalk.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.42	22 47	
Fonte sur fonte.	Surfaces très-peu onctueuses. . . . . (M.)	0.16	9 6	
Idem sur chêne.	Mouillées d'eau. . . . (M.)	0.65	33 2	
Frêne sur chêne.	Fibres parallèles sans enduit. . . . . (M.)	0.53	27 56	
Granit poli sur granit brut.	. . . . (Rennie.)	0.66	33 26	
Grès uni sur grès uni..	Avec mortier frais (Rennie.)	0.49	26 7	
Idem, *idem*. . . .	. . . . (Rennie.)	0.71	35 23	
Idem, *idem*. . . .	Avec mortier frais (Rennie.)	0.66	33 26	
Hêtre sur chêne.	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.53	27 56	
Nattes de chanvre sur chêne. . . .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.50	26 34	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.87	41 2	
Orme sur orme.	Fibres parallèles. . . . (C.)	0.46	24 42	f atteint son maximum en quelques secondes.
Idem sur chêne.	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.69	34 37	
Idem, *idem*. . . .	*Idem*, avec savon sec. (M.)	0.41	22 18	
Idem, *idem*. . . .	Fibres perpendiculaires, sans enduit. . . . . (M.)	0.57	29 41	
Pierre de liais (calcaire à grain fin) polie sur pierre de liais polie. .	. . . . (Rondelet.)	0.58	30 7	
Idem de Château-Landon, calcaire dur bouchardé sur calcaire dur bouchardé. . . .	. . . . (Boistard.)	0.78	37 58	
Idem de libage sur un lit d'argile sèche.	. . . . (Lesbros.)	0.51	27 2	
Idem, *idem* sur argile humide et camollie.	. . . . (Lesbros.)	0.34	18 47	
Idem, *idem* sur argile humide recouverte de grosse grève.	. . . . (Lesbros.)	0.40	21 48	
Idem calcaire oolithique sur calcaire oolithique.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.74	36 30	
Idem, *idem*. . . .	Avec mortier de 3 sable fin +1 chaux hydraulique.(M.)	0.74	36 30	Après un quart d'heure de contact.
Idem sur muschelkalk.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.75	36 52	

		f	Angle du frotte-ment.	
			° ′	
Pierre calcaire dure dite muschelkalk sur calcaire oolithique.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.75	36 52	
Idem idem sur muschelkalk.	*Idem*. . . . . (M.)	0.70	35 0	
Sapin sur sapin. .	Fibres parallèles. . . . (C.)	0.56	29 15	f atteint son maximum en quelques secondes.
Idem sur chêne. .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.53	27 56	
Sorbier sur chêne.	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.53	27 56	
Chêne, charme, orme, fer, fonte, bronze, glissant deux à deux l'un sur l'autre. . . .	Surfaces enduites de suif, et lorsque le contact n'a pas duré assez longtemps pour exprimer l'enduit. (M.)	0.10	6 0	
Idem.	*Idem* enduites d'huile ou de saindoux, quand le contact a duré assez longtemps pour exprimer l'enduit et ramener les surfaces à l'état onctueux. (M.)	0.15	8 32	

Coefficients f *du frottement sous des pressions continuellement croissantes, jusqu'à ce que les surfaces en contact soient entamées; par* G. Rennie, 1829.

Les chiffres qui suivent ayant été fournis par des expériences où le corps frottant n'a parcouru que de petits espaces, peuvent être considérés comme se rapportant au cas du frottement au départ et après un contact de quelque durée.

PRESSIONS en kilogrammes par mètre carré.	VALEUR DE f POUR			
	fer sur fer.	fer sur fonte.	acier sur fonte.	cuivre jaune, laiton sur fonte.
k.	m.	m.	m.	m.
131220	0.250	0.275	0.300	0.225
157460	0.271	0.292	0.333	0.219
183700	0.285	0.321	0.340	0.214
209950	0.297	0.329	0.344	0.211
236200	0.312	0.333	0.347	0.215
262440	0.350	0.351	0.351	0.206
288688	0.376	0.353	0.353	0.205
314932	0.376	0.365	0.354	0.208
341176	0.395	0.366	0.356	0.221
367420	0.403	0.366	0.357	0.223
393664	0.409	0.367	0.358	0.233
419908	. . . .	0.367	0.359	0.234
446152	. . . .	0.367	0.367	0.235
472396	. . . .	0.376	0.403	0.233
498640	. . . .	0.434	. . . .	0.234
524884	. . . .	. . . .	. . . .	0.235
551128	. . . .	. . . .	. . . .	0.232
577872	. . . .	. . . .	. . . .	0.273

Frottement de glissement des surfaces planes pendant le mouvement.

			Angle du frottement.	
			° ′	
Acier sur acier.	Enduit de suif, saindoux, huile, cambouis. . . (M.)	0.08	4 35	
Idem.	Surfaces un peu onctueuses. (M.)	0.15	8 32	
Idem.	L'enduit étant sans cesse renouvelé. . . . . . . (M.)	0.05	2 52	
Acier poli sur la glace.	Sous des pressions par mètre carré de 5000 kil. . . .	0.04	2 18	
	de 20000.	0.03	1 43	
	de 180000.	0.014	0 48	
	Ce frottement, d'après Rennie, diminue quand la pression augmente.			
Benne sur le sol d'une galerie de mine.	. . . . (Gervoy) de	0.27	15 7	
Idem.	. . . . à	0.41	22 18	
Idem.	. . . . . . habituellement	0.32	17 45	
Brique sur calcaire oolithique.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.65	33 2	
Idem sur muschelkalk.	*Idem*. . . . . (M.)	0.60	30 58	
Bronze sur bronze.	*Idem*. . . . . (M.)	0.20	11 19	
Idem sur fer.	Les surfaces un peu onctueuses. . . . . . . (M.)	0.16	9 6	
Idem sur fonte.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.22	12 25	
Chanvre en brins ou en corde sur chêne.	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.52	27 29	
Idem.	Fibres perpendiculaires, mouillées d'eau. . . (M.)	0.33	18 16	
Idem.	Au maximum, d'après M. Lebas, dans les circonstances les plus défavorables. . . .	0.222	12 31	
Chêne sur chêne.	Fibres parallèles. . . . (C.)	0.11	6 17	
Idem.	*Idem*, sans enduit. . (M.)	0.48	25 39	
Idem.	Les surfaces réduites à des arêtes arrondies. . . (C.)	0.08	4 35	
Idem.	Fibres parallèles, frottées de savon sec. . . . . . (M.)	0.16	9 6	
Idem.	*Idem*, enduit de suif ou de vieux oing, renouvelé à chaque essai. . . . . (C.)	0.035	2 0	L'adhérence occasionne une résistance d'environ 30 kil. par mètre carré.
Idem.	La surface réduite à des arêtes arrondies avec l'enduit, ou l'enduit essuyé, et les surfaces restant onctueuses. . . . . (C.)	0.06	3 26	

		f	Angle du frottement.
Chêne sur chêne.	Fibres perpendiculaires et sans enduit. . . . . (M.)	0.34	18° 47
Idem.	*Idem* et mouillées d'eau. (M.)	0.25	14 3
Idem.	Bois debout sur bois à plat, sans enduit. . . . . (M.)	0.19	10 46
Idem.	Fibres croisées. . . . . (C.)	0.10	5 43
Idem.	Et la surface réduite à des arêtes arrondies. . . (C.)	0.10	5 43
Idem sur calcaire oolithique. . . .	Bois debout, sans enduit. (M.)	0.38	20 49
Idem sur muschel-kalk.	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.38	20 49
Idem sur fer. . .	Fibres parallèles, la vitesse étant très-petite. . . (C.)	0.08	4 35
Idem.	A la vitesse de $0^m.30$ par seconde. . . . . (C.)	0.17	9 39
Idem.	Les surfaces étant très-petites sans enduit, mais onctueuses. . . . . . (C.)	0.07	4 0
Idem sur fonte. .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.38	20 49
Idem sur sapin. .	Fibres parallèles. . . . (C.)	0.16	9 6
Cuir noir corroyé sur chêne. . . .	*Idem*, sans enduit. . (M.)	0.27	15 7
Idem tanné sur chêne.	A plat ou de champ, sans enduit. . . . . (M.) à	0.30 0.35	16 42 19 18
Idem.	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.29	16 11
Idem sur fonte et sur bronze. . . .	A plat ou de champ, sans enduit. . . . . (M.)	0.56	29 15
Idem.	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.36	19 48
Idem.	*Idem*, onctueuses et mouillées d'eau. . . . . . (M.)	0.23	12 58
Idem.	*Idem*, enduites d'huile. (M.)	0.15	8 32
Cuivre sur fer. . .	. . . . (C.)	0.24	13 30
Idem.	Après un long user. . (C.)	0.17	9 39
Idem.	Avec enduit de suif renouvelé. . . . . (C.)	0.10	5 43 L'adhérence produit une résistance d'environ 7 kil. par mètre carré.
Idem.	Avec de l'huile sur un ancien enduit de suif. . . . (C.)	0.12	6 51 Adhérence à peu près nulle.
Idem.	La surface réduite à des pointes émoussées restant onctueuses ou enduites de suif et d'huile.	0.12	6 51
Idem jaune sur chêne.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.62	31 48
Fer sur chêne. . .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.62	31 48

		f	Angle du frottement.	
			° ′	
Fer sur chêne. . .	Fibres parallèles, mouillées d'eau. . . . . (M.)	0.26	14 35	
Idem.	*Idem*, frottées de savon sec. (M.)	0.21	11 52	
Idem sur fer. . . .	. . . . (C.)	0.28	15 39	f diminue par un long user.
Idem.	Fibres parallèles, d'après M. Morin, les surfaces se rodent dès qu'il n'y a pas d'enduit.			
Idem.	Avec enduit de suif renouvelé. . . . . (C.)	0.10	5 43	L'adhérence produit une résistance d'environ 14 kil. par mètre carré.
Id. sur fonte et sur bronze.	Fibres parallèles, sans enduit, un peu onctueuses. (M.)	0.18	10 13	
Idem sur calcaire oolithique. . . .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.69	34 37	
Idem sur muschelkalk.	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.24	13 30	
Idem.	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.30	16 42	
Idem sur orme. . .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.25	14 3	
Fonte sur fonte et sur bronze. . .	*Idem*, sans enduit, un peu onctueuses. . . . . (M.)	0.15	8 32	
Idem sur chêne. .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.49	26 7	
Idem.	*Idem*, mouillées d'eau. (M.)	0.22	12 25	
Idem.	*Idem*, frottées de savon sec. (M.)	0.19	10 46	
Idem sur orme. . .	*Idem*, sans enduit. . . (M.)	0.20	11 19	
Frêne sur chêne. .	*Idem*, *idem*. . . . (M.) de	0.36	19 48	
Idem.	. . . . à	0.40	21 49	
La glace sur la glace.	Sous une pression par mètre carré de 1500 kil.	0.03	1 43	Rennie. Ce frottement diminue quand la pression augmente.
	de 6000.	0.02	1 9	
Hêtre sur chêne. .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . . . (M.) de	0.36	19 48	
Idem.	. . . . à	0.40	21 49	
Orme sur orme. .	. . . . (C.)	0.10	5 43	
Idem sur chêne. .	*Idem*, sans enduit. . (M.)	0.43	23 17	
Idem.	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.25	14 3	
Idem.	Fibres perpendiculaires, sans enduit. . . . . (M.)	0.45	24 14	
Idem sur fonte. . .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . (M.)	0.38	20 49	
Poirier sur chêne.	*Idem*, *idem*. . . . . (M.) de	0.36	19 48	
Idem.	. . . . à	0.40	21 49	
Idem sur fonte. .	*Idem*, *idem*. . . . . . (M.)	0.44	23 45	
Pierre calcaire oolithique sur pierre calcaire oolithique.	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.64	32 37	

		f	Angle de frottement.
Pierre calcaire oolithique sur muschelkalk. . . .	Sans enduit. . . . . . (M.)	0.65	33° 2′
Idem calcaire dite muschelkalk sur muschelkalk. . .	*Idem, idem.* . . . . . . (M.)	0.38	20 49
Idem sur calcaire oolithique. . . .	*Idem, idem.* . . . . . . (M.)	0.67	33 50
Sapin sur sapin. .	. . . . (C.)	0.17	9 39
Idem sur chêne. .	Fibres parallèles, sans enduit. . . . . . . (M.) de	0.36	19 48
Idem.	. . . . à	0.40	21 49
Sorbier sur chêne.	*Idem, idem.* . . . (M.) de	0.36	19 48
Idem..	. . . . à	0.40	21 49
Chêne, charme, orme, poirier, fonte, fer, acier, bronze glissant l'un sur l'autre ou sur eux-mêmes.	Lubréfiés à la manière ordinaire, avec enduit de suif. saindoux, huile, cambouis, etc. . . . (M.) de	0.07	4 1
Idem.	. . . . à	0.08	4 35
Idem..	L'enduit étant sans cesse renouvelé et uniformément réparti, f peut s'abaisser à	0.05	2 52
Idem..	Surfaces légèrement onctueuses au toucher. (M.)	0.15	8 32

Frottement des pistons dans les corps de pompe. Je ne connais d'autres expériences directes que celles que *D'Aubuisson* nous a transmises d'après les auteurs allemands. Il en résulte que la résistance en kilogrammes R due au frottement, dépend surtout du degré de poli du corps de pompe, et que, quelle que soit la garniture du piston, cette résistance est le produit du diamètre D, par la charge d'eau H, multiplié par un coefficient m

$$R = D\,H\,m$$

m prend les valeurs suivantes, savoir :

Pour les corps en laiton bien poli. . . . . 7 kil.
fonte simplement forée. 15
bois assez lisse. 25
bois dégradé par l'usage. 50

Frottement des axes ou tourillons en mouvement dans leurs boîtes ou sur leurs coussinets.

		f	Angle du frottement.
Tourillons en BRONZE sur coussinets en BRONZE.	Avec enduit d'huile (renouvelés à la manière ordinaire) (M.)	0.10	5° 43'
Idem, idem.	*Idem*. . . . de suif (renouvelés à la manière ordinaire) (M.)	0.093	5 19
Tourillons en BRONZE sur coussinets en FONTE.	Enduit d'huile. . . (continuellement renouvelés) (M.)	0.052	2 58
Idem, idem.	*Idem* de suif. . . (continuellement renouvelés) (M.)	0.045	2 34
Axe de BUIS dans une boîte de GAÏAC. . . .	Enduit de suif. . . . . . . (C.)	0.043	2 28
Idem, idem.	L'enduit essuyé et les surfaces seulement onctueuses. . . (C.)	0.07	4 0
Axe de BUIS dans une boîte d'ORME.	Enduit de suif. . .. . (C.)	0.035	2 0
Idem, idem.	L'enduit essuyé et les surfaces restant onctueuses. . . . (C.)	0.05	2 52
Axe de CHÊNE VERT dans une boîte de GAÏAC.	Enduit de suif. . . . . . . (C.)	0.038	2 10
Idem, idem.	L'enduit essuyé et les surfaces seulement onctueuses. . . (C.)	0.06	3 26
Idem, idem	Après avoir servi longtemps sans qu'on eût rafraîchi l'enduit.(C.)	0.07	4 0
Axe de CHÊNE VERT dans une boîte d'ORME.	Enduit de suif.. . . . . . . (C.)	0.03	1 43
Idem, idem.	L'enduit essuyé et les surfaces onctueuses. . . . . (C,)	0.05	2 52
Axe de FER dans une boîte en CUIVRE. . .	. . . . (C.)	0.155	8 48
Idem, idem.	Avec enduit de suif. . . . (C.)	0.085	4 51
Idem, idem.	Enduit de vieux oing. . . . (C.)	0.12	6 50
Idem, idem.	Les surfaces pénétrées par le suif et restant onctueuses. . . (C.)	0.127	7 14
Idem, idem.	Enduit d'huile.. . . . . . . (C.)	0.13	7 24
Idem, idem.	Enduit qui n'avait pas été renouvelé depuis longtemps, quoique la machine eût servi continuellement.. . . . . . . (C.)	0.133	7 34
Tourillons en FER sur coussinets en BRONZE.	Enduit d'huile, de saindoux ou de suif, l'enduit étant sans cesse renouvelé. . . . . (M.)	0.054	3 6
Idem, idem.	*Idem, idem*, l'enduit étant renouvelé à la manière ordinaire. (M.) de	0.07	4 0
Idem, idem.	. . . . à	0.08	4 35

		f	Angle du frottement.
Tourillons en FER sur coussinets en FONTE.	Enduit de saindoux et de plombagine, qui n'est pas sans cesse renouvelé.. . . . . (M.)	0.111	6° 20'
Idem, idem.	Enduit de cambouis un peu dur, ou d'asphalte. . . . . . . (M.)	0.09	5 9
Idem, idem.	Les surfaces onctueuses, mais mouillées d'eau, cas auquel elles commencent à se roder. (M.)	0.189	10 42
Tourillons en FER sur coussinets en FONTE.	Enduit d'huile, de saindoux ou de suif, sans cesse renouvelé. (M.)	0.054	3 6
Idem, idem.	*Idem, idem*, renouvelé à la manière ordinaire. . . . (M.) de	0.07	4 0
Idem, idem.	. . . . à	0.08	4 35
Tourillons en FER sur coussinets en GAÏAC.	Les enduits renouvelés à la manière ordinaire et enduit d'huile. . . . . (M.)	0.114	6 30
Idem, idem.	*Idem, idem*, de saindoux. . (M.)	0.135	7 41
Idem, idem.	Les surfaces onctueuses. . (M.)	0.188	10 39
Tourillons en FONTE sur coussinets en FONTE.	Enduit d'huile, de saindoux, de suif, sans cesse renouvelé.(M.)	0.054	3 6
Idem, idem.	*Idem, idem*, renouvelé à la manière ordinaire. . . . (M.) de	0.07	4 0
Idem, idem.	. . . . à	0.08	4 35
Idem, idem.	*Idem,idem* et mouillées d'eau.(M.)	0.079	4 31
Idem, idem.	Enduit d'asphalte. . . . . . (M.)	0.054	3 6
Idem, idem.	Onctueuses. . . . . (M.)	0.137	7 48
Idem, idem.	*Idem* et mouillées d'eau. . (M.)	0.137	7 48
Idem, idem.	Très-onctueuses ou avec enduit renouvelé à la manière ordinaire. . . . . (M.)	0.073	4 11
Idem, idem.	Très-onctueuses et mouillées d'eau. . . . . (M.)	0.073	4 11
Tourillons en FONTE sur coussinets en BRONZE.	Enduit d'huile, de saindoux, de suif, sans cesse renouvelé.(M.)	0.054	3 6
Idem, idem.	Enduit renouvelé à la manière ordinaire. . . . . . . (M.) de	0.07	4 0
Idem, idem.	. . . . à	0.08	4 35
Idem, idem.	Enduit de cambouis mou. . . .	0.065	3 44
Idem, idem.	Onctueuses. . . . . (M.)	0.166	9 26
Idem, idem.	Très-peu onctueuses, cas auquel les surfaces commencent à se roder.. . . . . (M.)	0.194	10 59
Idem, idem.	Onctueuses et mouillées d'eau(M.)	0.161	9 9
Idem, idem.	*Idem* d'asphalte. . . . . . . (M.)	0.091	5 12
Idem, idem.	*Idem, id.* et mouillées d'eau. (M.)	0.086	4 57

		f	Angle du frottement.
			° ′
Tourillons en FONTE sur coussinets en GAÏAC.	Sans enduit. . . . . (M.)	0.185	10 29
Idem, idem.	Enduits d'huile, de suif, continuellement renouvelé. . (M.)	0.092	5 16
Idem, idem.	Enduits de saindoux et de plombagine. . . . . (M.)	0.109	6 13
Idem, idem.	Onctueux après enduit d'huile. (M.)	0.100	5 43
Idem, idem.	*Idem* après enduit de saindoux et de plombagine.. . . . (M.)	0.143	8 8
Tourillons en GAÏAC sur coussinets en FONTE.	Enduits de saindoux. . . . (M.)	0.116	6 37
Idem, idem.	Onctueux. . . . . (M.)	0.153	8 42
Tourillons en GAÏAC sur coussinets en GAÏAC.	Enduits de saindoux continuellement renouvelé.. . . . . (M.)	0.07	4 35

FROTTEMENT DE ROULEMENT. Les observations peu nombreuses de *Coulomb* avaient montré que

1° La résistance au roulement est proportionnelle à la pression et en raison inverse du rayon des rouleaux.

M. *Morin* a confirmé ces résultats, et prouvé en outre que

2° A poids et à diamètres égaux, la résistance au roulement augmente quand la largeur de contact des rouleaux diminue, lorsque le roulement s'opère sur des corps compressibles.

Soient donc

F l'effort directement appliqué à l'essieu d'un rouleau, et qui suffit à vaincre la résistance que la circonférence du rouleau éprouve de la part du plan horizontal sur lequel elle se développe;

R le rayon de ce rouleau;

W son poids et celui de la charge portée sur son essieu, essieu dont on néglige ici le frottement propre;

A un coefficient constant dépendant de la nature du rouleau et de celle du plan, et qui exprime pour ce rouleau et ce plan la résistance relative à une pression de 1 kilog. et à un rayon de 1 mèt.

On a

$$F = A \frac{W}{R}$$

Voici diverses valeurs de A calculées par M. *Poncelet,* d'après les observations qu'il a recueillies :

Roues de voitures garnies de bandes de fer roulant sur une chaussée horizontale :

En sable ou cailloutis nouvellement placés.	0.0634
En empierrement, à l'état ordinaire d'entretien.	0.0414
Pavée dans le même état } vitesse de $0^m.8$ à $1^m.00$ par seconde.	0.0238
Idem en carreaux.. . . } vitesse de $0^m.8$ à $1^m.00$ par seconde.	0.0185
En terre ferme et unie.	0.0185
En empierrement et aussi parfaitement roulante que les routes anglaises.	0.0150
En madriers de chêne brut.	0.0102

Roues en fonte sur ornières en fer horizontales :

Plates et dans l'état habituel.	0.0035
Etroites et saillantes *idem*.	0.0012
Idem parfaitement entretenues et époussetées.	0.0007

Rouleaux en bois d'orme ou de chêne :

Sur un pavé uni.	0.0074

Rouleaux d'orme :

Sur un sol horizontal en bois de chêne.	0.0016

Rouleaux de gaïac :

Sur un sol horizontal en bois de chêne.	0.001

FULTON (Robert), ingénieur, né en Pensylvanie, de parents irlandais, en 1765, mort à New-York le 24 février 1815. Il fut l'un des promoteurs les plus actifs de la navigation par la vapeur. (Voy. *Bateaux*.)

FUSIL D'INFANTERIE à pierre; diamètre moyen du canon, $0^m.0177$; — charge de poudre, $0^k.0095$ + l'amorce $0^k.001$ = $0^k.0105$; — diamètre de la balle, $0^m.0163$; — poids de la balle, $0^k.0256$. Il porte la balle à

100^m, . . 125^m. . . 150^m. . . 175^m. . . 200^m

sous des angles

0°.10'. . 0°.15'. . 0°.20'. . 0°.25'. . 0°.33'

A une distance plus grande, le fusil ne conserve pas assez de justesse pour être redoutable, mais sa portée peut s'élever à 600^m et au delà, sous un angle de 4 à 5 degrés. — Il peut tirer plus de 25000 coups sans être hors de service. — En temps de guerre un fusil ne tire pas 500 coups par année.

La vitesse initiale de la balle avec la charge réglementaire ci-dessus est de 454 mètres. — Pour d'autres charges, la force vive du projectile est proportionnelle à ces charges.

FUSION. Je donne ci-dessous les *points* de fusion que j'ai pu recueillir jusqu'ici :

Aciers, les plus fusibles	1300°	Pouillet.
Idem. . les moins fusibles	1400	*Idem*.
Argent.	1023	Daniel.

Argent	1034°	Guyton.
Idem	999	Prinsep.
Idem	1000	Pouillet.
9 argent + 1 or	1048	Prinsep.
3 argent + 1 or	1121	*Idem.*
Arséniures métalliques	1062	X.
Antimoine	512	Guyton.
Bismuth	246	Crichton.
Idem	241	Guyton.
Idem	265	Rudberg.
Idem	264	Ehrman.
Cire blanchie	68	X.
Idem non blanchie	61	X.
Cuivre brut	1027	X.
Cuivre	1091	Daniel.
Idem	1207	Guyton.
Idem	1173	Platner.
Etain	228	Crichton.
Idem	267	Guyton.
Idem	228	Rudberg.
Idem	250	Kupffer.
Idem	225	Ehrmann.
Fer	1500	Pouillet.
Idem à	1600	*Idem.*
Fontes blanches très-fusibles	1050	*Idem.*
Idem peu fusibles	1100	*Idem.*
Idem grises très-fusibles	1200	*Idem.*
Idem grises peu fusibles, environ	1200	*Idem.*
Idem sans désignation	1530	Daniel.
Litharge	954	X.
Laitier, verdâtre, un peu vitreux	1331	X.
Idem gris foncé, un peu vitreux	1360	X.
Idem gris foncé, légèrement vitreux	1345	X.
Idem d'un haut-fourneau qui donnait de la fonte nº 4	1388	X.
Idem à cassure vitreuse	1388	X.
Mercure, bout à	350	Dulong et Petit.
Or	1102	Daniel.
Id.	1163	*Idem.*
Id.	1380	Guyton.
Id.	1200	Pouillet.
Platine	2534	Plattner.
Plomb	322	Crichton.
Idem	322	Guyton.
Idem	325	Rudberg.
Idem	334	Kupffer.
Scories de cuivre brut	1345	X.
Idem d'étain pures	1317	X.
Idem *idem* en bloc, aspect vitreux	1317	X.
Idem de puddlage	1431	X.
Idem noires, légères, avec éclat métallique	1431	X.
Soufre	109	X.
Sulfures métalliques	1000	X.
Idem à	1050	X.
Suif à	33	X.

G

GALILÉE (Galilei), né à Pise, le 18 février 1564, mort le 9 janvier 1642.

GÉOMÉTRIE ET TRIGONOMÉTRIE.

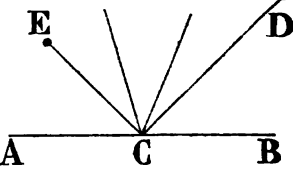
(A). *Propriétés des droites et de leur rencontre.*

1. Une droite ne peut rencontrer une autre droite qu'en un seul point.

2. Deux angles sont égaux, lorsque, étant posés l'un sur l'autre, leurs côtés se couvrent parfaitement quant à la direction.

3. Tous les angles droits sont égaux.

4. La somme de tous les angles qu'on peut former d'un même côté d'une droite, en prenant l'un quelconque de ses points pour sommet, = 2 angles droits, quel que soit le nombre de ces angles.



Réciproquement, si la somme des angles formés en C d'un même côté de AB égale deux angles droits, AB est une ligne droite.

5. Deux droites qui se traversent forment autour de leur intersection quatre angles dont la somme équivaut à quatre angles droits.

6. Les angles opposés par le sommet sont égaux.

7. Par un point pris sur une droite ou hors du prolongement d'une droite, on ne peut conduire qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

8. La somme DC + CE des obliques menées de deux points quelconques D, E à une droite AB, est la plus petite possible, lorsque les angles DCB, ECA, dirigés en sens contraire, sont égaux.

9. Lorsque par un point pris hors d'une droite, on mène plusieurs lignes à différents points de cette droite, 1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ; 2° les obliques conduites d'un point quelconque de la perpendiculaire et qui s'écartent également de son pied, sont égales ; 3° de deux obliques inégales, la plus longue est celle qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire ; 4° deux obliques, qui sont égales, tombent nécessairement de différents côtés de la perpendiculaire, mais à égale distance de son pied.

10. D'un point à une droite, on ne saurait tirer trois droites égales.

11. La perpendiculaire étant la plus courte des lignes qu'on peut mener d'un point à une droite, mesure la vraie distance de ce point à la droite.

12. Lorsqu'elle tombe sur le milieu de cette droite, elle a tous ses points à égale distance des deux extrémités, et tous les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement éloignés de ces extrémités.

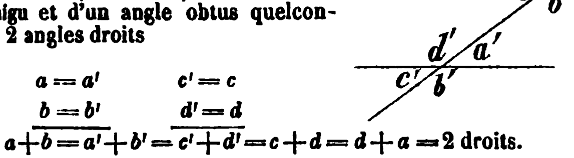
13. Deux droites perpendiculaires à une troisième ne se rencontrent point, quelque prolongées qu'on les suppose, et par conséquent sont parallèles, à moins qu'elles ne soient pas dans le même plan.

14. Une droite étant perpendiculaire à une autre droite, toute oblique à celle-ci, suffisamment prolongée, rencontrera nécessairement la première.

15. Lorsque deux droites sont parallèles, toutes celles qui, dans le plan de ces droites, sont perpendiculaires à l'une, sont en même temps perpendiculaires à l'autre.

16. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

17. Lorsque deux parallèles sont coupées par une droite, tous les angles aigus de la figure sont égaux entre eux, ainsi que tous les angles obtus ; en outre, la somme d'un angle aigu et d'un angle obtus quelconques = 2 angles droits



$$a = a' \qquad c' = c$$
$$b = b' \qquad d' = d$$
$$a + b = a' + b' = c' + d' = c + d = d + a = 2 \text{ droits.}$$

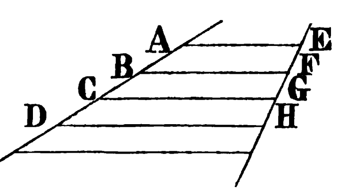
18. Réciproquement, lorsque l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites sont nécessairement parallèles.

19. Deux droites respectivement perpendiculaires à deux autres droites qui se coupent, doivent nécessairement se rencontrer sous le même angle que celles-ci.

20. Les angles qui ont les côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens, sont égaux.

21. Les parties de parallèles interceptées entre parallèles, sont égales, et réciproquement si l'on a à la fois BD = AC et AB = CD. BD est parallèle à AC, et CD est parallèle à AB. Enfin, si AC et BD sont égales et parallèles, AB et CD seront de même égales et parallèles.

22. Si deux droites quelconques sont coupées par un nombre n quelconque de parallèles menées par des points pris à égales distances sur l'une d'elles AD, les parties de la seconde droite EH comprises entre ces parallèles sont aussi égales entre elles, et l'on a

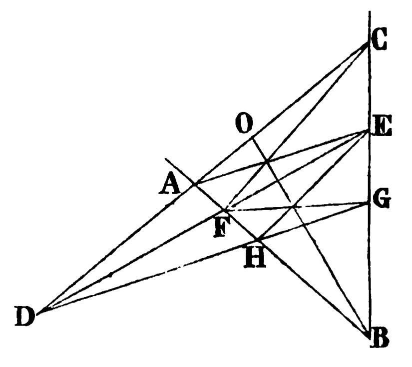


$$n \times AB : n \times EF :: AD : EF.$$

23. Trois parallèles DH, BF, AE coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles, et l'on a

$$AB : BD :: EF : FH$$

24. Si, par un point quelconque D pris dans le plan de deux droites AB, BC en dedans ou en dehors de l'angle ABC, on conduit plusieurs sécantes DC DE DG, et, si l'on joint les intersections de celles-ci par de nouvelles droites CF AE EH FG, les intersections de ces dernières seront toutes situées sur une même droite OB, laquelle passera par le point de concours B des premières droites AB BC.



(B.) *Triangles. — Leurs propriétés.*

1. Un côté quelconque d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres; et, pour qu'un triangle puisse être construit avec trois lignes données, il faut que l'une quelconque de ces lignes soit plus petite que la somme des deux autres.

2. Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point quelconque d'où l'on conduise deux droites aux extrémités d'un des côtés, la somme de ces droites enveloppées sera toujours plus petite que celle des droites enveloppantes qui s'appuient sur la même base.

3. Si deux côtés a b d'un triangle ABC sont respectivement égaux à deux côtés a' b' d'un autre triangle A′ B′ C′, et si l'angle C compris entre les deux premiers est $<$ celui C′ compris entre les deux derniers, on a nécessairement côté $c <$ coté c'.

4. Lorsque deux côtés d'un même triangle sont égaux, les angles qui sont opposés à ces côtés sont égaux, et si les deux côtés sont inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle.

5. Réciproquement, si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux, et si les deux angles sont inégaux, un plus grand côté est opposé au plus grand angle.

6. Un triangle équilatéral est nécessairement équiangle, et réciproquement un triangle équiangle est nécessairement équilatéral.

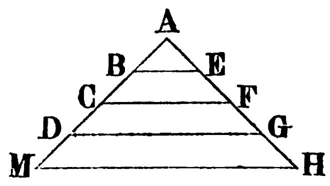
7. La somme des trois angles de tout triangle = 2 angles droits.

8. Un triangle ne peut donc avoir qu'un seul angle droit et *à fortiori* qu'un seul angle obtus.

9. Si l'on prolonge un côté quelconque d'un triangle, on forme un angle extérieur qui vaut toujours à lui seul la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas contigus.

10. Lorsque deux angles A, B d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles A′ B′ d'un autre triangle, le troisième angle C du premier = le troisième angle C′ du second.

11. Les droites parallèles qui divisent l'un des côtés AM d'un triangle en parties égales, divisent pareillement en parties égales l'autre côté AH de ce triangle, et si ces droites sont parallèles au troisième côté MH, on a



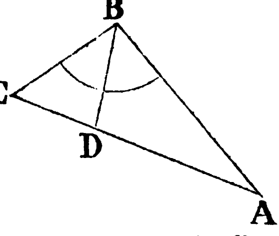
AB : AE :: AD : AG :: $n \times$ AB : $n \times$ AE

n étant un nombre quelconque.

12. Réciproquement, si deux côtés d'un triangle sont coupés par une droite CF en parties proportionnelles, cette droite CF sera parallèle au troisième côté MH.

13. La droite qui divise en deux parties égales l'un des angles B d'un triangle, partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents, de sorte que l'on a

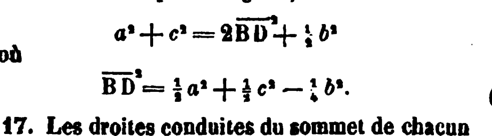

AD : AB :: CD : CB.... AD $\times$ CB = AB $\times$ CD



14. Réciproquement, si les côtés CB, AB sont entre eux comme les segments CD, AD, la droite BD coupe l'angle B en deux parties égales.

15. Les droites qui divisent en deux parties égales chacun des angles d'un triangle, se coupent toutes trois en un même point.

16. La droite BD qui, partant du sommet B d'un triangle quelconque, coupe le côté opposé CA = b en deux parties égales, donne la relation



$$a^2 + c^2 = 2\overline{BD}^2 + \tfrac{1}{2}b^2$$

d'où

$$\overline{BD}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2.$$

17. Les droites conduites du sommet de chacun des angles d'un triangle au milieu du côté opposé, se coupent en un même point; ce point divise les droites en deux parties, qui sont entre elles :: 2 : 1; enfin les trois triangles partiels sont équivalents entre eux.

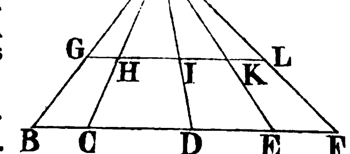
18. Les trois perpendiculaires qu'on élève sur le milieu de chacun des côtés d'un triangle se coupent en un même point, et ce point est également éloigné des trois sommets.

19. Les perpendiculaires abaissées de chacun des sommets d'un triangle sur le côté opposé, se coupent en un même point.

20. Tant de lignes qu'on voudra mener du sommet A d'un triangle à sa base, sont coupées par une parallèle G L à cette base en parties proportionnelles, et réciproquement, toutes les lignes menées de A coupent les parallèles G L B F en parties proportionnelles

AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: ....

BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: ....



21. *Conditions d'égalité.* Deux triangles sont égaux, savoir :

S'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun;

S'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun;

S'ils ont trois côtés égaux, chacun à chacun;

S'ils ont leurs périmètres égaux, un côté égal et l'angle adjacent égal;

Si, ayant leurs bases égales, les perpendiculaires menées des extrémités de ces bases sur les autres côtés, sont égales chacune à chacune;

S'ils ont un angle égal, un côté adjacent égal et la distance de ce côté au sommet opposé égale;

S'ils ont un angle égal et deux perpendiculaires menées des angles sur les côtés, égales chacune à chacune;

S'ils sont isocèles et qu'ils aient des bases égales et l'angle au sommet égal.

22. Si les triangles sont *rectangles*, il suffit, pour qu'ils soient égaux :

Qu'ils aient un angle aigu égal, chacun à chacun, et des hypothénuses égales;

Ou les hypothéneuses égales, et de plus un côté égal, chacun à chacun;

Ou leurs hypothénuses égales, ainsi que les perpendiculaires menées des sommets sur ces hypothénuses.

Les triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents.

23. Deux triangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

24. Les triangles qui ont un angle commun, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

25. *Conditions de similitude.* Deux triangles sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont à la fois leurs angles égaux, chacun à chacun, et leurs côtés homologues proportionnels, savoir :

S'ils ont seulement leurs angles égaux;

S'ils ont seulement deux angles égaux, chacun à chacun;

Si leurs côtés sont respectivemeut parallèles;

Si leurs côtés sont respectivement perpendiculaires, les côtés homologues sont alors ceux qui sont perpendiculaires entre eux;

S'ils ont un angle égal, chacun à chacun, compris entre côtés proportionnels;

S'ils ont les côtés proportionnels, chacun à chacun;

Si leurs périmètres sont entre eux comme leurs bases, et s'ils ont de plus un angle égal;

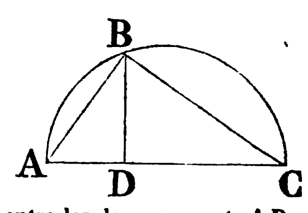
Si, ayant un angle égal, ils ont en outre deux hauteurs proportionnelles;

Si, ayant un angle égal, leurs hauteurs sont entre elles comme leurs bases,

26. Si, étant isocèles, ils ont un angle égal.

27. Si, étant rectangles, les hypothénuses sont entre elles comme les hauteurs menées des angles droits.

28. Si, de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire BD sur l'hypothénuse, elle partagera ABC en deux triangles ABD, BDC rectangles, semblables entre eux et au triangle total ABC, — elle divisera l'hypothénuse en deux segments AD, DC, tels que chaque côté de l'angle droit ABC, sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypothénuse entière; — la perpendiculaire BD sera moyenne proportionnelle entre les deux segments AD, DC. Ainsi :



$$AD : AB :: AB : AC \ldots\ldots \overline{AB}^2 = AD \times AC$$

$$CD : BC :: BC : AC \ldots\ldots \overline{BC}^2 = CD \times AC$$

$$AD : BD :: BD : DC \ldots\ldots \overline{BD}^2 = AD \times DC$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

et $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: AD : DC : AC$ donc :

29. Le carré de l'hypothénuse = la somme des carrés des deux autres côtés, et

30. Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypothénuse, sont entre eux comme les segments adjacents et l'hypothénuse entière.

31. Si l'on joint par des droites extérieures les sommets des carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle, il en résultera trois triangles extérieurs équivalents chacun au premier.

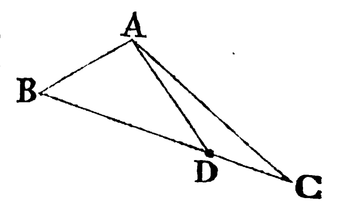
32. Dans tout triangle rectiligne, le carré d'un côté quelconque = la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces deux autres côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment : on a donc, en désignant par A, B, C les angles du triangle, et par a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C$$

33. Si l'on prend un point quelconque D sur la base BC d'un triangle *scalène*, on a toujours

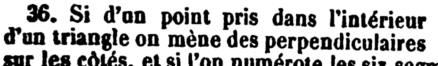


$$\overline{AB}^2 \times DC + \overline{AC}^2 \times BD =$$

$$\overline{AD}^2 \times BC + BC \times BD \times BC$$

34. Dans tout triangle, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles, et, dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés quelconques est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces mêmes côtés, est à la tangente de leur demi-différence.

35. Soit pris un point O quelconque à l'intérieur d'un triangle, et soient menées de chaque angle A, B, C et par ce point les droites An, Bp, Cm sur les côtés opposés, elles détermineront sur chacun de ces côtés deux segments tels, que le produit de trois segments non contigus sera égal au produit des trois autres



$$\frac{Ap \times Cn \times Bm}{pC \times nB \times mA} = 1$$

36. Si d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des perpendiculaires sur les côtés, et si l'on numérote les six segments en suivant le périmètre dans le même sens, les carrés des segments impairs donneront une somme égale à celle des carrés des segments pairs.

37. Les droites menées du sommet d'un triangle aux sommets des angles du carré inférieur construit sur la base interceptent sur cette base le côté du carré inscrit dans le triangle.

38. Si, par un même point pris sur l'un des côtés d'un angle on mène des perpendiculaires aux deux côtés de cet angle, elles formeront entre elles un angle tel que, si on le divise en deux parties égales, la bisectrice deviendra la base d'un triangle isocèle.

39. Si l'on mène à volonté une parallèle à la base d'un triangle, et que, par les points de rencontre de cette parallèle avec les deux autres côtés, on mène des droites aux angles opposés, ces droites se couperont sur un point de la droite qui joint le sommet du triangle au milieu de la base.

40. Si l'on divise en un même nombre de parties égales deux côtés d'un triangle, et si, par les points de division on mène des droites aux angles opposés, celles qui se correspondent se coupent sur la droite qui joint le sommet du troisième angle au milieu du côté qui lui est opposé.

41. De tous les triangles de même base et de même hauteur, celui dont le périmètre est minimum, a les deux autres côtés égaux.

Le plus grand triangle rectangle que l'on puisse former sur une hypothénuse donnée est isocèle.

Entre tous les triangles de même périmètre, celui qui a la plus grande surface est équilatéral.

(C). *Propriétés des quadrilatères et des polygones en général.*

1. Chacune des diagonales d'un parallélogramme le partage en deux triangles égaux.

2. Toute droite qui passe par le milieu d'une des diagonales d'un parallélogramme coupe celui-ci en deux parties égales, et la droite est elle-même coupée en deux parties égales.

3. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

4. Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, le quadrilatère est un parallélogramme.

5. Si deux côtés d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, les deux autres sont nécessairement égaux et parallèles, et la figure est un parallélogramme.

6. Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en

deux parties égales, et si les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, le quadrilatère est un parallélogramme.

7. Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.

8. Un parallélogramme est le double du triangle qui a même base et même hauteur.

9. Deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

10. Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés = la somme des carrés des diagonales.

11. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

12. Dans tout quadrilatère plan ou même gauche, la somme des carrés des deux diagonales D, D′, plus quatre fois le carré de la ligne l qui joint les milieux de ces diagonales, est égale à la somme des carrés des quatre côtés, $c_1\ c_2\ c_3\ c_4$

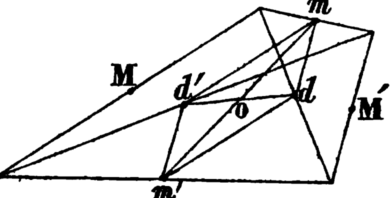
$$D^2 + D'^2 + 4l^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

13. Le point d'intersection des deux diagonales d'un quadrilatère est, de tous les points intérieurs, celui pour lequel la somme des distances aux quatre sommets est la moindre possible.

14. Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, convexe ou non convexe, sont les sommets des angles d'un parallélogramme équivalant à la moitié de ce quadrilatère.

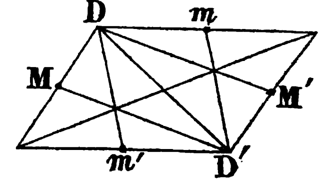
15. Si deux quadrilatères ont leurs diagonales respectivement égales et également inclinées, ils sont équivalents, quelle que soit d'ailleurs la manière dont les diagonales se coupent.

16. Si, par les milieux $m\ m'$ M M′ de deux côtés opposés d'un quadrilatère, on mène des droites aux milieux $d\,d'$ de ses diagonales, la figure résultante sera un parallélogramme dont les côtés sont respectivement les moitiés des deux autres côtés opposés du quadrilatère.



17. Les droites M M′ $m\ m'$, qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales, passent toutes par le même point o, et sont divisées en ce point chacune en deux parties égales.

18. Si par les milieux $m m'$ M M′ de deux côtés opposés d'un parallélogramme, on mène deux droites aux extrémités d'une même diagonale, elles diviseront l'autre diagonale en trois parties égales, et seront parallèles.

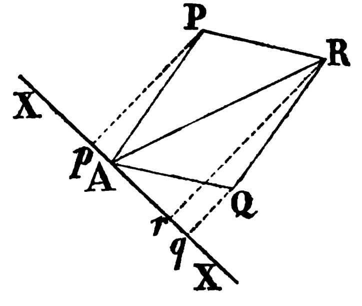


19. De plus, les quatre droites mD′, m'D, MD′, M′D partageront le parallélogramme en neuf parties qui, rapprochées convenablement, donneront cinq parallélogrammes égaux entre eux. Dans le cas du carré, les cinq parallélogrammes sont cinq carrés.

20. La droite qui joint les milieux des deux côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux autres côtés, et vaut leur demi-somme; — et la droite

qui joint les milieux des diagonales d'un trapèze, est parallèle aux côtés parallèles, et vaut leur demi-différence.

21. Si, par un point O d'une diagonale d'un parallélogramme ABCD, on mène des parallèles, les parallélogrammes CO, OB ainsi formés sont équivalents, et les parallélogrammes AO, OD sont semblables.



22. La perpendiculaire abaissée de l'un quelconque R des sommets d'un parallélogramme sur une droite XY conduite arbitrairement par le sommet opposé A = la somme des perpendiculaires abaissées des deux autres sommets sur la même droite

$$Rr = Qq + Pp.$$

23. Si tant de parallélogrammes qu'on voudra sont situés dans un même plan, et qu'ils aient une diagonale commune, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale sur une droite conduite arbitrairement dans le plan par l'une des extrémités de la première, sera une quantité constante pour tous ces parallélogrammes.

24. Si, par l'un des sommets d'un polygone, on conduit des diagonales aux autres sommets, le polygone sera partagé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux.

n étant le nombre de côtés d'un polygone, s la somme de ses angles, on a toujours

$$s = (n-2) \times 2 \text{ droits}; \qquad s^{\circ} = (n-2) \times 180^{\circ}.$$

25. La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est donc toujours égale à quatre angles droits, et tous les polygones d'un même nombre de côtés ont la somme de leurs angles intérieurs égale.

26. Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone convexe, la somme des angles extérieurs formés par chaque côté et par le prolongement de celui qui le précède, est égale à quatre angles droits, quel que soit le nombre des côtés du polygone.

27. Deux polygones sont égaux, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux et semblablement disposés.

28. Lorsqu'on connaît tous les côtés d'un polygone à l'exception d'un seul, et les angles compris entre les côtés donnés, le polygone est déterminé.

29. Si, dans les conditions d'égalité de deux figures, on substitue la proportionnalité des lignes à leur égalité, ces conditions suffiront pour affirmer que les figures sont semblables.

30. Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables.

31. Réciproquement, lorsque deux polygones sont semblables, ils peuvent toujours être décomposés en triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.

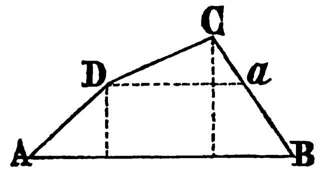
32. Si, dans deux polygones semblables, on tire des droites quelconques mais semblablement disposées dans chacun d'eux, ces droites seront proportionnelles aux côtés homologues des polygones.

33. Les contours de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones.

34. Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés

des côtés homologues, ou comme les carrés de lignes semblablement placées dans chacun d'eux.

35. Tout polygone construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle, est équivalent à la somme des polygones semblables construits sur les deux autres côtés.



36. Dans tout polygone, chaque côté est égal à la somme de tous les autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle intérieur qu'il forme avec le premier

$$AB = AD \cos. DAB + DC \cos. CDa + BC \cos. CBA.$$

(D.) *Cercles et droites; propriétés.*

1. Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.

2. Si d'un point quelconque, on peut conduire à une circonférence et dans son plan, trois droites égales, ce point est le centre de la circonférence.

3. D'un point pris en dehors d'une circonférence et dans son plan, on ne peut mener à cette circonférence que deux droites égales.

4. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, 1° les arcs de même espèce sont sous-tendus par des cordes égales; 2° les cordes sont égales lorsque les arcs de même espèce sont égaux; 3° le plus grand de deux arcs inégaux est sous-tendu par une plus grande corde; 4° une plus grande corde sous-tend un plus grand arc, pourvu que les arcs que l'on compare soient moindres que la demi-circonférence.

5. La perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangente au cercle, et réciproquement la tangente au cercle en un point quelconque, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené à ce point.

6. Si, du même point, on conduit deux tangentes à un cercle, ces tangentes sont égales.

7. La perpendiculaire sur le milieu d'une corde passe par le milieu de l'arc qu'elle sous-tend et par le centre du cercle; donc, lorsqu'une droite passe par deux de ces points, elle passe nécessairement par le troisième.

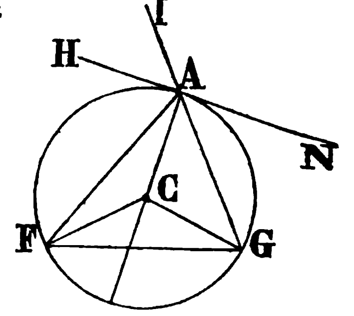
8. Toute perpendiculaire abaissée du centre du cercle ou du milieu de l'arc sur la corde, passe nécessairement par le milieu de la corde.

9. On a, entre la corde c, la flèche f et le rayon r d'un arc de cercle, la relation

$$r = \frac{f}{2} + \frac{c^2}{8f}; \quad c = 2\sqrt{f(2r-f)}; \quad f = r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$$

10. Deux cordes parallèles ou une tangente et une corde parallèles interceptent, sur une même circonférence, des arcs égaux; et réciproquement, si les arcs interceptés sont égaux, les cordes sont parallèles

11. La tangente, au milieu d'un arc, est parallèle à la corde de cet arc.



12. L'angle FAG, qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc FG de la même circonférence intercepté entre ses côtés.

13. L'angle au centre FCG est double de l'angle FAG à la circonférence qui s'appuie sur le même arc.

14. L'angle FAH, compris entre une tangente AH et une corde AF, a pour mesure la moitié de l'arc AF qu'il comprend.

15. L'angle formé par une tangente AH et une corde quelconque AF = l'angle inscrit dans l'autre segment

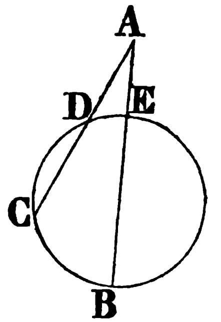
$$HAF = AGF; \quad NAG = AFG$$

16. L'angle FAI, formé par une corde FA et le prolongement extérieur AI d'une autre corde AG, a pour mesure la moitié de la somme des arcs AF + AG sous-tendus par ces cordes en dehors de l'angle FAG.

17. Tous les angles qui ont leurs sommets à la circonférence et s'appuient sur le même arc sont égaux; et tous ceux qui ont leurs sommets à la circonférence et s'appuient sur les extrémités d'un diamètre, sont droits.

18. Tout angle BAC qui a son sommet A dans le cercle entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de la somme des arcs BC + DE compris entre les côtés et les prolongements de ceux-ci.

19. L'angle CAB, dont le sommet A est placé en dehors du cercle, a pour mesure la moitié de l'excès BC — DE de l'arc concave sur l'arc convexe au sommet.



20. Par trois points, non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, et l'on n'en peut faire passer qu'une seule.

21. Deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre, et ne sauraient se rencontrer en plus de deux points.

22. Deux circonférences qui passent par un même point de la droite qui joint leurs centres, n'ont que ce point commun, et réciproquement si deux circonférences ont un seul point commun, leurs centres et ce point de contact sont en ligne droite.

21. R et r étant les rayons respectifs de deux circonférences, et d la distance de leurs centres, ces circonférences se touchent, savoir :

Extérieurement, si $R + r = d$
Intérieurement, si $R - r = d$

Elles se coupent, et la corde d'intersection est entre les centres, si

$$R + r > d; \quad r > R - d \quad \text{et} \quad R > d$$

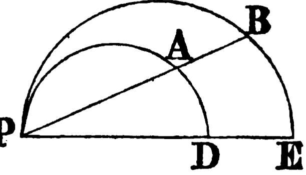
Elles se coupent, et la corde d'intersection est du même côtés des centres, si

$$R + r > d; \quad r > d - R \quad \text{et} \quad d > R$$

Elles sont hors l'une de l'autre, si $R + r < d$
Elles s'entourent l'une l'autre, si $R - r > d$

24. Si deux circonférences se touchent en P, et si l'on mène PDE par la ligne des centres, toute droite PAB menée du point de contact P, donnera


PA : PB :: PD : PE



25. Si, par le point de contact de plusieurs circonférences, on mène une sécante quelconque, les cordes résultantes sont entre elles comme les circonférences auxquelles elles appartiennent.

26. Si, par le point de contact de deux circonférences, on mène deux sé-

cantes, les cordes qui joindront les points d'intersection des sécantes avec les circonférences, seront parallèles.

37. Deux sécantes, qui partant d'un même point extérieur E, sont prolongées jusqu'à l'arc concave à ce point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures

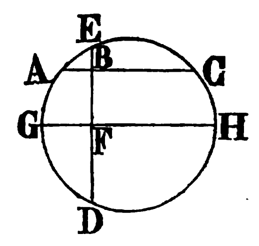
$$CE \times AE = ED \times EB$$

28. La tangente EF est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure

$$\overline{EF}^2 = CE \times AE = ED \times EB$$

29. Deux cordes qui se rencontrent dans un cercle d'une manière quelconque, se coupent en parties réciproquement proportionnelles

$$AB \times BC = EB \times BD$$



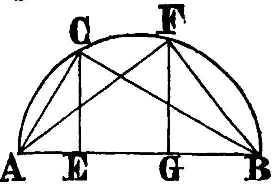
30. Réciproquement, quand deux droites se coupent de manière que les deux parties de l'une sont les extrêmes d'une proportion, les deux parties de l'autre en étant les moyens, les extrémités de ces droites sont sur une même circonférence.

31. Si l'une des cordes est un diamètre GH, et si l'autre corde ED lui est perpendiculaire, la moitié de celle-ci est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre

$$\overline{EF}^2 = GF \times FH$$

32. Si les cordes AC, ED se coupent à angles droits, la somme des carrés des segments des cordes égale le carré du diamètre D

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{BD}^2 = D^2$$

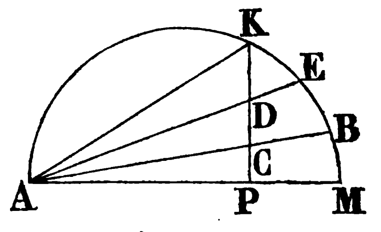


33. La corde AC... menée de l'extrémité d'un diamètre, est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment AE déterminé par le pied E de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité de la corde

$$\overline{AC}^2 = AB \times AE$$

et les carrés des cordes AC, AF, ... sont entre eux comme les segments respectifs AE AG

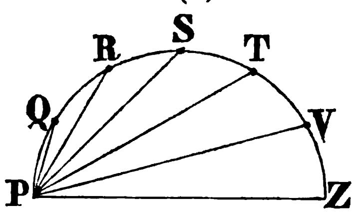
$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: AE : AG$$



34. Elevez une perpendiculaire quelconque à une diamètre AM, et, de l'une de ses extrémités A, menez à la circonférence les droites quelconques AB AE AK qui rencontrent la perpendiculaire, le produit des distances à A des points d'intersection, égale le produit du diamètre par la distance à A du pied P de la perpendiculaire :

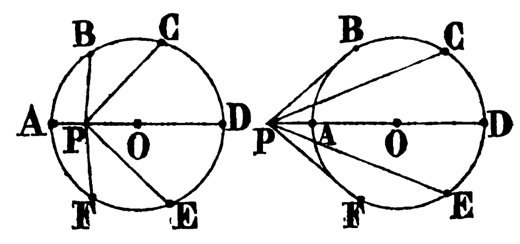
$$AB \times AC = AE \times DA = AK \times AK = \overline{AK}^2 = AP \times AM$$

35. Si l'on divise la circonférence en parties égales, et si, de l'extrémité du diamètre on conduit les cordes PQ, PR, PS..., on a



PQ : PR :: PR : PQ + PS :: PS : PR + PT :: PT : PS + PV :: etc.

36. Soit O le centre d'un cercle dont la circonférence est divisée en $2n$ parties égales, et soit pris un point P sur le diamètre ou sur son prolongement : si du point P on conduit aux points de division des droites PA PB. . . .



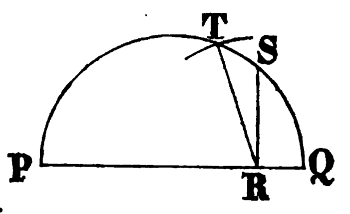
que l'on nomme le rayon r et la distance OP = x

Le produit des lignes alternatives ou $PA \times PC \times PE \times \ldots = r^n - x^n$ si P est dans le cercle,

Au contraire $PA \times PC \times PE \times \ldots = x^n - r^n$ si P est en dehors,

et le produit des autres lignes donne $PB \times PD \times PF \times \ldots = r^n + x^n$

37. Si par un point quelconque R d'un diamètre, on élève une perpendiculaire RS, et si d'une longueur RT égale au rayon, on recoupe la circonférence, RS est moyenne géométrique, et RT moyenne arithmétique entre les parties PR, RQ du diamètre.



38. Si, dans le plan d'un cercle, on prend un point fixe, la somme des carrés des distances de ce point aux extrémités d'un diamètre quelconque sera toujours la même.

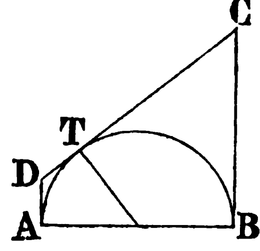
39. Si, par le milieu m de l'arc A d'un cercle, on mène une corde quelconque, le rectangle de cette corde par sa partie comprise entre m et la corde de A, sera constante de quelque manière que la corde dont il s'agit soit menée.

40. Si, des extrémités d'un diamètre, on abaisse deux perpendiculaires sur une sécante qui ne le coupe pas, les deux parties extérieures de la sécante sont égales entre elles.

41. La partie d'une tangente comprise entre les perpendiculaires aux extrémités d'un diamètre, est égale à la somme des deux segments qu'elle détermine sur ces perpendiculaires : DC = AD + CB.

42. Les deux parties d'une sécante comprise entre deux circonférences concentriques, sont égales entre elles.

43. Toutes les cordes comprises entre deux circonférences concentriques et tangentes à la circonférence intérieure, sont égales entre elles, et se coupent deux à deux en parties réciproquement égales.



(E) *Polygones inscrits et circonscrits au cercle; propriétés.*

1. Les polygones réguliers ou dont tous les côtés et les angles saillants sont égaux, peuvent être inscrits ou circonscrits au cercle.

2. Les angles au centre d'un polygone régulier, sont tous égaux entre eux. n étant le nombre des côtés du polygone, chacun d'eux $= \frac{360^\circ}{n}$ et leur somme $= 360^\circ = 4$ angles droits.

3. Un polygone régulier étant inscrit au cercle, si, par les sommets de ses angles, on mène des tangentes au cercle, elles formeront un polygone régulier de même nom que l'inscrit.

4. Un polygone régulier étant circonscrit au cercle, si, d'un point de contact au suivant, on mène des cordes, elles formeront un polygone régulier inscrit de même nom que le circonscrit.

5. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont semblables; — leurs contours sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont inscrits ou circonscrits; — leurs aires sont entre elles comme les carrés de ces rayons.

6. Les cercles étant des polygones réguliers d'un très-grand nombre de côtés, leurs aires sont entre elles comme les carrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs circonférences.

7. Un polygone régulier quelconque est équivalent à un triangle qui aurait pour hauteur l'*apothème*, et pour base la somme des côtés du polygone.

8. On ne peut couvrir une surface plane indéfinie que par trois systèmes de polygones réguliers, savoir : des triangles, des carrés, des hexagones, — et autour des mêmes points sur ce plan on ne peut assembler par leurs angles saillants, que six triangles, quatre carrés ou trois hexagones.

9. Le carré du côté du triangle équilatéral inscrit, est égal à trois fois le carré du rayon, et le carré inscrit est égal à deux fois le carré du rayon.

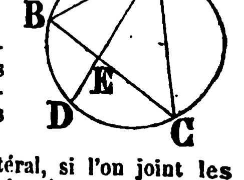
10. Les distances du centre du cercle à un sommet du triangle équilatéral circonscrit et au milieu d'un côté du triangle équilatéral inscrit, sont respectivement le double et la moitié du rayon.

11. BDF étant un triangle inscrit quelconque, d'un sommet D, menez une perpendiculaire DP à la base, puis, du même point D, un diamètre et le rectangle de ces deux lignes sera égal à celui des deux côtés de l'angle qui les comprennent

$$DP \times DA = DB \times DF$$

12. BAC étant un triangle inscrit quelconque, et AD une droite qui coupe l'angle A en deux parties égales, on a

$$AB \times AC = AE \times AD = BE \times EC + \overline{AE}^2$$



13. Si l'on fait tourner dans son plan un triangle autour de la circonférence inscrite, de manière que ses côtés soient continuellement tangents à cette circonférence, les trois sommets décriront trois circonférences concentriques à la première.

14. Un cercle étant inscrit dans un triangle équilatéral, si l'on joint les sommets du triangle au centre du cercle, les cercles qu'on inscrirait dans les trois triangles résultants seraient tangents entre eux et au premier cercle.

15. Dans tout quadrilatère circonscrit au cercle, deux des côtés opposés pris ensemble sont égaux aux deux autres.

16. Réciproquement, tous les quadrilatères à angles saillants sont circonscriptibles au cercle, quand les sommes de leurs côtés opposés sont égales.

17. De tous les quadrilatères de même périmètre dont les longueurs des côtés sont invariables le plus grand est celui qui est inscriptible au cercle.

18. Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés du quadrilatère

$$AC \times BD = AB \times DC + AD \times BC$$

19. Et les deux diagonales sont entre elles comme la somme des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + CB \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}$$



20. Tout quadrilatère où la somme des angles opposés égale deux angles droits, est inscriptible au cercle.

21. L'aire d'un cercle est à celle d'un polygone *quelconque*, qui lui est circonscrit, comme la circonférence est au périmètre du polygone.

22. Le contour d'un cercle est toujours plus petit que celui d'un polygone de même surface.

23. De tous les polygones de même surface et d'un même nombre de côtés, celui dont les côtés sont égaux entre eux a le moindre périmètre.

24. De deux polygones réguliers de même surface; celui dont le périmètre est le moindre est celui qui a le plus de côtés.

25. De tous les polygones formés avec les mêmes côtés, tous donnés excepté un seul, le plus grand est le polygone inscriptible au cercle.

26. Si, dans un polygone régulier, on mène toutes les diagonales qui en retranchent *un* triangle, ces diagonales formeront par leurs intersections un polygone régulier d'un même nombre de côtés et de même centre que le premier.

27. Si, d'un point quelconque de la surface d'un polygone régulier de n côtés, on abaisse des perpendiculaires sur ces n côtés, la somme de ces n perpendiculaires vaudra n fois le rayon du cercle inscrit.

28. Soient deux polygones réguliers semblables, l'un P circonscrit, l'autre p inscrit mais ayant les sommets de ses angles aux points de tangence des côtés du premier : si, sur un des côtés de P comme diamètre, on décrit une circonférence, elle interceptera sur la droite menée d'une extrémité de ce diamètre au centre des polygones le côté d'un troisième polygone p' régulier, semblable aux deux premiers, et de plus équivalent à leur différence $P - p$.

29. Dans tout pentagone régulier, 1° chaque diagonale est parallèle à un côté; 2° les diagonales se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison, au sommet d'un second pentagone régulier; 3° si l'on prolonge chaque apothème de ce second pentagone d'une quantité égale à cet apothème, on arrivera aux centres de cinq nouveaux pentagones réguliers égaux au second, et dont un angle de chacun sera un angle du premier.

30. Si l'on divise les côtés d'un triangle équilatéral chacun en trois parties égales, les points de division seront les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le triangle; la surface et le périmètre de cet hexagone seront respectivement les deux tiers de la surface et du périmètre du triangle.

31. Si l'on prolonge tous les côtés d'un hexagone régulier jusqu'à ce qu'ils se rencontrent deux à deux, on forme un polygone *étoilé* de douze côtés dont l'aire et le périmètre sont respectivement doubles de l'aire et du périmètre de l'hexagone. De plus, les six sommets saillants du dodécagone étoilé sont les sommets d'un hexagone régulier dont l'aire est triple de celle du premier.

32. Si l'on prolonge les côtés d'un carré de part et d'autre de quantités

égales à la demi-diagonale, on obtient les sommets d'un octogone régulier de même centre que le carré et d'un périmètre double.

33. Si l'on prolonge les côtés d'un carré de part et d'autre de quantités égales au côté de ce carré, on obtient les sommets d'un octogone inscriptible dont l'aire est égale à sept fois l'aire du carré primitif.

34. Tout dodécagone régulier est équivalent au carré fait sur le côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

35. Soient deux polygones réguliers de même périmètre p; $\frac{p}{m}$ le côté de l'un et $\frac{p}{2m}$ le côté de l'autre, ou m et $2m$ les nombres de côtés respectifs; soient enfin R et r, R' et r' les rayons respectifs des cercles circonscrits et inscrits à ces polygones, on a toujours

$$r' = \tfrac{1}{2}(r + R) \qquad \text{et} \qquad R' = \sqrt{Rr'}$$

36. Si K est le côté d'un polygone régulier inscrit de n côtés, le côté Z d'un polygone inscrit de $2n$ côtés est (le rayon étant 1)

$$Z = \sqrt{2 - \sqrt{4 - K^2}}; \qquad Z^2 = 2\left\{1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}K)^2}\right\}$$

37. Si K est le côté d'un polygone régulier inscrit de n côtés, le côté X d'un polygone régulier circonscrit du même nombre de côtés est (le rayon étant 1)

$$X = \frac{2K}{\sqrt{4 - K^2}} \qquad \text{d'où} \quad K = \frac{2X}{\sqrt{4 + X^2}}$$

38. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle circonscrit aux polygones réguliers d'un nombre n de côtés, D étant l'angle droit, on a

Polygones de	Angle au centre.	Angle à la circonférence.	Côté.	Apothème,
n côtés. . .	$\frac{4D}{n} = \frac{360^\circ}{n}$	$\frac{2D(n-2)}{n} =$	K.	$\frac{K}{2}\cot.\frac{180^\circ}{n}$
3.	$\frac{4}{3}$ D = ...	$\frac{2}{3}$ D.	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
4	D.	D.	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
5.	$\frac{4}{5}$ D.	$\frac{6}{5}$ D.	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ . . .	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
6.	$\frac{2}{3}$ D.	$\frac{4}{3}$ D.	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
8.	$\frac{1}{2}$ D.	$\frac{3}{2}$ D.	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$. . . .	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
10.	$\frac{2}{5}$ D.	$\frac{8}{5}$ D.	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. . . .	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$
12.	$\frac{1}{3}$ D.	$\frac{5}{3}$ D.	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ . . .	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(F) *Plans et droites; propriétés.*

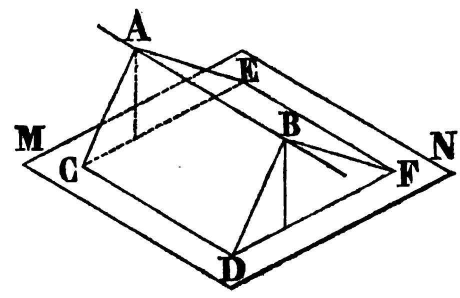
1. Une droite qui a deux de ses points dans un plan, est toute entière dans ce plan.

2. L'intersection de deux plans est une ligne droite.

3. Trois points non en ligne droite, ou deux lignes qui se coupent ou deux parallèles suffisent pour déterminer la position d'un plan.

4. Deux plans qui ont trois points communs non en ligne droite, coïncident.

5. Toute droite AB située hors d'un plan MN, mais parallèle à une droite quelconque CD menée dans ce plan, est parallèle au plan MN, ainsi qu'à toutes les droites EF, menées dans le plan parallèlement à CD.



6. Toute droite parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.

7. Les angles ACE, BDF qui ont leurs côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens, sont égaux, quoique situés dans des plans différents.

8. Si d'un point quelconque B d'une droite AB oblique à un plan MN, on abaisse une perpendiculaire BP à ce plan, et si, après avoir joint les pieds A et P par AP, on mène à PA par A une perpendiculaire CAD, les droites AB et CD seront perpendiculaires entre elles.

9. Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à un plan sont égales; celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues, et la perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes, que l'on puisse mener d'un point donné à un plan.

10. La distance d'un point à un plan est la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

11. Par un point pris hors d'un plan ou sur un plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan; et, par le même point d'une droite, il ne peut passer qu'un seul plan perpendiculaire à cette droite.

12. Toute droite perpendiculaire à deux autres droites qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à toutes les droites qui pourraient être menées par ce point dans le plan, et par conséquent elle est perpendiculaire au plan.

13. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle fait des angles égaux avec trois droites menées par son pied dans le plan.

14. Si trois droites sont perpendiculaires en un même point d'une même droite, elles sont comprises toutes trois dans un plan perpendiculaire à la droite au même point.

15. Deux droites comprises entre deux plans parallèles sont coupées en parties proportionnelles par un troisième plan parallèle aux deux premiers.

16. Lorsque deux droites X, Y qui se coupent sont parallèles à deux autres droites x y qui se coupent, le plan qui passe par les deux premières, est parallèle à celui qui passe par les deux autres.

17. Par deux droites qui ne sont pas comprises dans un même plan, on

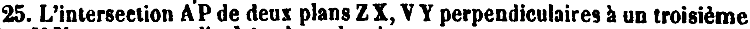
peut toujours mener deux plans parallèles entre eux, et la perpendiculaire commune à ces deux plans est la distance des droites.

18. Deux plans perpendiculaires à une même droite ou à deux droites parallèles sont parallèles entre eux.

19. Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les droites d'intersection sont parallèles.

20. Lorsque deux plans sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un d'eux est perpendiculaire à l'autre.

21. Tout plan ZX, VY mené par une perpendiculaire AP à un autre plan MN, est perpendiculaire à ce dernier plan.



22. Par une droite PT prise dans un plan MN, on ne peut élever qu'un seul plan ZX perpendiculaire au premier.

23. Lorsqu'une droite est oblique à un plan, on ne peut mener par cette droite qu'un seul plan perpendiculaire au premier.

24. Si par un point quelconque P de la commune section PT de deux plans MN, ZX, on élève perpendiculairement au premier une droite PA, elle sera comprise dans le second plan ZX.

25. L'intersection AP de deux plans ZX, VY perpendiculaires à un troisième plan MN, est perpendiculaire à ce dernier.

26. ST étant la commune section de deux plans ZX, MN qui se rencontrent à angles droits, toute droite menée dans ZX perpendiculairement à ST, est perpendiculaire au plan MN.

27. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

28. Si une droite est perpendiculaire à un plan, toutes les parallèles à cette droite sont perpendiculaires au même plan.

29. Les angles *dièdres* étant mesurés par des angles *plans*, jouissent nécessairement de toutes les propriétés de ces derniers.

30. La somme de deux quelconques des angles plans qui composent un angle trièdre, est toujours plus grande que le troisième.

31. Si deux angles trièdres sont formés des mêmes angles plans, les angles dièdres compris entre les angles plans égaux, seront égaux.

32. Deux angles trièdres formés par trois angles plans égaux et semblablement disposés entre eux sont égaux dans toutes leurs parties. Si les angles plans ne sont pas semblablement disposés, les angles trièdres qu'ils forment comprennent encore le même espace, mais ils ne peuvent plus se superposer par toutes leurs faces.

33. La somme des angles plans qui composent un angle polyèdre dont toutes les arêtes sont saillantes, est toujours moindre que quatre angles droits.

(G.) *Polyèdres en général; propriétés.*

1. On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre, et le corps qui en résulte se nomme *tétraèdre*.

2. Si d'un point pris à volonté dans l'intérieur d'un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles égaux, on mène des perpendiculaires à ces faces, la somme de ces quatre perpendiculaires vaudra toujours la hauteur du tétraèdre.

3. *Conditions d'égalité.* Deux tétraèdres sont égaux :

1° S'ils ont chacun un angle trièdre composé de triangles égaux et semblablement disposés ;

2° Si deux faces de l'une sont égales à deux faces de l'autre et assemblées de la même manière; ils sont équivalents lorsqu'ils ont les quatre faces égales chacune à chacune.

4. *Conditions de similitude.* Deux tétraèdres sont semblables :

Lorsque les triangles qui forment deux angles trièdres homologues sont semblables chacun à chacun et semblablement disposés ;

Si deux faces de l'un font entre elles le même angle que deux faces de l'autre, sont, en outre, semblables à celles-ci et assemblées par des côtés homologues ;

Lorsqu'ils ont toutes leurs arêtes homologues proportionnelles.

5. Les pyramides de même hauteur et dont les bases sont équivalentes, sont égales en volume.

6. Deux pyramides quelconques sont semblables lorsque leurs faces sont semblables et semblablement disposées.

7. En coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on en retranche une pyramide semblable.

8. Les arêtes homologues des pyramides semblables sont proportionnelles entre elles et aux perpendiculaires abaissées des sommets sur les bases.

9. Les bases des pyramides semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques, ou comme les carrés des perpendiculaires abaissées du sommet sur leurs plans.

10. Les sections ss', SS', faites aux mêmes distances dd' des sommets dans deux pyramides quelconques, sont dans un rapport constant, quelles que soient, d'ailleurs, ces distances et les figures des bases.

11. Un polyèdre quelconque peut être partagé en pyramides triangulaires en joignant par des droites le sommet de l'un des angles à tous les autres et divisant toutes les faces en triangles.

12. Deux polyèdres composés d'un même nombre de pyramides triangulaires égales et semblablement disposées sont égaux.

13. Deux polyèdres sont semblables s'ils sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées.

14. Si l'on divise en parties proportionnelles les droites menées d'un point quelconque aux sommets d'un polyèdre donné, on aura les sommets d'un nouveau polyèdre semblable au premier.

15. Les arêtes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, ainsi que les diagonales des faces homologues et les diagonales intérieures aux polyèdres.

16. Les aires des polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.

17. Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de deux droites homologues quelconques de ces deux polyèdres.

18. Deux prismes triangulaires de mêmes bases et de mêmes hauteurs sont équivalents.

19. Deux tétraèdres de même base et de même hauteur sont équivalents.

20. Un tétraèdre quelconque est équivalent au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

21. Deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.— S'ils ont mêmes bases, ils sont entre eux comme leurs hauteurs. — S'ils ont mêmes hauteurs, ils sont entre eux comme leurs bases.

22. Deux pyramides quelconques sont entre elles dans les mêmes rapports que ci-dessus.

23. Deux prismes sont semblables s'ils ont un angle trièdre formé de polygones semblables et semblablement disposés.

24. Deux prismes sont égaux s'ils ont chacun un angle trièdre composé de

polygones égaux et semblablement disposés, — ou s'ils ont une base égale et une face égale également inclinée sur cette base.

25. Deux corps sont semblables dans tous les cas *analogues* à ceux où ils sont égaux.

26. Les parallélipipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents.

27. Tout parallélipipède peut se décomposer, par un plan diagonal, en deux prismes triangulaires équivalents et qui sont chacun moitié du parallélipipède.

28. Les parallélipipèdes rectangles sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment un même angle trièdre. — S'ils ont mêmes bases, ils sont entre eux comme leurs hauteurs.

29. Si l'on coupe un parallélipipède quelconque par un plan incliné à sa base, le volume du tronc vaudra le produit de cette base par sa distance au centre du parallélogramme que donne la section.

30. Dans tout parallélipipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.

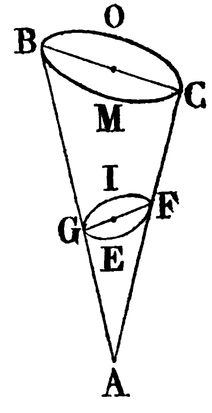
(H.) *Corps ronds et polyèdres réguliers; propriétés.*

1. Toutes les sections faites dans un cône droit parallèlement à sa base sont des cercles qui sont entre eux comme les carrés de leurs distances au sommet, et dont les circonférences sont entre elles comme ces distances.

2. En général, 6 étant l'angle au sommet d'un cône droit, c la partie d'une de ses génératrices comprise entre ce sommet et un plan qui coupe le cône, α l'angle de ce plan coupant, avec c, l'équation de la COURBE de section du cône par le plan ou de la *section conique*, est

$$y^2 = \frac{\sin.\alpha}{\cos.^2\frac{1}{2}\beta}\left[c\,x\sin.\beta - x^2\sin.(\alpha+\beta)\right]$$

c étant fait $= o$, on a les trois sections qui passent par le sommet, savoir, un point, une droite ou deux droites; et lorsque c n'est pas nul, l'équation ci-dessus devient celle d'une ELLIPSE, lorsque le coefficient de x^2 est négatif, celle d'une HYPERBOLE s'il est positif, et celle d'une PARABOLE s'il est nul.



3. Soit ABOCM un cône quelconque à base circulaire BMCO. ABC la section triangulaire de ce cône par un plan perpendiculaire à sa base, et passant par son axe; soit GEFI une autre section de ce cône par un plan perpendiculaire à ABC, et telle qu'on ait angle AFG = angle ABC et angle AGF = angle ACB, la section GEFI sera nécessairement un cercle.

4. Dans un cylindre droit, toutes les sections parallèles aux bases sont des cercles égaux.

5. Toutes les sections de la sphère par un plan sont des cercles.

6. Tous les cercles dont le plan passe par le centre de la sphère sont égaux et ils se coupent toujours en deux parties égales.

7. Le plus court chemin d'un point à un autre de la surface sphérique est l'arc de grand cercle déterminé par le plan qui contient les deux points et le centre de la sphère.

8. Si, par le centre d'un cercle quelconque tracé à la surface de la sphère, on fait passer une perpendiculaire à son plan, elle passera par le centre de la sphère et la percera en deux points dont chacun sera également éloigné de tous ceux de la circonférence proposée.

9. Par quatre points qui ne soient ni en ligne droite ni dans un même plan, on peut toujours faire passer une surface sphérique, et l'on n'en peut faire passer qu'une.

10. La sphère est, de tous les corps de même surface, celui dont le volume est le plus grand.

11. L'aire d'une calotte sphérique est à l'aire de sa sphère comme la hauteur de la calotte est au diamètre de la sphère.

12. Le cercle décrit sur une sphère avec une ouverture de compas quelconque détermine sur cette sphère une calotte sphérique ou zone à une base équivalente au cercle décrit sur un plan avec la même ouverture de compas.

13. Les cercles décrits sur des sphères différentes et avec la même ouverture de compas, déterminent sur ces sphères des calottes sphériques équivalentes.

14. On peut environner une sphère centrale de douze autres sphères de même rayon, dont chacune touchera la sphère centrale et toutes ses voisines.

15. Dans la projection stéréographique (page 219), les projections des cercles de la sphère sont elles-mêmes des cercles, et la perspective de l'angle de deux courbes quelconques de la surface ne diffère point de cet angle lui-même.

16. Les aires des corps ronds semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues, et leurs volumes sont entre eux comme les cubes des mêmes lignes.

17. Tout cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur, et la sphère est les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit.

18. Le volume d'un polyèdre quelconque circonscrit à une sphère, ou dont tous les plans sont tangents à la sphère, est au volume de la sphère comme la surface du polyèdre est à la surface sphérique.

19. Tous les polyèdres circonscrits à une même sphère sont entre eux comme leurs surfaces.

20. Il n'y a que cinq polyèdres réguliers, savoir : celui à 4 faces, dit *tétraèdre*, dont les angles sont *trièdres* et dont les faces sont des triangles équilatéraux;

Celui à 6 faces, dit *hexaèdre* ou *cube*, dont les angles sont trièdres et dont les faces sont des carrés égaux;

Celui à 8 faces, dit *octaèdre*, dont les angles sont *tétraèdres* et dont les faces sont des *triangles* équilatéraux;

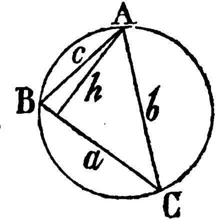
Celui à 12 faces, dit *dodécaèdre*, dont les angles sont *trièdres* et dont les faces sont des *pentagones*;

Celui à 20 faces, dit *icosaèdre*, dont les angles sont *pentaèdres* et dont les faces sont des triangles équilatéraux.

On trouvera plus loin les rapports de ces polyèdres avec la sphère.

(I.) *Aires des surfaces planes.*

1. *Triangle.* L'aire T d'un triangle ABC a pour mesure la moitié du produit de sa base a par sa hauteur h — ou la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent, — ou, $2p$ étant son périmètre, on a encore



$$T = \tfrac{1}{2}\, ah = \tfrac{1}{2}\, bc \sin.A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$= \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin.A \sin.B}{\sin.(A+B)}$$

2. Et si R est le rayon du cercle qui lui est circonscrit, et r celui du cercle qui lui est inscrit, on a aussi

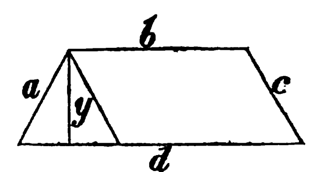
$$T = \frac{abc}{4R} = \tfrac{1}{2} r (a + b + c) = rp$$

3. *Polygone quelconque.* Il peut être décomposé par des diagonales en triangles qu'on sait mesurer.

4. *Rectangle* = produit de sa base par sa hauteur.

5. *Parallélogramme* = produit de sa base par la perpendiculaire interceptée entre cette base et le côté opposé parallèle.

6. *Trapèze* = demi-somme des côtés parallèles $\times$ hauteur = hauteur $\times$ droite menée à égales distances des bases parallèles



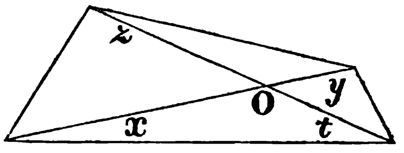
$$= \left(\frac{b+d}{2}\right) y$$

et si l'on n'a point la hauteur y, on l'obtiendra en prenant la différence $(d - b)$ des côtés parallèles que nous ferons $= g$, et l'on aura

$$y = \frac{1}{2g} \sqrt{(a+c+g)(a+g-c)(c+g-a)(a+c-g)}$$

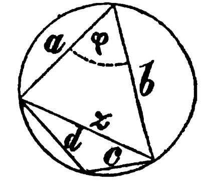
On trouvera ainsi la surface d'un trapèze dont on ne connaît que les quatre côtés.

7. Quadrilatère = la moitié du produit de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles comprennent



$$= \frac{(x+y)(z+t)}{2} \sin. O$$

8. Si le quadrilatère est inscriptible au cercle, son aire Q peut être exprimée par



$$Q = \frac{ab+cd}{2} \sin. \varphi$$

et si l'on y fait $2p = a + b + c + d$, on a encore

$$Q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

9. *Polygone régulier* dont K est le côté, n le nombre de côtés et P l'aire ; P = périmètre $\times$ moitié de l'apothème

$$P = n K \times \tfrac{1}{2} \cdot \frac{K}{2} \text{ cotang. } \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} n K^2 \text{ cotang. } \frac{180^\circ}{n}$$

10. *Cercle et ses parties.* Aire du cercle = circonférence $2\pi r$ par la moitié du rayon $r = \pi r^2 = 3.1415926\, r^2$.

11. *Aire du secteur* dont d est le nombre de degrés $= \frac{d}{360} \pi r^2$ = moitié du produit de la longueur de l'arc par le rayon r.

12. *Segment* = aire du secteur de même graduation moins aire du triangle correspondant = encore

$$\tfrac{1}{2} r^2 \left\{ \frac{\pi d}{180} - \sin. d \right\}$$

13. ***Surface annulaire*** **A comprise entre deux circonférences concentriques de rayons r, et R = aire du cercle qui aurait pour diamètre la droite $2t$ tangente à la plus petite et terminée à la plus grande**

$$A = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi t^2 = \pi\,(R + r)\,(R - r).$$

14. Table ***des cercles de diamètres*** **1** ***à*** **10,** ***de leurs aires, de leurs circonférences, et de la longueur du côté d'un carré équivalent.***

Diamètre.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
1.00	0.7853982	3.14159265	0.88622692
.25	1.22718463	3.92699081	1.10778365
.5	1.76714586	4.71238898	1.32934038
.75	2.40528187	5.49778714	1.55089711
2.	3.14159265	6.28318530	1.77245384
.25	3.97607820	7.06858347	1.99401058
.5	4.90873852	7.85398163	2.21556731
.75	5.93957361	8.63937979	2.43712404
3.	7.06858347	9.42477796	2.65868077
.25	8.29576840	10.21017612	2.88023750
.5	9.62112750	10.99557428	3.10179423
.75	11.04466167	11.78097245	3.32335096
4.	12.56637061	12.56637061	3.54490769
.25	14.18625432	13.35176877	3.76646442
.5	15.90431280	14.13716694	3.98802116
.75	17.72054606	14.92256510	4.20957789
5.	19.63495408	15.70796326	4.43113462
.25	21.64753687	16.49336143	4.65269135
.5	23.75829444	17.27875959	4.87424808
.75	25.96722677	18.06415775	5.09580482
6.	28.27433388	18.8495559	5.31736155
.25	30.67961575	19.63495408	5.53891828
.5	33.18307240	20.42035224	5.76047501
.75	35.78470382	21.20575041	5.98203174
7.	38.48451001	21.99114857	6.20358847
.25	41.28249096	22.77654673	6.42514520
.5	44.17864669	23.56194490	6.64670193
.75	47.17297718	24.34734306	6.86825866
8.	50.26548246	25.13274122	7.08981539
.25	53.45616249	25.91813939	7.31137213
.5	56.74501730	26.70353755	7.53292886
.75	60.13204688	27.48893571	7.75448559
9.	63.61725124	28.27433388	7.97604232
.25	67.20063035	29.05973204	8.19759905
.5	70.88218424	29.84513020	8.41915578
.75	74.66191290	30.63052837	8.64071251
10.	78.53981634	31.41592653	8.86226925

15. ***Surface plane quelconque*** **terminée par des droites ou des courbes quelconques (Voyez, page 435, la méthode de** ***Thomas Simpson*****).**

16. Si l'on projette une surface plane sur un autre plan par des perpendiculaires à celui-ci, la projection de cette surface sera égale à son aire multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.

17. Si une figure plane quelconque est projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure sera égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections.

(K.) *Surfaces et volumes des corps.*

1. L'*aire* de la surface convexe d'une *pyramide quelconque* est la somme des aires des triangles qui la composent.

2. L'*aire* de la surface convexe d'une *pyramide régulière* = la somme des aires des triangles qui la composent = produit du demi-périmètre de la base par la perpendiculaire menée du sommet sur un des côtés de cette base.

3. *Volume de toute pyramide* = le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

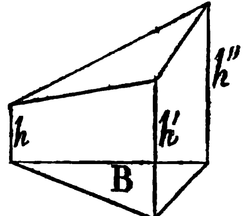
4. *Surface* d'un *tronc de pyramide* s'obtient en faisant la somme des aires de ses faces.

5. *Volume* d'un *tronc de pyramide* quelconque à bases parallèles, ayant B pour base inférieure, *b* pour base supérieure, et H pour hauteur

$$= \frac{1}{3} H \left\{ B + b + \sqrt{Bb} \right\}$$

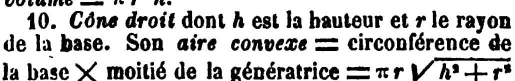
6. *Aire convexe d'un prisme* = somme des parallélogrammes qui le composent = produit d'une arête par le périmètre d'une section perpendiculaire à cette arête. Pour avoir l'aire totale, il faut ajouter les aires des deux bases.

7. *Volume du prisme* = produit de sa base par sa hauteur.



8. *Volume du tronc de prisme triangulaire* = produit de la base B par le tiers des trois hauteurs des angles trièdres supérieurs $= \frac{1}{3} B (h + h' + h'')$.

9. *Cylindre droit; aire convexe* = produit du périmètre de la base par la hauteur $h = 2\pi r h$, r étant le rayon de la base; *aire totale* $= 2\pi r (h + r)$ *volume* $= \pi r^2 h$.



10. *Cône droit* dont h est la hauteur et r le rayon de la base. Son *aire convexe* = circonférence de la base × moitié de la génératrice $= \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$

Volume = le tiers du produit de sa base par sa hauteur = le tiers du cylindre de même base et de même hauteur $= \frac{1}{3} \pi r^2 h = 1.0472\, r^2 h$.

11. *Tronc de cône droit à bases parallèles*; son *aire* = produit de la génératrice du tronc par la moitié de la somme des circonférences des bases = produit de la génératrice du tronc par la circonférence menée à égales distances des bases.

$$\textit{Volume} = \frac{1}{3} \pi h \left\{ R^2 + r^2 + Rr \right\} = 1.0472\, h (R^2 + r^2 + Rr)$$

R, r, h étant les rayons respectifs des bases et h leur distance.

12. L'*aire convexe* engendrée par la révolution complète de plusieurs côtés de polygone régulier autour d'un axe = la projection sur cet axe de ces côtés du polygone, multipliée par la circonférence du cercle inscrit à ces côtés.

13. Le *volume* engendré par le *secteur* polygonal régulier formé au centre par les côtés ci-dessus = la projection du périmètre convexe du secteur sur l'axe de rotation multipliée par $\frac{2}{3}\pi$ et par le carré du rayon du cercle inscrit.

14. L'*aire* engendrée par une courbe plane quelconque qui a tourné autour d'un axe situé dans son plan, est égale à la longueur développée de la courbe multipliée par le chemin qui a été parcouru par son CENTRE DE GRAVITÉ.

15. Le *volume* engendré par la révolution d'une figure plane quelconque autour d'un axe situé dans son plan, est égal au produit de l'aire de la figure par le chemin qui a été parcouru par son CENTRE DE GRAVITÉ.

16. L'*aire de la sphère* est le produit de son diamètre $D = 2R$ par la circonférence de son grand cercle, ou $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$ soit quatre fois l'aire de son grand cercle $= \pi D^2 = 12.5663\, R^2 = 3.14159\, D^2$.

17. Le *volume de la sphère* $= \frac{4}{3}\pi R^3 =$ son aire $\times$ le tiers de son rayon $=$ les deux tiers du cylindre circonscrit $= \frac{1}{6}\pi D^3 = 0.5236 D^3 = 4.18879 R^3$.

18. On obtiendrait le *diamètre* d'une sphère matérielle par la méthode suivante : 1° décrivez sur cette sphère un cercle quelconque, et conservez l'ouverture de compas a qui a servi à le décrire ; 2° marquez trois points quelconques A, B, C sur la circonférence de ce cercle ; 3° avec les trois distances AB, AC, BC, construisez sur le papier un triangle rectiligne auquel vous circonscrirez un cercle dont le rayon r sera ainsi déterminé ; 4° construisez un triangle rectangle dont a soit l'hypothénuse, et r un côté de l'angle droit ; 5° prolongez le troisième côté de ce triangle jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée à l'hypothénuse, du sommet opposé ; vous formerez ainsi un plus grand triangle rectangle, dont le premier fera partie, et dont l'hypothénuse sera le diamètre de la sphère.

Ce procédé s'appliquerait à une sphère dont une portion seulement serait visible.

19. *L'aire* de la *calotte sphérique*, celle de la zône à une ou deux bases $=$ circonférence d'un grand cercle de la sphère $\times$ hauteur $h = 2\pi R \times h$.

20. Le *volume* du *segment sphérique* à une base, dont h est la hauteur, R étant le rayon de la sphère, $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h) = 1.0472\, h^2 (3R - h)$.

21. Le *volume* de la *tranche sphérique* ou segment à deux bases $=$ produit de la hauteur h de la tranche par la demi-somme des deux bases, plus une sphère qui a h pour diamètre $= \frac{1}{2}\pi h (r^2 + r'^2) + \frac{1}{6}\pi h^3$

$$= 1.570796\, h (r^2 + r'^2) + 0.52359\, h^3.$$

22. Le *volume* du *secteur sphérique* $=$ produit de l'aire de la calotte qui lui sert de base par le tiers du rayon R ; d'où, h étant la hauteur de la calotte, on a

$$2\pi R h \times \frac{1}{3} R = \frac{2}{3}\pi R^2 h = 2.09439\, R^2 h.$$

23. L'aire du cylindre est moyenne proportionnelle entre les aires de la sphère et du cône circonscrit, en comprenant les bases, et l'on a

cyl. : sph. : cône :: 6 : 4 : 9

24. L'aire de la sphère $=$ celle du cylindre qui lui est circonscrit, et si l'on comprend les bases du cylindre, l'aire de la sphère est les $\frac{2}{3}$ de l'aire du cylindre.

25. On a entre les parties des cinq polyèdres réguliers et celles de la sphère qui leur est circonscrite, les relations suivantes :

Le rayon de la sphère circonscrite étant r, la circonférence d'un de ses grands cercles est πr^2, la surface de cette sphère est $4\pi r^2$ et son volume $\frac{4}{3}\pi r^3$, on a pour les corps réguliers :

	Tétraèdre.	Hexaèdre.	Octaèdre.	Dodécaèdre.	Icosaèdre.
Côté. . .	$\frac{3}{2} r$. . . .	$\frac{r}{3}\sqrt{40}$	$\frac{r}{4}\sqrt{21}$ . .	$\frac{r}{6}\sqrt{\frac{11\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{\sqrt{5}-1}}$	$\frac{r}{10}\sqrt{57}$
Surface. .	$\frac{9r^2}{4}\sqrt{3}$	$\frac{20}{3} r^2$	$\frac{21}{8}\ {}^{2}\sqrt{3}$	$\frac{55}{12} r^2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1+\sqrt{5}}}$	$\frac{57}{20} r^2 \sqrt{3}$
Volume. .	$\frac{3r^3}{8}\sqrt{3}$	$\frac{40}{27} r^3$	$\frac{21}{32} r^3 \sqrt{3}$	$\frac{275}{216} r^3 \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1+\sqrt{5}}}$	$\frac{171}{200} r^3 \sqrt{3}$

d le diamètre moyen des fonds, l la longueur intérieure du tonneau, et V sa contenance, on a savoir :

13. Si le tonneau a une courbure très-prononcée

$$V = \frac{\pi}{4}\, l \left\{ d + \tfrac{2}{3}(D-d) \right\}^2, \qquad \text{et } \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

14. Si le tonneau est moins arqué

$$V = 0.7854\, l \left\{ d + \tfrac{3}{5}(D-d) \right\}^2$$

15. Enfin, s'il est presque cylindrique

$$V = 0.7854\, l \left\{ d + \tfrac{11}{10}(D-d) \right\}^2$$

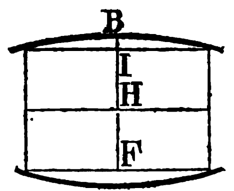
les quantités entre parenthèses sont les diamètres de cylindres de même capacité que les tonneaux.

16. La formule suivante est, en quelque sorte, *moyenne*

$$V = 0.0873\, l \left\{ d + 2D \right\}^2$$

17. *Voyez* ci-dessous les dimensions générales et les épaisseurs des fonds des tonneaux les plus communs :

NOMS DES PIÈCES.	Contenant en litres.	Longueur intérieure.	Diamètre intérieur du bouge.	Diamètre intérieur du fond.	Épaisseur des fonds.
		millim.	millim.	millim.	
Demi-hectolitre. . .	50	454	389	345	0.011
Hectolitre..	100	572	490	435	
Double hectolitre. .	200	720	618	548	0.015 à 0.02
	300	825	707	628	
	400	908	778	691	
Demi-kilolitre. . .	500	978	838	745	0.025 à 0.032
	600	1039	891	794	
	700	1093	938	833	
	800	1144	980	871	
	900	1190	1019	906	
Kilolitre.	1000	1232	1056	938	



18. Si le tonneau est en vidange, la hauteur BH $= h$ de la partie vide BF — FH est donnée immédiatement par une tige enfoncée jusques au fond, tige que le liquide mouille sur une hauteur FH qu'on mesure; cela posé, on a

$$\text{vide} = \frac{\pi}{4}\, l\,(1.5\,h)^2 = 1.767\, l\, h^2$$

pourvu que le plein excède le vide.

19. Si au contraire c'est le vide qui excède le plein, on mesurera *le plein* par la formule ci-dessus.

20. Enfin, dans les cas où le vide approcherait de l'extrémité des diamètres verticaux des fonds, si le liquide par exemple était voisin de I, on aurait, en faisant la hauteur du vide $= h$

$$\text{vide} = \frac{\pi}{4}\, l\,(\tfrac{5}{3}h)^2 = 0.785\, l\,(\tfrac{5}{3}h)^2 = 2.18\, l h^2$$

et si le liquide avait atteint le niveau I, h' étant $=$ BI, on prendrait

$$\text{vide} = \frac{\pi}{4}\, l\,(\tfrac{7}{4}h')^2 = 2.4\, l h'^2.$$

(M). *Valeurs et formules trigonométriques.*

1. Le rayon d'un cercle étant R, son diamètre D = 2R, et son aire = A.
La demi-circonférence est πR.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338$$
$$\log.\ \pi = 0.49714987269413385435126828 8$$
$$\log.\ \text{hyperb.}\ \pi = 1.1447298858494001741434237$$

La circonférence entière C est $2\pi R$

$$2\pi = 6.2831853071 79...$$

On a encore $\frac{1}{2}\pi = 1.5707963267948966.$

(Voyez d'autres valeurs, au mot *Facteurs.*)

$$D = \frac{C}{\pi} = C \times 0.318309886 18379 \qquad \log.\ \frac{1}{\pi} = \bar{1}.50285013$$

$$R = \frac{C}{2\pi} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0.564189583\sqrt{A}$$

L'arc qui, développé, aurait même longueur que le rayon, a pour graduation 57°, 17′, 44″, 48‴, 22^iv, 29^v, 21^vi; faisant R = 1.

Le sinus de cet arc = 0.84147098480514
Son cosinus = 0.54030230584341

2. Dans le cercle dont le rayon = 1
L'arc de A° degrés a une longueur =

$$\frac{A \times \pi}{180} = \frac{A}{\frac{180}{\pi}} = \frac{A°}{57.2957795130823208767 98}$$

L'arc de A′ minutes a une longueur =

$$\frac{A' \times \pi}{10800} = \frac{A'}{\frac{10800}{\pi}} = \frac{A'}{3437.7467707849392526078 8}$$

L'arc de A″ secondes a une longueur =

$$\frac{A'' \times \pi}{648000} = \frac{A''}{\frac{648000}{\pi}} = \frac{A''}{206264.8062470963551564728}$$

Faisant $\frac{180}{\pi} = d$; $\frac{10800}{\pi} = m$ et $\frac{648000}{\pi} = s$

on a
$$\log. d = 1.7581226324091722154525264 13$$
$$\log. m = 3.5362738827928158479612932 11$$
$$\log. s = 5.3144251331764594804700600 09$$

3. L'arc de 1° a pour longueur : 0.01745 32925 19943 2956...
L'arc de 1′ 0.00029 08882 08665 721593...
L'arc de 1″ 0.00000 48481 36811 09535988

On a encore avec une erreur moindre qu'une unité du 15e ordre décimal pour le sinus

sin. 1″ = 0.00000 48481 368092
cos. 1″ = 0.99999 99999 88247
tang. 1″ = 0.00000 48481 36811
$\sin.^2 1''$ = 0.00000 00000 23504 43053
$\cos.^2 1''$ = 0.99999 99999 76495 56946

On a aussi :

sin. 1 minute = 0.00029 08882 04564
sin. 10 secondes = 0.00004 481368092
sin. 1 tierce = 0.00000 00808 02280
sin. 1 quarte = 0.00000 00013 46705
sin. 1 quinte = 0.00000 00000 22445

4. Réciproquement, dans le cercle dont le rayon est 1
L'arc de longueur α a pour graduation

en secondes $\alpha'' \times \frac{648000}{\pi} = \alpha'' \times 206264.806..$

en minutes $\alpha' \times 3437.746$

en degrés $\alpha^{o} \times 57.295...$

5. L'arc qui, dans le cercle de rayon I, serait la fraction $\frac{m}{n}$ du quadrant $\frac{\pi}{2}$, aurait pour sinus une longueur donnée par

$$\sin.\text{ de l'arc}.\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$+\frac{m}{n} \times 1.5707963.. - \frac{m^3}{n^3} \times 0.6459640..$$

$$+\frac{m^5}{n^5} \times 0.0796926.. - \frac{m^7}{n^7} \times 0.0046817..$$

$$+\frac{m^9}{n^9} \times 0.0001604.. - \frac{m^{11}}{n^{11}} \times 0.0000035..$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}} \times 0.000000056 - \ldots\ldots\ldots$$

Son cosinus serait donné par $\cos.\text{ de l'arc}\frac{m}{n}\frac{\pi}{2} =$

$$+\ 1.0000000.. - \frac{m^2}{n^2} \times 1.2337005$$

$$+\frac{m^4}{n^4} \times 0.2536695.. - \frac{m^6}{n^6} \times 0.0208634..$$

$$+\frac{m^8}{n^8} \times 0.0009192.. - \frac{m^{10}}{n^{10}} \times 0.0000252..$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \times 0.0000004 \quad - \frac{m^{14}}{n^{14}} \times 0.000000006$$

$$+ \ldots$$

Sa tangente serait $\text{tang.}\ \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{m}{n}\times 1.57079 + \frac{m^3}{n^3}\times 1.2919 + \frac{m^5}{n^5}\times 1.2751 + \frac{m^7}{n^7}\times 1.2734 + .$$

et sa cotangente $\text{cotang.}\ \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{n}{m}\times 0.6366 - \frac{m}{n}\times 0.5236 - \frac{m^3}{n^3}\times 0.0861 - \frac{m^5}{n^5}\times 0.0101 -$$

6. Dans le cercle de rayon $= 1$, les arcs indiqués dans la colonne à gauche ont pour sinus, cosinus, tangentes, etc., les valeurs portées au tableau ci-dessous, dans lequel on peut d'ailleurs faire les substitutions :

$$\sin.(-A) = -\sin.A \qquad \cos.(-A) = \cos.A$$
$$\text{tang.}(-A) = -\text{tang.}A \qquad \text{cotang.}(-A) = -\text{cotang.}A$$

Arcs.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Sécante.	Coséc.	Observations.
Arc $(-A)$	$-\sin.A$	$\cos.A$	$-\text{tang}.A$	$-\cot.A$	$\text{séc}.A$	$-\text{coséc}.A$	On considère comme positives les quantités >0 et comme négatives celles <0.
Arc $[-(90+A)]^\circ$	$-\sin.A$	$-\cos.A$	$\text{tang}.A$	$\cot.A$	$-\text{séc}.A$	$-\text{coséc}.A$	
Arc 0	0	1	0	∝	1	∝	
entre 0° et 90°	<1	<1	>0	>0	>0	>0	
Arc $(0+A)$	$\sin.A$	$\cos.A$	$\text{tang}.A$	$\cot.A$	$\text{séc}.A$	$\text{coséc}.A$	A est supposé toujours $<90^\circ$. Les sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un angle moindre qu'un droit, sont positifs.
Arc de 30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	
Arc de 45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	
Arc de 60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	En général, la sécante a le même signe que le cosinus, et la cosécante le même signe que le sinus.
Arc de $(90^\circ - A)$	$\cos.A$	$\sin.A$	$\cot.A$	$\text{tang}.A$	$\text{coséc}.A$	$\text{séc}.A$	
Arc de 90°	1	0	∝	0		1	Tout angle compris entre 90° et 180°, a toutes ses lignes trigonométriques négatives, moins le sinus et la cosécante, qui sont positifs.
entre 90° et 180°	>0	<0	<0	<0	<0	>0	
Arc de $(90+A)^\circ$	$\cos.A$	$-\sin.A$	$-\cot.A$	$-\text{tang}.A$	$-\text{coséc}.A$	$\text{séc}.A$	
Arc de 120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
de 135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	
de 150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	

Arcs.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Sécante.	Coséc.	Observations.
Arc de (180 — A)	sin.A	— cos.A	—tang.A	— cot.A	— séc.A	coséc.A	
Arc de 180°	0	— 1	0	∞	— 1	∞	
entre 180 et 270°	< 0	< 0	> 0	> 0	< 0	< 0	Entre 180° et 270°, le sinus et le cosinus sont négatifs ; la tangente et la cotangente sont positives.
Arc de (180 + A)°	— sin.A	— cos.A	tang.A	cot.A	— séc A	—coséc.A	
Arc de 210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2	
de 225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	
de 240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	
de (270° — A)	— cos.A	— sin.A	cot.A	tang.A	—coséc.A	— séc.A	
Arc de 270°	— 1	0	∞	0	∞	— 1	
entre 270 et 360°	< 0	> 0	< 0	< 0	> 0	< 0	Entre 270° et 360, le cosinus et la sécante sont positifs, et les autres lignes négatives.
Arc de (270 + A)°	— cos.A	sin.A	— cot.A	—tang.A	coséc A	— séc.A	
de 300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	
de 315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	— 1	— 1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	
de 330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	— 2	
de (360 — A)°	— sin.A	cos.A	—tang.A	— cot.A	séc.A	—coséc.A	
Arc de 360°	0	1	0	∞	1	∞	
Arc de (362 + A)°	sin.A	cos.A	tang.A	cot.A	séc.A	coséc.A	

7. Réciproquement

Aux valeurs ci-dessous	correspondent les arcs
sin. A	[A]°. [180 — A]°. [360 + A]
cos. A	[∓ A] : [360 ∓ A]
tang. A	[A] . [— (90 + A)] . [180 + A] . [360 + A]
— sin. A	[— A] . [— (90 + A)] . [180 + A] . [360 — A]
— cos. A	(180 ∓ A) . [— (90 + A)]
— tang. A	[— A] . [180 — A] . [360 — A]
+ sin. A et + cos. A	[A] . [360 + A]
+ sin. A et — cos. A	[180 — A]

— sin. A et + cos. A	[— A] . [360 — A]
— sin. A et — cos. A	[— (90 + A)] . [180 + A]
sin. = 0	0° 180° 360°
sin. = 1	90°
sin. = — 1	270°
cos. = 0	90° 270°
cos. = 1	0° 360°
cos. = — 1	180°
tang. = 0	0° 180° 360°
tang. = ∞	90° 270°
sin. = 0 et cos. = 1	0° 360°
sin. = 0 et cos. = — 1	180°
sin. = 1 et cos. = 0	90°
sin. = — 1 et cos. = 0	270°

8. Les formules qui précèdent et toutes celles qui suivent, supposent essentiellement que le rayon du cercle = 1 ; sin. A, cos. A, etc., sont donc les longueurs des sinus, cosinus, etc., d'un arc dont la longueur est A pris dans ce cercle ; en sorte que si A est 30° par exemple, sin. A signifie réellement $\sin. 30° \times \frac{\pi}{180°}$ ou sinus de l'arc de rayon 1, dont le développement $= \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{1}{6}\pi$.

Si l'on voulait que les formules servissent pour un rayon R quelconque, il faudrait y introduire R comme facteur en l'élevant à une puissance telle que, après l'introduction, le nombre des dimensions de chaque terme fût le même ; ainsi les formules supérieures deviendraient celles qui les suivent immédiatement

$$\sin.^2 A + \cos.^2 A = 1$$
$$\sin.^2 A + \cos.^2 A = R^2$$
$$\cos. A = \sqrt{1 - \sin.^2 A}$$
$$\cos. A = \sqrt{R^2 - \sin.^2 A}$$
$$\sin. (A \pm B) = \sin. A \cos. B \pm \sin. B \cos. A$$
$$R \sin. (A \pm B) = \sin. A \cos. B \pm \sin. B \cos. A$$
$$\sin. 3A = 3 \sin. A - 4 \sin.^3 A$$
$$\sin. 3A = 3 \sin. A - \frac{4 \sin.^3 A}{R^2}$$
$$\text{tang}. 2A = \frac{2 \text{tang}. A}{1 - \text{tang}.^2 A}$$
$$\text{tang}. 2A = \frac{2 R^2 \text{tang}. A}{R^2 - \text{tang}.^2 A}$$
$$\text{tang}.^2 A - \text{tang}.^2 B = \frac{\sin. (A + B) \sin. (A - B)}{\cos.^2 A \cos.^2 B}$$
$$\text{tang}.^2 A - \text{tang}.^2 B = \frac{R^4 \sin. (A + B) \sin. (A - B)}{\cos.^2 A \cos.^2 B}$$

et ainsi de suite. Cela posé, on a en général :

9.

$$\text{arc A} = \begin{cases} \sin.A + \dfrac{1 \sin.^3 A}{2.3} + \dfrac{1.3 \sin.^5 A}{2.4.5} + \dfrac{1.3.5 \sin.^7 A}{2.4.6.7} + \dfrac{1.3.5.7 \sin.^9 A}{2.4.6.8.9} \\ = \text{tang}.A - \frac{1}{3}\text{tang}.^3 A + \frac{1}{5}\text{tang}.^5 A - \frac{1}{7}\text{tang}.^7 A + \ldots \end{cases}$$

$$\sin.A = \begin{cases} \cos.A\ \text{tang}.A = \frac{1}{2}\text{corde}\,(2A) = \sqrt{1-\cos.^2 A} = \dfrac{\text{tang}.A}{\sqrt{1+\text{tang}.^2 A}} \\ \quad = \dfrac{1}{\text{coséc}.A} \\ = A - \dfrac{A^3}{1.2.3} + \dfrac{A^5}{1.2.3.4.5} - \dfrac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \end{cases}$$

$$\sin.\ \text{verse A} = 1 - \cos.A = 2\sin.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\cos.A = \begin{cases} \dfrac{\sin.A}{\text{tang}.A} = \sqrt{1-\sin.^2 A} = 1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} A \\ \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tang}.^2 A}} = \sin.A\ \cot.A \\ = \dfrac{1}{\text{séc}.A} = 2\cos.^2 \frac{1}{2} A - 1 \\ = 1 - \dfrac{A^2}{1.2} + \dfrac{A^4}{1.2.3.4} - \dfrac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \end{cases}$$

$$\text{tang}.A = \begin{cases} \dfrac{\sin.A}{\cos.A} = \dfrac{1}{\cot.A} \\ = A + \dfrac{A^3}{1.3} + \dfrac{2A^5}{1.3.5} + \dfrac{17A^7}{5.7.9} \ldots = A + \dfrac{A^3}{3} + \dfrac{2A^5}{15} \\ \quad + \dfrac{17A^7}{315} + \end{cases}$$

$$\text{séc}.A = \frac{1}{\cos.A} = \sqrt{1+\text{tang}.^2 A} = \text{cotang}.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}A) - \text{tang}.A$$

$$\text{cotang}.A = \frac{1}{\text{tang}.A} = \frac{\cos.A}{\sin.A} = \frac{1}{A} - \frac{1}{3}A - \frac{1}{45}A^3 - \frac{2}{945}A^5 -$$

$$\text{coséc}.A = \frac{1}{\sin.A} = \text{cotang}.\,\tfrac{1}{2}A - \text{cotang}.A$$

10.

$$\text{Rayon } 1 = \begin{cases} \sin.^2 A + \cos.^2 A = \sin.\ \text{verse}\, A + \cos.A = \cos.A + 2\sin.^2 \frac{1}{2}A = \\ = 2\cos.^2 \frac{1}{2} A - \cos.A = \cot.A\ \text{tang}.A = \dfrac{\cos.A\ \text{tang}.A}{\sin.A} \\ \quad = \cos.A\ \text{séc}.A \\ = \text{coséc}.A \sin.A = \cos.A\sqrt{1+\text{tang}.^2 A} = 2\cos.^2 A - \cos.2A \\ \quad = \cos.2A + 2\sin.^2 A \\ = \sin.^2 \frac{1}{2}A + \cos.^2 \frac{1}{2}A = \text{séc}.^2 A - \text{tang}.^2 A = \text{coséc}.^2 A - \cot.^2 A \\ = \text{etc.} \end{cases}$$

$$1 + \sin.A = 2 \sin.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} A) \cos.\ (45^\circ - \tfrac{1}{2} A) = 2 \sin.^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} A)$$

$$1 - \sin.A = 2 \cos.^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} A) = 2 \sin.^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} A)$$

$$1 + \cos.A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$1 - \cos.A = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\frac{1 + \sin.A}{\cos.A} = \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} A)$$

$$\frac{1 - \sin.A}{\cos.A} = \text{tang.}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2} A)$$

$$\frac{1 + \sin.A}{1 - \sin.A} = \text{tang.}^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} A)$$

$$\frac{1 - \sin.A}{1 + \sin.A} = \text{tang.}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} A)$$

$$\frac{1 + \cos.A}{1 - \cos.A} = \cot.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\frac{1 + \sin.A}{1 + \cos.A} = \frac{\sin.^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} A)}{\cos.^2 \tfrac{1}{2} A}$$

$$\frac{1 - \sin.A}{1 - \cos.A} = \frac{\sin.^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} A)}{\sin.^2 \tfrac{1}{2} A}$$

$$\frac{1 + \sin.B}{1 + \cos.A} = \frac{\sin.^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} B)}{\cos.^2 \tfrac{1}{2} A}$$

11.

$$\sin.^2 A + \cos.^2 A = 1$$

$$\text{séc.}^2 A - \text{tang.}^2 A = 1$$

$$\sin.^2 A = \frac{1 - \cos.\ 2A}{2} = 1 - \cos.^2 A = (1 - \cos.A)(1 + \cos.A)$$

$$\cos.^2 A = \frac{1 + \cos.\ 2A}{2} = 1 - \sin.^2 A$$

$$\text{tang.}^2 A = \frac{1 - \cos.^2 A}{1 - \sin.^2 A} = \text{séc.}^2 A - 1$$

$$\cot.^2 A = \text{coséc.}^2 A - 1$$

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \cos.^2 B - \cos.^2 A = \sin.\ (A + B) \sin.\ (A - B)$$

$$\cos.^2 A - \sin.^2 B = \cos.\ (A + B) \cos.\ (A - B)$$

$$\text{tang.}^2 - \text{tang.}^2 B = \frac{\sin.\ (A + B) \sin.\ (A - B)}{\cos.^2 A \cos.^2 B}$$

$$\cot.^2 A - \cot.^2 B = -\frac{\sin.\ (A + B) \sin.\ (A - B)}{\sin.^2 A \sin.^2 B}$$

12.

$$\sin.\ (A \pm B) = \sin.A \cos.B \pm \sin.B \cos.A$$

$$\cos.\ (A \pm B) = \cos.A \cos.B \mp \sin.A \sin.B$$

$$\text{tang.}(A \pm B) = \frac{\sin.(A \pm B)}{\cos.(A \pm B)} = \frac{\text{tang.}A \pm \text{tang.}B}{1 \mp \text{tang.}A\,\text{tang.}B}$$

$$\cot.(A \pm B) = \frac{\cot.A\,\cot.B \mp 1}{\cot.B \pm \cot.A}$$

$$\frac{\sin.(A + B)}{\sin.(A - B)} = \frac{\cot.B + \cot.A}{\cot.B - \cot.A} = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{\text{tang.}A - \text{tang.}B}$$

$$\frac{\sin.(A \pm B)}{\cos.(A \mp B)} = \frac{\cot.B \pm \cot.A}{\pm 1 + \cot.A\,\cot.B} = \frac{\text{tang.}A \pm \text{tang.}B}{1 \pm \text{tang.}A\,\text{tang.}B}$$

$$\frac{\cos.(A + B)}{\cos.(A - B)} = \frac{\cot.B - \text{tang.}A}{\cot.B + \text{tang.}A} = \frac{1 - \text{tang.}A\,\text{tang.}B}{1 + \text{tang.}A\,\text{tang.}B}$$

---

13. $\sin.A\,\sin.B = \frac{1}{2}\cos.(A - B) - \frac{1}{2}\cos.(A + B)$

$\sin.A\,\cos.B = \frac{1}{2}\sin.(A + B) + \frac{1}{2}\sin.(A - B)$

$\cos.A\,\cos.B = \frac{1}{2}\cos.(A + B) + \frac{1}{2}\cos.(A - B) = \cos.^2\frac{1}{2}(A - B) - \sin.^2\frac{1}{2}(A + B)$

$\cos.A\,\sin.B = \frac{1}{2}\sin.(A + B) - \frac{1}{2}\sin.(A - B)$

$\sin.A\,\sin.m\,A = \frac{1}{2}\cos.(m - 1)A - \frac{1}{2}\cos.(m + 1)A$

$\sin.A\,\cos.m\,A = \frac{1}{2}\sin.(m + 1)A - \frac{1}{2}\sin.(m - 1)A$

$\cos.A\,\cos.m\,A = \frac{1}{2}\cos.(m + 1)A + \frac{1}{2}\cos.(m - 1)A$

$\cos.A\,\sin.m\,A = \frac{1}{2}\sin.(m + 1)A + \frac{1}{2}\sin.(m - 1)A$

---

14. $\sin.2A = 2\sin.A\,\cos.A = 2\sin.A\,\sin.(90^\circ - A)$

$\cos.2A = \cos.^2A - \sin.^2A = 2\cos.^2A - 1 = 1 - 2\sin.^2A$

$$\text{tang.}2A = \frac{2\,\text{tang.}A}{1 - \text{tang.}^2A}$$

$\text{cotang.}2A = \frac{1}{2}(\text{cotang.}A - \text{tang.}A)$

$\sin.3A = 3\sin.A - 4\sin.^3A$

$\cos.3A = 4\cos.^3A - 3\cos.A$

$$\text{tang.}3A = \frac{3\,\text{tang.}A - \text{tang.}^3A}{1 - 3\,\text{tang.}^2A}$$

$\sin.(m + 1)A = 2\cos.A\,\sin.m\,A - \sin.(m - 1)A$

$\cos.(m + 1)A = 2\cos.A\,\cos.m\,A - \cos.(m - 1)A$

15.

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \cos.A}{2}}; \qquad 2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \cos.A$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \cos.A}{2}}; \qquad 2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1 + \cos.A$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.A}{1 + \cos.A} = \frac{1 - \cos.A}{\sin.A} = \sqrt{\frac{1 - \cos.A}{1 + \cos.A}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sin.}A}{1-\text{cos.}A} = \frac{1+\text{cos.}A}{\text{sin.}A} = \text{coséc.}A + \text{cotang.}A$$

$$\text{cot.}^2\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1+\text{cos.}A}{1-\text{cos.}A} = \frac{1}{\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}A}$$

16.

$$\text{sin.}A + \text{sin.}B = 2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{sin.}A - \text{sin.}B = 2\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{cos.}A + \text{cos.}B = 2\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{cos.}B - \text{cos.}A = 2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{tang.}A + \text{tang.}B = \frac{\text{sin.}\,(A+B)}{\text{cos.}A\ \text{cos.}B} = \frac{\text{sin.}A\ \text{cos.}B + \text{sin.}B\ \text{cos.}A}{\text{cos.}A\ \text{cos.}B}$$

$$\text{tang.}A - \text{tang.}B = \frac{\text{sin.}\,(A-B)}{\text{cos.}A\ \text{cos.}B} = \frac{\text{sin.}A\ \text{cos.}B - \text{sin.}B\ \text{cos.}A}{\text{cos.}A\ \text{cos.}B}$$

$$\text{cot.}A + \text{cot.}B = \frac{\text{sin.}\,(A+B)}{\text{sin.}A\ \text{sin.}B}$$

$$\text{cot.}A - \text{cot.}B = -\frac{\text{sin.}\,(A-B)}{\text{sin.}A\ \text{sin.}B} = \frac{\text{sin.}\,(B-A)}{\text{sin.}A\ \text{sin.}B}$$

$$\text{tang.}A \pm \text{cot.}B = \frac{\pm\,\text{cos.}\,(A \mp B)}{\text{cos.}A\ \text{sin.}B}$$

$$\text{cot.}A \pm \text{tang.}B = \frac{\text{cos.}\,(A \mp B)}{\text{sin.}A\ \text{cos.}B}$$

17.

$$\frac{\text{sin.}A + \text{sin.}B}{\text{sin.}A - \text{sin.}B} = \frac{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\text{sin.}A + \text{sin.}B}{\text{cos.}A + \text{cos.}B} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\text{cos.}B - \text{cos.}A}{\text{sin.}A - \text{sin.}B}$$

$$\frac{\text{sin.}A + \text{sin.}B}{\text{cos.}A - \text{cos.}B} = -\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\text{sin.}A - \text{sin.}B}{\text{cos.}A + \text{cos.}B} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\text{sin.}A - \text{sin.}B}{\text{cos.}A - \text{cos.}B} = -\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$\frac{\text{sin.}A - \text{sin.}B}{\text{cos.}B - \text{cos.}A} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$\frac{\text{cos.}A + \text{cos.}B}{\text{cos.}A - \text{cos.}B} = -\frac{\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)} = -\frac{\text{séc.}A + \text{séc.}B}{\text{séc.}A - \text{séc.}A}$$

$$= -\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\text{tang.A} + \text{tang.B}}{\text{tang.A} - \text{tang.B}} = \frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)} = \frac{\cot.B + \cot.A}{\cot.B - \cot.A}$$

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.A + \sin.B} = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.A - \sin.B} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

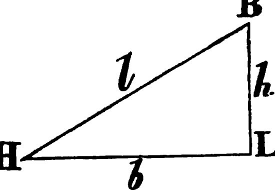
(N). *Résolution des triangles rectilignes.*

1. ***Principes, et formules générales.*** — ***Dans tout triangle rectiligne quelconque***, 1° les sinus des angles sont comme les côtés opposés à ces angles; 2° le rayon des tables étant supposé = 1, le carré d'un côté quelconque du triangle égale la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces mêmes côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent; 3° la somme de deux côtés quelconques est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Si le triangle est rectangle, et si l'on fait le rayon des tables = 1, 1° un côté quelconque de l'angle droit est le produit de l'hypothénuse par le cosinus de l'angle aigu compris; 2° un des côtés de l'angle droit est le produit de l'autre côté par la tangente de l'angle opposé au premier.

Ces théorèmes suffisent à la résolution de tous les triangles rectilignes, et les formules qui suivent en sont la traduction algébrique

2. *Triangles rectangles.* Soient donc en général b la base, h la hauteur, l l'hypothénuse d'un triangle rectangle, et B, H, L les angles respectivement opposés à ces côtés, on a



$$l = \sqrt{h^2 + b^2} = h \text{ séc. B} = b \text{ séc. H}$$

$$b = \text{L cos.H} = h \text{ cotang.H} = \sqrt{l^2 - h^2} = h \text{ tang.B}$$

$$h = b \text{ tang.H} = \text{L sin.H} = \text{L cos.B} = \sqrt{l^2 - b^2} = \sqrt{(l+b)(l-b)}$$

$$L = 90° = B + H$$

$$\cos.B = \sin.H = \frac{h}{l}$$

$$\cos.H = \sin.B = \frac{b}{l}$$

$$\text{tang.B} = \text{cotang.H} = \frac{b}{h}$$

$$l - b = h \text{ tang. } \tfrac{1}{2} H$$

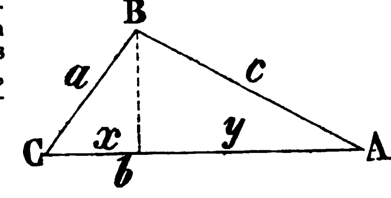
$$l - h = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B$$

On pourra s'exercer à résoudre ces triangles à l'aide des valeurs numériques qui suivent.

$l = 56^{m}.925$	$b = 45^{m}.540$	$h = 34^{m}.154$
log. l = 1.7553030	log. b = 1.6583930	log. h = 1.5334543
L = 90°	B = 53°,7′,48″4	H = 36°,52′,11″,6

log. (sin.B = cos.H)	9.9030900
log. (cos.B = sin.H)	9.7781512
log. (tang.B = cot.H)	10.1249389

3. *Triangles obliquangles.* Désignant par A, B, C les angles de l'un de ces triangles, et par a, b, c les côtés respectivement opposés à ces angles, on a directement, en partant des principes 1 et 2,



$$A + B + C = 180^\circ$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos.A} = \frac{b \sin.A}{\sin.B} = \frac{c \sin.A}{\sin.C}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos.B} = \frac{a \sin.B}{\sin.A} = \frac{c \sin.B}{\sin.C}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos.C} = \frac{a \sin.C}{\sin.A} = \frac{b \sin.C}{\sin.B}$$

1[er] *et* 2[e] *cas.* Ces équations résoudront en général les cas où l'on connaît soit deux angles et un côté, soit deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ; toutefois, pour ce dernier cas, comme l'un des angles cherchés pourra n'être déterminé que par un sinus, et comme un sinus correspond à deux arcs supplémentaires, il y aura deux solutions, à moins que l'énoncé ou les conditions de la question rendent l'une d'elles inadmissible.

3[e] *cas.* Si l'on ne connaît que deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, b, c et A, par exemple, le troisième principe donnera immédiatement la relation

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{c-b}{c-b}\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C + B) = \frac{c-b}{c+b}\text{cotang.}\tfrac{1}{2}A \quad (*)$$

or

$$\frac{C+B}{2} = \frac{180 - A}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\text{somme} = \tfrac{1}{2}s$$

et faisant $\frac{C-B}{2} = \frac{1}{2}$ différence $= \frac{1}{2}d$, il vient

$$C = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d \qquad \text{et} \qquad B = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d$$

4[e] *cas.* Enfin, si l'on ne connaissait que les trois côtés a b c, on trouverait un angle quelconque, A par exemple, par l'emploi de la formule suivante qui se déduit du second principe, et dans laquelle on fait le périmètre $a + b + c$, du triangle $= 2p$,

---

(*) On peut remarquer que l'on aurait encore (M.—47)

$$\sin.C - \sin.B = \frac{c-b}{c+b}(\sin.C + \sin.B)$$

et que, en général, dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la somme des sinus des angles opposés à ces côtés est à la différence de ces sinus.

$$\sin.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\;;\quad \cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

On aurait encore, en remarquant que les deux segments x et y de la base b sont déterminées par

$$x+y=b \quad \text{et} \quad x-y=\frac{(a+c)(a-c)}{b}$$

$$\cos.A=\frac{y}{c}\,;\quad \cos.C=\frac{x}{a}\,;\quad B=180^{\circ}-(A+C)$$

Soient, pour l'application numérique de ce dernier cas,

$a=18130^{m},629$ $b=23375^{m}$ $c=15559^{m},276$

on a	$2p=58074^{m}.905$		
	$p=29037^{m}.4525$..	log. p =	4.4629585
	$(p-a)=10906^{m}.8235$..	log. $(p-a)$ =	4.0376983
		log. R^2 =	20.0000000
		compl. log. b ..	5.6128772
		compl. log. c ..	5.8080106
		log. $\cos.^2\frac{1}{2}A$ ..	19.9215446
	$\frac{1}{2}A=23^{\circ},59',15''$	log. $\cos.\frac{1}{2}A$ ..	9.9607723

$A=47^{\circ},58',30''$ $B=92^{\circ},25',10''$ $C=39^{\circ},36',20''$

On pourra s'exercer sur tous les autres cas, en supposant alternativement connues trois des données suivantes, et en cherchant les autres. Ce triangle d'épreuve appartient à la *Géodésie de Francœur.*

Triangle obliquangle d'épreuve.

Côtés a = 57.770	log. 1.7617024	log. p = 2.0357459
b = 71.577	log. 1.8647735	log. $(p-a)$ = 1.7059406
c = 87.811	log. 1.9435489	log. $(p-b)$ = 1.5682252
		log. $(p-c)$ = 1.3173947

Angles.	log. sin.	log. cos.	log. tang.
A = 40°,56'	9.8163609	9.8782186	9.9381423
B = 54°,16',8''.48	9.9094319	9.7663981	10.1430338
C = 84°,47',51''.52	9.9982073	8.9574805	11.0407268

4. Voici quelques formules générales, au moins curieuses, données par M. Noël, en 1822 :

Dans tout triangle rectiligne, on a :

$$\text{tang.}A+\text{tang.}B+\text{tang.}C=\text{tang.}A\,\text{tang.}B\,\text{tang.}C$$

$$\text{tang.}2A+\text{tang.}2B+\text{tang.}2C=\text{tang.}2A\,\text{tang.}2B\,\text{tang.}2C$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A+\text{tang.}\tfrac{1}{2}B-\cot.\tfrac{1}{2}C=-\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}B\,\cot.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}A + \cot.\tfrac{1}{2}B + \cot.\tfrac{1}{2}C = \cot.\tfrac{1}{2}A\,\cot.\tfrac{1}{2}B\,\cot.\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin.A + \sin.B + \sin.C = 4\cos.\tfrac{1}{2}A\,\cos.\tfrac{1}{2}B\,\cos.\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin.2A + \sin.2B + \sin.2C = 4\sin.A\,\sin.B\,\sin.C$$
$$\sin.2A + \sin.2B - \sin.2C = 4\cos.A\,\cos.B\,\cos.C$$

(O.) *Résolution des triangles sphériques.*

1. Dans le triangle sphérique ABC, les angles plans du *trièdre* S sont mesurés par les côtés a, b, c, du triangle et les inclinaisons des faces sont mesurées par les angles respectifs A, B, C de ce triangle.

2. On ne considère en général que les triangles sphériques formés par des arcs de grands cercles moindres chacun que la demi-circonférence ; on a donc

chaque côté $< 180°$ et chaque angle $<$ 2 droits,

et partant de cette convention, les sinus, tangentes, cosinus, etc. ne peuvent appartenir qu'à des arcs $< 180°$.

3. La somme $a + b + c$ des trois côtés de tout triangle sphérique est $< 360°$ ou $<$ la circonférence d'un grand cercle.

4. La somme $A + B + C$ des trois angles est toujours comprise entre deux et six angles droits.

5. Un côté quelconque d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence ; et $\frac{a+b+c}{2}$ est toujours $>$ qu'un côté quelconque.

6. Dans tout triangle sphérique, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, l'angle moyen au côté moyen, le plus petit angle au plus petit côté.

7. Deux triangles sphériques, tracés sur une même sphère, sont égaux : 1° lorsque les trois angles sont égaux ; 2° lorsque les trois côtés sont égaux ; 3° lorsqu'ils ont deux côtés et l'angle compris égaux chacun à chacun ; 4° lorsqu'ils ont deux angles et le côté adjacent égaux chacun à chacun.

8. Deux triangles sphériques, tracés sur des sphères de différents rayons, sont semblables : 1° lorsqu'ils sont équiangles ; 2° quand ils ont les côtés homologues semblables ; 3° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés homologues semblables.

9. On a entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique les relations suivantes :

10. Equations fondamentales (le rayon de la sphère étant 1), on a

$$\cos.a = \cos.b\cos.c + \cos.A\sin.b\sin.c;\quad \cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b\cos.c}{\sin.b\sin.c}\quad \cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B\cos.C}{\sin.B\sin.C}$$
$$\cos.b = \cos.a\cos.c + \cos.B\sin.a\sin.c;\quad \cos.B = \frac{\cos b - \cos.a\cos.c}{\sin.a\sin.c}\quad \cos.b = \frac{\cos B + \cos.A\cos.C}{\sin.A\sin.C}$$
$$\cos.c = \cos.a\cos.b + \cos.C\sin.a\sin.b;\quad \cos.C = \frac{\cos.c - \cos.a\cos.b}{\sin.a\sin.b}\quad \cos.c = \frac{\cos.C + \cos.A\cos.B}{\sin.A\sin.B}$$

Ces équations permettent de résoudre un triangle sphérique dont on connaît *trois* parties (plus le rayon de la sphère). On remarque que le sinus et le cosinus se déduisant l'un de l'autre ne doivent être considérés que comme *une* donnée.

11. On déduit de ces équations fondamentales ce qu'on nomme la *règle* ou *proportion des quatre sinus*, savoir :

$$\sin.A : \sin.B : \sin.C :: \sin.a : \sin.b : \sin.c.$$

$$\frac{\sin.A}{\sin.B}=\frac{\sin.a}{\sin.b}; \quad \frac{\sin.A}{\sin.C}=\frac{\sin.a}{\sin.c}; \quad \frac{\sin.B}{\sin.C}=\frac{\sin.b}{\sin.c}$$

relation qui enseigne que les *sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels aux sinus des côtés qui sont opposés à ces angles.*

12. *Formules des triangles rectangles.* Soit C l'angle droit, on a

$$\cos.C = 0, \qquad \sin.C = 1,$$

d'où résulte $\cos.c = \cos.a, \cos.b,$

qui substituée dans les deux autres donne

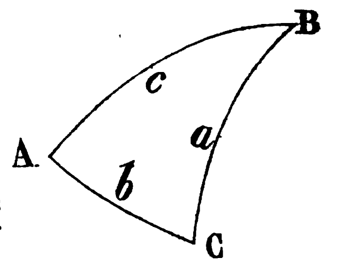
$$\cos.A = \frac{\sin.b\cos.a}{\sin.c}$$

$$\cos.B = \frac{\sin.a\cos.b}{\sin.c}$$

et

$$\frac{\sin.c}{1}=\frac{\sin.a}{\sin.A}=\frac{\sin.b}{\sin.B}$$

13. En combinant ces diverses valeurs entre elles et y faisant les substitutions connues, on obtient les formules suivantes qui donnent la résolution des triangles sphériques rectangles.



Triangle sphérique rectangle en C.

On emploiera les dernières formules lorsque les arcs seront très-petits et exprimés par des cosinus, ou voisins de 90° et exprimés par des sinus.

ÉTANT DONNÉS	TROUVER	1.
C = 90°	l'hypot. c	$\cos.c = \cos.a\cos.b$
Les côtés qui comprennent C ou a	les angles adjacents à l'hypot. A	$\tang.A = \frac{\tang a}{\sin.b}$
b	B	$\tang.B = \frac{\tang.b}{\sin.a}$

ÉTANT DONNÉS	TROUVER	
		2.
$C = 90°$	un côté b	$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$; $\text{tang.} \frac{1}{2} b = \sqrt{\left\{\text{tang.}\left(\frac{c+a}{2}\right) \text{tang.}\left(\frac{c-a}{2}\right)\right\}}$
L'hypot. c	les angles A	$\sin. A^{\star} = \frac{\sin. a^{\star}}{\sin. c}$
Un côté a	les angles B	$\cos. B = \frac{\text{tang.} a}{\text{tang.} c}$; $\text{tang.} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. (c-a)}{\sin. (c+a)}}$
		Les sinus $(c-a)$ et $(c+a)$ doivent avoir le même signe.
		3.
$C = 90°$	un côté b	$\sin. b = \frac{\text{tang.} a}{\text{tang.} A}$
Un côté de l'angle droit. a	l'hypot. c	$\sin. c = \frac{\sin. a}{\sin. A}$ — L'équation $\cos. c = \cos. a \cos. b$ doit être satisfaite.
L'angle qui lui est opposé. A	l'angle B	$\sin. B^{\star} = \frac{\sin. b^{\star}}{\sin. c} = \frac{\cos. A}{\cos. a}$
		4.
$C = 90°$	le côté b	$\text{tang.} b = \sin. a \text{ tang.} B$
Un côté et les angles adjacents. a	l'hypot. c	$\text{tang.} c = \frac{\text{tang.} a}{\cos. B}$
B	l'angle A	$\cos. A = \cos. a \sin. B$
		5.
$C = 90°$	les côtés de l'angle droit. a	$\sin. a^{\star} = \sin. c \sin. A^{\star}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{tang.} x = \sin. c \sin. A \text{ équation auxil}^{re} \\ \text{tang.} (45 - \frac{1}{2} a) = \sqrt{\text{tang.} (45° - x)} \end{array} \right.$
L'hypot. c	les côtés de l'angle droit. b	$\text{tang.} b = \text{tang.} c \cos. A$
L'angle A	le 3e angle B	$\text{tang.} B = \frac{\text{tang.} b}{\sin. a} = \frac{1}{\cos. c \text{ tang.} A}$
		6.
Les trois angles: $C = 90°$	Les trois côtés: c	$\cos. c = \cos. a \cos. b = \frac{1}{\text{tang.} A \text{ tang.} B} = \cot. A \cot. B$; $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} c = -\frac{\cos. (B+A)}{\cos. (A-B)}$
A	a	$\cos. a = \frac{\cos. A}{\sin. B}$; $\text{tang.} \frac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\text{tang.}\left(\frac{A-B}{2} + 45°\right) \text{tang.}\left(\frac{A+B}{2} - 45°\right)\right\}}$
B	b	$\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. A}$

Les quantités marquées d'un * sont de même espèce, c'est-à-dire, par exemple, que si, question 2, a est aigu ou obtus, A sera également aigu ou obtus, et réciproquement (question 5).

Exemples de calcul. Soient

C = 90°	c = 45° 30′
A = 36° 25′	a = 25° 3′ 3″.266
B = 62° 39′ 28″.383	b = 39° 18′ 49″.366

14. Etant donnés C = 90° a = 25°.3′.3″.266 b = 39°.18′.49″366
trouver l'hypothénuse *c* et les angles adjacents A et B

log. cos. *a* 9.9570956
log. cos. *b* 9.8885662

log. cos. *c* 9.8456618 . . . hypothénuse . . . *c* = 45°.30′

log. tang. *a* } 19.6696792
+log. rayon }
log. sin. *b* 9.8017919

log. tang. A 9.8678873 . . . . A = 36°.25′

log. tang. *b* } 19.9132257
+log. rayon }
log. sin. *a* 9.6267748

log. tang. B 10.2864509
10.2864076 donne 62°.39′.20″

$\frac{4330}{516}$ = . . 8″.383

62°.39′.28″.383 = B

15. Etant donnés C = 90° *c* = 45°.30′ *a* = 25°.3′.3″.266
trouver *b* B A

log. cos. 45°.30′ 9.8456618
log. rayon 10.
complément log. cos. *a* 0.0429044

log. cos. *b* 9.8885662 *b* = 39°.18′.50″

log. tang. 25°.3′.3″,266 } 19.6696792
+log. rayon }
log. tang. 45°.30′ 10.0075803

log. cos. B 9.6620089
9.6620923 donne 62°.39′.30″

$\frac{660}{407}$ = 1″

B = 62°.39′.31″

log. sin. *a* } 19.6267748
+log. rayon }
sin. 45°.30′ 9.8532421

log. sin. A 9.7735327 A = 36°.25′.0″

16. Etant donnés C = 90° a = 25°.3'.3".266 A = 36°.25'
trouver b c et B

log. tang. a + log. rayon } 19.6696792
long. tang. A 9.8678873

log. sin. b 9.8017919 b = 39°.18'.49".366

log. sin. a + log. rayon } 19.6267748
log. sin. A 9.7735327

log. sin. c 9.8532421 c = 45°.30'

log. sin. b + log. rayon } 19.8017919
log. sin. c 9.8532421

log. sin. B 9.9485498
9.9485407 répond à 62°.39'.20"

$\frac{910}{109}$ = . . . 8".3

62°.39'.28" = B

17. Etant donnés C = 90° B = 62°.39'.28".383 a = 25°.3'.3".266
trouver l'hypothénuse c, le côté b et l'angle A

log. tang. a + log. rayon	19.6696792	log. cos. a	9.9570956	log. sin. a	9.6267748
log. cos. B	9.6620989	log. sin. B	9.9485498	log. tang. B	10.2864509
log. tang. c	10.0075803	log. cos. A	9.9056454	log. tang. b	10.9132257
c = 45°.30'		A = 36°.25'		b = 39°.18'.49".366	

18. Etant donnés C = 90°, l'hypothénuse c = 45°.30'
l'angle A = 36°.25'; trouver a b B

log. sin. 45°.30' 9.8532421
log. sin. 36°.25' 9.7735327

log. sin. a 9.6267748
9.6267601 donne 25°.3'

$\frac{1470}{450}$ = 3".266

a = 25°.3'.3".266

log. tang. 45°.30' 10.0075803
log. cos. 36°.25' 9.9056454

log. tang. b 9.9132257
9.9131855 39°.18'.40"

$\frac{4020}{429}$ = 9".366

b = 39°.18'.49".366

$$\left.\begin{array}{l}\text{log. tang. } b\\ +\text{log. rayon}\end{array}\right\} = 19.9132257$$
$$\text{log. sin. } a = 9.6267748$$

log. tang. B 10.2864509
10.2864076 donne 62°.39'.20"

$\frac{4330}{516} =$ 8".383

B = 62°.39'.28".383

19. Etant donnés C = 90° B = 62°.39'.28".383 A = 36°.25
trouver c b a ou les trois côtés

$$\left.\begin{array}{l}\text{log. cos. B}\\ +\text{log. rayon}\end{array}\right\} 19.6620989$$
log. sin. A 9.7735327

log cos. b 9.8885662 b = 39°.18'.49".366

$$\left.\begin{array}{l}\text{log. cos. A}\\ +\text{log. rayon}\end{array}\right\} 19.9056454$$
log. sin. B 9.9185498

log. cos. a 9.9570956 a = 25°. 3'. 3".266

$$\left.\begin{array}{l}\text{log. cot. B}\\ +\text{log. rayon}\end{array}\right\} 19.7135491$$
log. cot. A 9.8678873

log. cos. c 9.8456618 c = 45°.30'

Les petites différences qu'on a pu remarquer tiennent à l'incertitude des derniers chiffres des logarithmes.

Triangles sphériques obliquangles.

20. Etant donnés les trois côtés a b c rangés suivant leur ordre de décroissance $a > b$ $b > c$
trouver les trois angles A B C

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c} = \cos. a \text{ coséc. } b \text{ coséc. } c - \cot. b \cot. c$$

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}; \quad \sin. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\sin. a} \qquad (\alpha')$$

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b}; \quad \sin. C = \frac{\sin. c \sin. A}{\sin. a} \qquad (\beta')$$

Faisant $\frac{a+b+c}{2} = m$, on aura pour calculer A par les logarithmes

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(m-c)\sin.(m-b)}{\sin.c\sin.b}} \qquad (\gamma')$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.m\sin.(m-a)}{\sin.b\sin.c}} \qquad (\delta')$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(m-c)\sin.(m-b)}{\sin.m\sin.(m-a)}} \qquad (\varepsilon')$$

Les formules γ' et δ' sont les plus usitées ; δ' donnerait cependant des résultats peu exacts si A était fort petit, mais elle serait préférable à γ' si A était fort obtus.

On calculera B et C après avoir obtenu A par α' et β'. On remarque que $\frac{1}{2}$A est nécessairement un angle aigu. Quant à B et C, si l'on ne prévoyait pas d'avance leur *espèce*, les signes que prendraient cos. B, cos. C suffiraient pour la déterminer, et décider si ces angles sont aigus ou obtus.

21. Etant donnés les trois angles A B C rangés suivant leur ordre de décroissance $A > B > C$
trouver les trois côtés a b c

$$\cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B\cos.C}{\sin.B\sin.C} = \cos.A\,\text{coséc}.B\,\text{coséc}.C + \cot.B\cot.C$$

$$\cos.b = \frac{\cos.B + \cos.A\cos.C}{\sin.A\sin.C} \qquad \sin.b = \frac{\sin.a\sin.B}{\sin.A}$$

$$\cos.c = \frac{\cos.C + \cos.A\cos.B}{\sin.A\sin.C} \qquad \sin.c = \frac{\sin.a\sin.C}{\sin.A}$$

Faisant $\frac{A+B+C}{2} = n$, on aura pour calculer a par les logarithmes

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos.n\cos.(n-A)}{\sin.B\sin.C}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.(n-B)\cos.(n-C)}{\sin.B\sin.C}}$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos.n\cos.(n-A)}{\cos.(n-C)\cos.(n-B)}}$$

On remarque que $-\cos.n$ est toujours une quantité positive à cause de $n = \frac{A+B+C}{2} > 90°$, de sorte que l'expression de sin. $\frac{1}{2}a$ n'est point *imaginaire*. $\frac{1}{2}a$ est d'ailleurs nécessairement aigu.

On calculera d'abord a, puis on passera au calcul de b et de c en observant que les signes de cos. b et cos. c suffiront pour déterminer l'espèce de b et de c si elle n'était pas connue d'avance.

22. Etant donnés deux côtés b c et l'angle A compris entre eux
trouver B C et a

$$\text{tang}.B = \frac{\sin.b\sin.A}{\sin.c\cos.b - \sin.b\cos.c\cos.A}$$

$$\text{tang. } C = \frac{\text{sin. } c \text{ sin. } A}{\text{sin. } b \text{ cos. } c - \text{sin. } c \text{ cos. } b \text{ cos. } A}$$

$$\text{cos. } a = \text{cos. } A \text{ sin. } b \text{ sin. } c + \text{cos. } b \text{ cos. } c \, ; \qquad \text{sin. } a = \frac{\text{sin. } b \text{ sin. } A}{\text{sin. } B}$$

Pour le calcul logarithmique, on remplacera les deux premières formules par les deux suivantes qui donneront à la fois B et C

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B + C) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} A \, \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b - c)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b + c)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B - C) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} A \, \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(b - c)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b + c)}$$

et si B est supposé plus grand que C, on a

$$B = \left(\frac{B + C}{2}\right) + \left(\frac{B - C}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{B + C}{2}\right) - \left(\frac{B - C}{2}\right)$$

On cherchera d'abord B et C, puis on passera au calcul de a à l'aide de la valeur de sin. a. Quant à son espèce, elle sera déterminée par le signe de cos. a si elle n'était pas connue d'avance.

Si a est fort petit, on le calculera avec plus d'exactitude en cherchant d'abord la tangente ou le sinus d'un arc auxiliaire x par

$$\text{tang. } x = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} A \sqrt{\text{sin. } b \text{ sin. } c}}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b - c)} \, ; \qquad \text{sin. } x = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2} A \sqrt{\text{sin. } b \text{ sin. } c}}{\text{sin. } \frac{1}{2}(b + c)}$$

et l'on aura

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} a = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(b - c) \text{ tang. } x}{\text{sin. } x} = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(b + c) \text{ sin. } x}{\text{tang. } x}$$

Si, au contraire, a est très-grand, on cherchera

$$\text{sin. } x = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} A \sqrt{\text{sin. } b \text{ sin. } c}}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b - c)} \, ; \qquad \text{tang. } x = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2} A \sqrt{\text{sin. } b \text{ sin. } c}}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b + c)}$$

et l'on aura

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} a = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b - c) \text{ sin. } x}{\text{tang. } x} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b + c) \text{ tang. } x}{\text{sin. } x}$$

23. Etant donnés deux angles B a C et le côté compris entre eux, trouver le troisième angle A et les deux autres côtés b et c

$$\text{cos. } A = \text{cos. } a \text{ sin. } B \text{ sin. } C - \text{cos. } B \text{ cos. } C$$

$$\text{tang. } b = \frac{\text{sin. } B \text{ sin. } A}{\text{sin. } C \text{ cos. } B + \text{cos. } a \text{ sin. } B \text{ cos. } C} \, ;$$

$$\text{tang. } c = \frac{\text{sin. } C \text{ sin. } a}{\text{sin. } B \text{ cos. } C + \text{cos. } a \text{ sin. } C \text{ cos. } B}$$

et pour le calcul logarithmique

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b + c) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} a \, \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(B - C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(B + C)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b-c)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

$$\sin.A=\frac{\sin.a\sin.B}{\sin.b}$$

L'*espèce* de l'angle A sera déterminée par le signe que prendrait cos. A dans la première formule si elle n'était connue d'avance.

24. Etant donnés deux côtés	a	c	l'angle	C	opposé à ce dernier
trouver	A	b		B	

Pour le second angle opposé A, on a

$$\sin.A=\frac{\sin.a\sin.C}{\sin.c}$$

A n'admettra qu'une valeur si

$C = 90°$

$C < 90°$ $a < 90°$ et $c > a$

$C < 90°$ $a > 90°$ $c > 180° - a$

$C > 90°$ $a < 90°$ $c < 180° - a$

$C > 90°$ $a > 90°$ $c < a$

Exemple : Le triangle n'admettrait qu'une forme si l'on avait $a = 120°$ $c = 100°$ $C = 108°$ et dans ce cas, A est de même espèce que a.

A admettra deux valeurs si

$C < 90°$ $a < 90°$ $c < a$

$C < 90°$ $a > 90°$ $c < 180° - a$

$C > 90°$ $a < 90°$ $c > 180° - a$

$C > 90°$ $a > 90°$ $c > a$

$C <$ ou $> 90°$ et $a = 90°$

Exemple : Le triangle aurait deux formes si l'on avait $a = 69°$ $c = 45°$ $C = 50°$

Dans ce cas, on introduirait tour à tour les deux valeurs de A dans les formules ci-dessous, ce qui donnerait deux valeurs pour b et deux pour B.

Quant à b et B on a

$$\text{tang.}\,b=\frac{\text{tang.}\,a\cos.C\pm\sqrt{(\text{tang.}^2c-\text{séc.}^2c\sin.^2a\sin.^2C)}}{1\mp\text{tang.}\,a\cos.C\sqrt{(\text{tang.}^2c-\text{séc.}^2c\sin.^2a\sin.^2C)}}$$

$$\text{tang.}B=\frac{\text{tang.}\,a\cos.C\pm\sqrt{(\text{tang.}^2c-\text{séc.}^2c\sin.^2a\sin.^2C)}}{\sin.a\sin.C\mp\text{séc.}\,a\cot.C\sqrt{(\text{tang.}^2c-\text{séc.}^2c\sin.^2a\sin.^2C)}}$$

et pour le calcul logarithmique

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}b=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a+c)\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(A-C)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}B=\cot.\tfrac{1}{2}(A+C)\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a-c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)}$$

25. Etant donnés les angles	C	A	et le côté	a	opposé à ce dernier,
trouver	c	b		B	

on cherchera d'abord

$$\sin.c=\frac{\sin.a\sin.C}{\sin.A}$$

et il y aura un ou deux triangles correspondants à sin. c suivant que les conditions suivantes auront lieu.

c admettra une seule valeur si

$a = 90°$

$a > 90°$ $C > 90°$ $A > C$

$a > 90°$ $C > 90°$ $A < 180° - C$

$a < 90°$ $C > 90°$ $A > 180° - C$

$a < 90°$ $C < 90°$ $A > C$

Exemple : Le triangle n'aurait qu'une forme si l'on avait $a = 90°$ $C = 67°$ $A = 79°$ Dans ce cas, c est de même espèce que C. Dans cet exemple, il était aigu. Il n'y aurait encore qu'une forme si l'on avait $a = 75°$, $C = 108°$, $A = 79°$, mais c serait obtus.

c admettra deux valeurs si

$a > 90°$ $C > 90°$ $A > C$

$a > 90°$ $C < 90°$ $A > 180° - C$

$a < 90°$ $C > 90°$ $A < 180° - C$

$a < 90°$ $C < 90°$ $A < C$

$a <$ ou $> 90°$ $C = 90°$

Exemple : Si l'on avait $a = 75°$ $C = 107°$ $A = 69°$ le triangle aurait deux formes, et c deux valeurs qu'on introduirait tour à tour dans celles de tang. $\frac{1}{2}b$ et tang. $\frac{1}{2}$B pour avoir ces quatre dernières.

Pour b et B, on a

$$\text{tang. } b = \frac{\text{tang. } c \pm \text{séc. } a \text{ séc. A } \sqrt{(\sin.^2 A - \sin.^2 a \sin.^2 C)}}{-\text{tang.} a \sin.C \pm \text{séc.C séc.A coséc.} a \sqrt{(\sin.^2 A - \sin.^2 a \sin.^2 C)}}$$

$$\text{tang.B} = \frac{\cos.\ a \cos.\ A \pm \cot.\ C \sqrt{(\sin.^2 A - \sin.^2 a \sin.^2 C)}}{-\cos.\ A \cot.\ C \pm \cos.\ a \sqrt{(\sin.^2 A - \sin.^2 a \sin.^2 C)}}$$

et pour le calcul par logarithmes :

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} b = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+c) \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A+C)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} B = \cot.\ \tfrac{1}{2}(A+C) \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a-c)}{\cos.\ \frac{1}{2}(a+c)}$$

26. Etant donnés $a = 120°$ $c = 100°$ $C = 108°$, on demande A B et b

On voit d'abord qu'il n'y a qu'une seule solution.

$$\sin.\ A = \frac{\sin.\ 120° \times \sin.\ 108}{\sin.\ 100°} = \frac{\sin.\ 60° \times \sin.\ 72°}{\sin.\ 80°}$$

Cherchons A. Cet angle est obtus, puisque a est $> 90°$

log. sin. 60°	9.9375306
log. sin. 72°	9.9782063
	19.9157369
log. sin. 80°	9.9933515
log. sin. A	9.9223854 d'où A = 123°.14'.37''.54'''

Passons à b, on a $\text{tang.} \frac{1}{2} b = \frac{\cos.\ (115°,37',18'',57''')}{\cos.\ (7°,37',18'',57''')} \text{ tang. } 110 =$

$$\frac{-\cos.\ (64°,22',4'',3''')}{+\cos.(7°,37',18'',57''')} \times (-\text{tang.}70°) = \frac{\cos.\ (64°,22',4'',3''')\ \text{tang. } 70°}{\cos.\ (7°,37',18'',57''')}$$

log. cos. (64°,22',4'',3''')	9.6360791	$\frac{1}{2} b = 50°,10',16'',37'''$
log. tang. 70°	10.4389341	
	20.0750132	$b = 100°,20',33'',14'''$
log. cos. (7°,37',18'',57''')	9.9961459	
	10.0788673	

Quant à B; $\tang. \frac{1}{2} B = \frac{\cos. 10^\circ \times \cot. (115^\circ,37',18'',57''')}{\cos. 110^\circ} =$

$$\frac{\cos. 10^\circ \times (-\tang. 25^\circ,37',18'',57)}{(-\cos. 70^\circ)} = \frac{\cos. 10^\circ \tang. (25^\circ,37',18'',57''')}{\cos. 70^\circ}$$

d'où $\log. \tang. \frac{1}{2} B = 10.1401705$

$\frac{1}{2} B = 54^\circ,5',23'',6'''$

$B = 108^\circ,10',46'',12'''$

On peut à l'aide de ces données s'exercer sur les autres cas.

27. Etant donnés $a = 75^\circ$ $C = 107^\circ$ $A = 69^\circ$
trouver c b et B

On voit d'abord que le triangle a deux formes possibles, c'est-à-dire qu'il faut admettre pour c les deux angles qui ont pour sinus sin. c; or, on a

$$\sin. c = \frac{\sin. 75^\circ \sin. 107^\circ}{\sin. 69^\circ} = \frac{\sin. 75^\circ \sin. 73^\circ}{\sin. 69^\circ}$$

log. sin. 75°	9.9849138	$c = 81^\circ,39',52'',18'''$
log. sin. 73°	9.9805963	
	19.9655401	et $c = 98^\circ,20',7'',42'''$
log. sin. 69°	9.9701517	$180^\circ,0',0'',0'''$
log. sin. c	9.9953884	

Suivons la première valeur de $c = 81^\circ,39',52'',18'''$

$$\tang. \frac{1}{2} b = \frac{\tang. (78^\circ,19',56'',9''') \cos. 88^\circ}{\cos. (-19^\circ)} = \frac{\cos. 88^\circ \tang. (78^\circ,19',56'',9''')}{\cos. 19^\circ}$$

log. cos. 88°	8.5428192	$\frac{1}{2} b = 10^\circ,8',2'',37'''$
log. tang. (78°,19′,56″,9‴)	10.6850740	
	19.2278932	$b = 20^\circ,16',5'',14'''$
log. cos. 19°	9.9756701	
log. tang. ½ b	9.2522231	

$$\tang. \frac{1}{2} B = \cot. 88^\circ \frac{\cos. (-3^\circ,19',56'',9''')}{\cos. (78^\circ,19',56'',9''')} = \frac{\cot. 88^\circ \cos. (3^\circ,19',56'',9''')}{\cos. (78^\circ,19',56'',9''')}$$

log. cot. 88°	8.5430838	$\frac{1}{2} B = 9^\circ,46',50'',4'''$
log. cos. (3°,19′,56″,9‴)	9.9992713	
	18.5423551	$B = 19^\circ,33',40'',8'''$
log. cos. (78°,19′,56″,9‴)	9.3058582	
log. tang. ½ B	9.2364969	

On a donc pour l'un des triangles possibles

$a = 75^\circ$ $b = 20^\circ,16',5'',14'''$ $c = 81^\circ,39',52'',18'''$
$A = 69^\circ$ $B = 19^\circ,33'',40'',8'''$ $C = 107^\circ$

Reprenant la seconde valeur de $c = 98^\circ.20'.7''.42'''$ pour l'introduire dans les valeurs générales de tang. $\frac{1}{2} b$ et tang. $\frac{1}{2}$ B, on trouve

$$\tang. \frac{1}{2} b = \frac{\cos. 88^\circ}{\cos. 19^\circ} \tang. (86^\circ,40',3'',51''')$$

log. cos.	88°	8.5428192	$\frac{1}{2}b = 32°,22',18'',49'''$
log. tang.	(86°,40',3'',51''')	11.2348932	
		19.7777124	$b = 64°,44',37'',38'''$
log. cos.	19°	9.9756701	
log. tang.	$\frac{1}{2}b$	9.8020423	

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B = \frac{\cos.(6°,40',3'',51''')\ \cot.\ 88°}{\cos.(86°,40',3'',51''')}$$

log. cos.	6°,40',3'',51'''	9.9970525	$\frac{1}{2}B = 30°,49',0'',58'''$
log. cot.	88°	8.5430838	
		18.5401363	$B = 61°,38',1'',56'''$
log. cos.	(86°,40',3'',51''')	8.7645111	
log. tang.	$\frac{1}{2}$ B	9.7756252	

de sorte que l'autre forme qui satisfait à la question est

$a = 75°$ $\quad b = 64°,44',37'',38'''$ $\quad c = 98°,20',7'',42'''$
$A = 69°$ $\quad B = 61°,38',1'',56'''$ $\quad C = 107°$

28. *Cas impossible.* Etant donnés $a = 60°$ $A = 80°$ $c = 67°$
trouver b B C

on a $\sin.C = \frac{\sin.c\ \sin.A}{\sin.a}$; $\quad \sin.C = \frac{\sin.67°\ \sin.80°}{\sin.60°}$

log. sin.	67°	9.9640261
log. sin.	80°	9.9933515
		19.9573776
log. sin.	60°	9.9375306
log. sin.	C	10.0198470

valeur qui montre que la question est absurde; car le plus grand de tous les sinus a pour logarithme 10.000000, et un logarithme de sinus = 10.0198 ne peut appartenir qu'à un arc imaginaire.

29. On a supposé dans toutes les formules précédentes le rayon de la sphère égal à l'unité.

Si ce rayon était quelconque, et $= r$ par exemple, et qu'on voulût la longueur absolue d'un côté, on convertirait ce côté en secondes ( ), et s étant le nombre de secondes qui y est contenu, on aurait pour sa longueur absolue l

$$l = \frac{6.2831852}{1296000} \times Sr$$

ou $\log.l = \log.r + \log.s - 5.3144251$

30. Réciproquement, la longueur absolue l du côté d'un triangle sphérique étant donnée, ainsi que le rayon r de la sphère sur lequel il est tracé, on aura sa graduation s en secondes au moyen de

$$s = \frac{1296000}{2\pi} \times \frac{l}{r}$$

ou $\log.s = 5.3144251 + \log.l - \log.r$

Ainsi, sur une sphère de 100^m de rayon,

l'arc $= 79^m.4125$ aurait pour graduation $45°.30'$

l'arc de $25°.3'.3''.266$ aurait pour longueur $43^m.7221$

31. La surface T d'un triangle sphérique est à la surface S de la sphère sur laquelle il est décrit comme l'excès de ces trois angles $A + B + C$ sur deux angles droits est à 8 angles droits.

$T : S :: (A + B + C - 180)° : 720°$

R étant le rayon de la sphère en mètres, on a en mètres carrés

$$T' = \tfrac{1}{2} \pi R^2 \left\{ \frac{A + B + C - 180°}{90°} \right\}$$

Pour $R = 100^m$ $A = 90°$ $B = 36°.25$ $C = 62°.39'.28''.383$

le second facteur deviendrait $\dfrac{32668.''383}{324000}$ et l'on aurait

$T = 1583^m.99$

(P). *Tracés et problèmes usuels dont la solution n'exige que l'emploi de la règle et du compas.*

1. *Diviser une droite donnée* AB *en deux parties égales* (figure 1, planche LXXVII). Des extrémités de la droite donnée AB, et d'un rayon plus grand que la moitié de cette droite, décrivez deux arcs qui se coupent en C et en D; la droite CD sera perpendiculaire à AB, et les droites CD AB se couperont réciproquement en deux parties égales.

2. *Diviser une ligne donnée en tant de parties égales qu'on voudra* (fig. 2, pl. LXXVII). Soit proposé de diviser la ligne AB en cinq parties égales. Par l'extrémité A, menez la droite indéfinie AC, et portez sur cette droite cinq fois la longueur quelconque A1; joignez le dernier point de division C et l'extrémité B de la droite AB; menez D1 parallèle à BC, AD sera la cinquième partie de AB.

Ce procédé peut se varier de différentes manières: en voici un autre (fig. 3) qui est fort exact dans la pratique.

Soit toujours AB la ligne à diviser. Menez à volonté la droite indéfinie BD, et par le point A, la droite AE, parallèle à BD. Portez sur chacune de ces parallèles cinq parties égales, et joignez tous les points de division correspondants par les droites AD, (1, 4), (2, 3)....., lesquelles, étant parallèles et équidistantes, diviseront AB en cinq parties égales.

3. *Diviser une droite* AB *dans le même rapport qu'une autre droite* AC. Le procédé est tout à fait analogue. Soit par exemple 2, 3, C, les points de division (fig. 2) de la droite AC. On dirigera AC à partir de A sous une inclinaison quelconque. On joindra CB, et l'on conduira parallèlement à CB les droites 33', 22' qui couperont AB en parties A 2', 2' 3', 3' B proportionnelles à A 2, 2 3 et 3 C.

4. *Diviser une ligne* AB *en moyenne et extrême raison* (fig. 4). Menez CA perpendiculaire à AB, et faites $CA = \frac{AB}{2}$; du point C comme centre, et du rayon CA décrivez une circonférence; joignez CB; prenez $BE = DB$, et le point E divisera AB, comme l'exige l'énoncé de la question, c'est-à-dire que l'on aura

$$AE : BE :: BE : AB \text{ ou } AE \times AB = \overline{BE}^2$$

On remarquera que, par cette construction, la sécante BH est divisée elle-même en moyenne et extrême raison au point D, c'est-à-dire que sa plus grande partie HD est moyenne proportionnelle entre la ligne entière HB, et l'autre partie DB. $\overline{HD}^2 = HB \times BD$

5. *Construire une échelle de parties égales* (fig. 5, pl. LXXVII). On entend par *échelle* une droite qui sert à mesurer toutes les lignes d'un plan ou d'une carte. Lorsque l'on a des détails minutieux à représenter, on emploie le plus souvent des échelles de *dixmes*. Voici comment on les construit :

Supposons que l'on veuille le dixième du petit intervalle *am*, qui peut représenter un mètre, par exemple. On élèvera, à la droite *ab*, la perpendiculaire *ac*, sur laquelle on portera dix intervalles égaux ; puis, par tous les points de division, l'on mènera des parallèles à la ligne *ab* ; ensuite, on tirera les transversales *cm*, *xn*, *yp*....., qui seront équidistantes, puisque les espaces *am*, *mn*.... *cx*, *xy*...., sont égaux par construction. De cette manière, la partie de la première parallèle (1) (1′), interceptée dans le triangle *t'bd*, sera le dixième de *am*, ou d'un mètre. La partie de la seconde parallèle, interceptée de même, en sera les $\frac{2}{10}$, et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on veut une longueur de 16 mètres $\frac{4}{10}$, par exemple, on prendra avec le compas la partie de la parallèle (4) (4′), comprise entre *ef* et la transversale *qz*. De même, pour avoir la longueur de 18^m,55, on prendra la partie de la parallèle qui est comprise entre *ef* et *xn*, et qui tient le milieu entre les deux autres (5) (5′) et (6) (6′).

6. *Faire un angle égal à un anlge donné* BAC (fig. 6, pl. LXXVII). Tirez une droite indéfinie DF ; du point D, avec une ouverture de compas assez grande, décrivez l'arc indéfini FE, avec la même ouverture de compas, et du point A comme centre, décrivez l'arc BC, portez BC de F en E, tirez DE.

7. *Par un point* C *donné hors d'une droite* AB, *mener une ligne qui fasse avec la première un angle donné* M (fig. 7). Par un point D pris à volonté sur AB, on tirera une droite DE, de telle sorte que l'angle EDB = M ; ensuite on mènera par le point C une droite CH parallèle à DE.

8. *Mesurer un angle avec le rapporteur.* Le *rapporteur* est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180 degrés, et quelquefois en demi-degrés s'il est d'un grand diamètre. On en fait un fréquent usage pour rapporter sur le papier les angles mesurés sur le terrain ; on s'en sert aussi pour mesurer un angle sur le papier, et voici comment on procède. On place le centre de l'instrument au sommet de l'angle à mesurer, et l'on fait coïncider son diamètre avec un des côtés de cet angle ; le nombre de degrés contenus dans l'arc compris entre les deux côtés est la graduation de ce même angle.

9. *Construire sur le papier un angle d'une graduation donnée* (fig. 8). Lorsqu'on visera à quelque exactitude, on devra rejeter absolument l'usage du rapporteur, et employer la table des *sinus* en se rappelant que sin. A = $\frac{1}{2}$ corde 2 A ou que *le sinus d'un angle est moitié de la corde de l'angle double.*

Ainsi, pour tracer une ligne BC, qui fasse par exemple en B un angle de 31°.26′ avec AB, on prendra sur BA 1.00, 1.000 ou 1.0000 parties quelconques qu'on portera de B en *a* ; on décrira avec le rayon B*a* l'arc indéfini *ac* ; on cherchera dans la table le sinus de 15°.43′, moitié de 31°.26′ ; on doublera ce sinus, ce sera la corde de l'arc de 31°.26′ dans le cercle dont le rayon est 1. Reculant la virgule pour multiplier cette valeur par 1.00, 1.000 ou 1.0000 suivant le rayon qu'on a choisi, on aura *ac* qu'on portera de *a* en *c* sur l'arc, il ne restera plus qu'à tirer B*c*.

Pour un angle de 25°.30′ par exemple, on trouverait

sinus de	12°.45′	0.22069
corde	25°.30′	0.44138

Quand l'angle est obtus, on l'obtient plus exactement en construisant son supplément, c'est-à-dire l'angle formé sur le prolongement du côté donné.

10. *Par un point* E *donné sur une ligne* AB (fig. 1, pl. LXXVII), *élever une perpendiculaire à cette ligne.* Portez à droite et à gauche du point E sur la droite donnée les distances égales $EB = EA$; des points B, A comme centres et avec un rayon plus grand que EB, décrivez des arcs de cercle : ils se couperont en C et D. La perpendiculaire en E passe donc par les points C, E, D.

11. *Mener une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* BA *sans la prolonger* (fig. 9). Prenez, à volonté, un point C dans l'intérieur de l'angle droit EAB. De ce point comme centre, et d'un rayon $= AC$, décrivez une circonférence ADHE. Par le point D, où cette circonférence coupe la droite AB, menez le diamètre DE, et joignez les points A, E ; la droite AE sera perpendiculaire à AB.

S'il s'agissait de résoudre le même problème sur le terrain, on s'y prendrait de la manière suivante.

Placez-vous quelque part en C; puis tendez un cordeau d'une longueur AC, de C en D, de telle sorte que l'extrémité D soit dans la direction AB. Tendez ensuite le même cordeau de C en E, dans la direction CD, marquée par des piquets; la droite AE sera la perpendiculaire demandée. Cette construction revient à la précédente.

12. *Par un point* A *d'une droite* XY *donnée sur le terrain, élever une perpendiculaire à cette droite* (fig. 10, pl. LXXVII). Faites en A un angle obtus quelconque YAB; prenez $AB = AY$, joignez B et Y. Portez de Y vers Q une distance $YO = \frac{2.\overline{AY}^2}{BY}$. Menez AO qui sera perpendiculaire à XY en A.

13. *D'un point* C *donné hors d'une droite* AB, *mener une perpendiculaire à cette droite* (fig. 11, pl. LXXVII). Du point C comme centre, donné hors de la droite AB, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez un arc qui coupe AB en deux points E, F; de ces points comme centres, et du même rayon, ou de tout autre, décrivez deux arcs qui se coupent en D: la droite CD sera perpendiculaire sur le milieu de EF, et par conséquent sur la droite AB. Les points C, D sont chacun également distants de E et de F.

14. *D'un point* B *hors d'une droite accessible* XY *et sur le terrain, abaisser une perpendiculaire sur cette droite* (fig. 10, pl. LXXVII). Prenez sur XY un point A tel que l'angle YAB soit obtus, et faites $AY = AB$. Mesurez BY; portez de Y en Q une distance $YQ = \frac{\overline{BY}^2}{2.AY}$, le point Q sera le pied de la perpendiculaire cherchée.

15. *Diviser un angle* CAB *ou un arc* mn *en deux parties égales* (fig. 12, pl. LXXVII). Du sommet A de l'angle comme centre et d'un rayon pris à volonté, décrivez l'arc *mn*. Des points *m*, *n* comme centres, et d'un rayon plus grand que $\frac{1}{2}mn$, décrivez deux arcs qui se coupent en D, la droite AD divisera l'angle BAC en deux parties égales, ainsi que l'arc *mn*.

On peut, par la même construction, diviser un arc en 4, 8, 16...2^n, parties égales.

16. *Diviser en deux parties égales un angle* (fig. 12, pl. LXXVII) *dont on n'a pas le sommet, et qui n'est donné que par la direction de ses côtés* FH, GK. Par des points quelconques O, I pris sur chacun des côtés, élevez à ces côtés les perpendiculaires égales O*o*, I*i*.

Par *o* et *i*, menez les droites, CA, BA respectivement parallèles à FH,

GK. Ces droites se rencontreront en A, et il restera, comme dans le numéro précédent, à diviser CAB en deux parties égales.

17. *Sur le terrain, diviser un angle* A *en deux parties égales* (fig. 13, pl. LXXVII). Prenez sur chaque côté de l'angle les distances quelconques respectivement égales $AM = AL$ et $AM' = AL'$. Placez des jalons en L et L'. Deux observateurs placés en M et M', et visant l'un de M' vers L, l'autre de M vers L', feront placer un jalon en un point I tel que ce jalon I leur cache respectivement les jalons L et L'. L'alignement AI coupe l'angle en deux parties égales.

18. *Sur le terrain et par un point donné* O *dans un angle* A *ou au-dehors, mener une droite dont le prolongement passe par le point* A *supposé inaccessible* (fig. 14, pl. LXXVII). Par le point O tirez une droite quelconque BC qui coupe les deux côtés de l'angle, puis une parallèle à cette droite qui coupe aussi en D et E les deux côtés de l'angle.

Prenez sur cette seconde droite, soit $DI = BO \times \frac{DE}{BC}$, soit $EI = OC \times \frac{DE}{BC}$. Par le point I ainsi déterminé et par le point O, menez la droite indéfinie OIA.

19. *Par un point* D *pris dans l'intérieur d'un angle donné, mener une droite de manière que les parties comprises entre ce point et les deux côtés de l'angle soient égales* (fig. 15, pl. LXXVII). Par le point D, menez DE parallèle à AB; prenez $EF = AE$, et menez la droite FDG, qui sera nécessairement divisée en deux parties égales au point D.

20. *Par un point* C *donné, mener une parallèle à une droite donnée* AB (fig. 1, pl. LXXVIII). Du point donné C pris pour centre, et d'un rayon CB aussi grand que possible, décrivez un arc indéfini BD. Du point B comme centre, et du même rayon, décrivez l'arc CA; prenez $BD = AC$, et tirez la droite CD qui sera la parallèle demandée.

Voici un autre moyen de résoudre ce problème, et qui est assez exact dans la pratique (fig. 1).

Du point C comme centre, on décrit l'arc xy tangent à AB, et d'un autre point F pris sur AB, on décrit du même rayon l'arc zt. Ensuite on dispose une règle dont le bord passe par le point C, et soit tangent à l'arc zt. La droite CD, déterminée de cette manière, est la parallèle demandée.

21. *Par un point* O *sur le terrain, mener une parallèle à la droite* XY, *qui n'est accessible qu'aux points* X *et* Y (fig. 2, pl. LXXVIII). Menez YO, puis, en partant de X, une droite quelconque qui coupe YO en un point quelconque I, prolongez XI d'une quantité $IN = \frac{XI \times IO}{YI}$, menez une droite par O et N.

22. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* (fig. 3, pl. LXXVIII).

1re *Solution.* Sur une droite indéfinie xy, portez à la suite l'une de l'autre les lignes A et B données. Sur la somme xy de ces deux lignes, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, et, par l'extrémité z du segment $xz = A$, élevez à xy la perpendiculaire zu, qui sera la moyenne proportionnelle cherchée $\overline{zu}^2 = A \times B$.

2e *Solution.* Sur la plus grande ligne B ou xy', décrivez une demi-circonférence; portez la ligne A sur la ligne B, c'est-à-dire faites $xz = A$, et, par l'extrémité z de la droite A, élevez zu' perpendiculaire à xy'; enfin, menez la corde xu', qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

23. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* (fig. 4,

pl. LXXVIII). Les trois lignes données sont *m*, *n*, *p*. Sur le côté AX d'un angle arbitraire A, portez, à partir du point A, et à la suite l'une de l'autre, les deux premières lignes *m* et *n*; sur l'autre côté AY, portez, à partir du même point A, la troisième ligne *p*; joignez par BC les extrémités de *m* et de p, et par l'extrémité de *n*, menez DE parallèlement à BC. La partie CE sera la quatrième proportionnelle cherchée $x = \frac{np}{m}$.

On trouve de la même manière une troisième proportionnelle à deux lignes données A, B : car elle est la même que la quatrième proportionnelle aux trois lignes A, B, B.

24. *Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire ce triangle* (fig. 5, pl. LXXVIII). Les trois lignes données sont *m*, *n*, *p*. Prenez AB = *m*; du point A, comme centre et d'un rayon égal à *n*, décrivez un arc *xy*; puis, du point B comme centre et d'un rayon égal *p*, décrivez un autre arc *zt*, qui coupe le premier en C; enfin, tirez les droites CA, CB, et le triangle ABC sera celui qu'il fallait décrire.

La construction seule fait voir que les arcs *xy*, *zt*, ne peuvent se couper, et par conséquent que le triangle ne peut avoir lieu qu'autant que la plus grande ligne donnée est plus petite que la somme des deux autres.

25. *Etant donnés le périmètre* p = c + a + b *d'un triangle et les trois angles* A, B, C, *construire le triangle* (fig. 6, pl. LXXVIII). Sur une droite indéfinie, portez les distances $\beta\gamma = p$. Faites en β un angle $= \frac{1}{2}$B et en γ un angle $= \frac{1}{2}$C; l'intersection des côtés βA, γA déterminera le point A. En ce point A faites sur βA un angle βAB $= \frac{1}{2}$B et sur γA un angle γAC $= \frac{1}{2}$C; les côtés AB, AC de ces angles respectifs détermineront par leurs intersections B, C avec $\beta\gamma$ les deux autres sommets du triangle cherché ABC.

26. *Etant donnés dans un triangle rectangle un côté* AB = c *de l'angle droit et la somme* (AC + CB) *des deux autres côtés, construire le triangle* (fig. 7, pl. LXXVIII). Menez une droite AB' = (AC + CB) perpendiculaire à AB = *c*; joignez B et B'; par le milieu *m* de BB', menez à cette ligne une perpendiculaire qui déterminera par son intersection avec AB' le troisième sommet C du triangle; tirez CB.

27. *Étant donnés dans un triangle rectangle l'hypoténuse* BC = h *et la différence* d *des deux côtés de l'angle droit, construire ce triangle* (fig. 8, pl. LXXVIII). Tirez une droite indéfinie XY; par un point *p* quelconque de cette droite, menez-lui une perpendiculaire *pz*; coupez l'angle X*pz* en deux parties égales par *py*. Portez sur XY et de *p* en C la différence connue *d*; du point C comme centre avec l'hypoténuse connue *h* pour rayon, recoupez *py* en B. Par le point B, menez BA parallèle à *pz*, et BAC rectangle en A sera le triangle demandé.

28. *Etant données les longueurs* a *et* b *de deux côtés adjacents d'un triangle, et celle* d *de la droite qui partage en deux parties égales l'angle compris entre* a *et* b, *construire le triangle* (fig. 9, pl. LXXVIII). Cherchez une quatrième proportionnelle AO à *a*, *a* + *b* et *d*; $AO = \frac{(a+b)\,d}{a}$. Sur AO comme base, formez un triangle isoscèle ACO à l'aide des côtés AC = CO = *b*; prolongez le côté OC de CB = *a*. Tirez BA et CA, ABC est le triangle cherché. *d* est parallèle à OA.

29. *Sur une droite donnée* ab (fig. 10), *construire un triangle semblable à un triangle donné* ABC (fig. 9, pl. LXXVIII). Au point *a*, faites l'angle *a* = A, et au point *b* l'angle *b* = B. Les droites *ac*, *bc* se rencontreront en un point *c*, qui sera l'homologue de C, et le problème sera résolu.

30. *Etant données les trois hauteurs* H, H′, H″ *d'un triangle, construire ce triangle.* On cherchera une quatrième proportionnelle x

$$H'' : H' :: H : x = \frac{H \times H'}{H''}$$

puis avec les côtés x, H et H′, on construira un triangle qui sera équiangle, et par conséquent semblable au triangle cherché, d'où... etc.

31. *Mener dans le plan d'un triangle* ABC *une droite telle que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit constante* (fig. 11, pl. LXXVIII). Portez AB de A en D, puis de B en E, tirez l'indéfini DE, c'est la droite cherchée.

32. *Construire un carré sur la ligne donnée* AB (fig. 12, pl. LXXVIII). De chacune des extrémités A, B de AB, et avec des rayons = AB, décrivez deux arcs indéfinis qui se couperont en O. Du point O comme centre avec OB pour rayon, recoupez l'arc BI en I, tirez IB. Du point O comme centre avec OK pour rayon, recoupez les premiers arcs en C et D. Les points A, B, C, D sont les sommets du carré.

33. *Etant donnés les deux côtés adjacents* a, b *d'un parallélogramme et l'angle* M *qu'ils comprennent, construire le parallélogramme* (fig. 13, pl. LXXVIII). Sur une droite indéfinie, portez AB = a; faites en A un angle égal à M (n° 6), portez AC = b sur l'autre côté de b de cet angle. Du point C avec le rayon a, tracez un petit arc que vous recouperez en D avec un arc décrit de B d'un rayon b.

34. *Trouver le côté d'un carré équivalent à un rectangle donné.* Soient b et h la base et la hauteur du rectangle donné, x le côté du carré cherché. Il est clair qu'en vertu de l'énoncé de la question, on doit avoir

$$b \times h = x^2, \text{ ou } b : x :: x : h,$$

c'est-à-dire que le côté du carré est moyen proportionnel entre la base et la hauteur du rectangle.

On pourra donc opérer comme ci-dessous (fig. 14, pl. LXXVIII). AB étant la base du rectangle donné, et AC sa hauteur, prolongez BA; du point A comme centre avec la hauteur pour rayon, décrivez l'arc qui recoupe le prolongement de BA en D. Sur BD comme diamètre, décrivez la demi-circonférence DFB, prolongez AC jusqu'à sa rencontre en F avec la circonférence. AF est le côté du carré cherché

$$\overline{AF}^2 = AC \times AB$$

35. *Transformer un polygone rectiligne quelconque en un autre polygone équivalent, et qui ait un côté de moins* (fig. 15, pl. LXXVIII). Supposons que le polygone proposé soit le quadrilatère ABCD, menez la diagonale AC, et par le point D la droite DE parallèle à cette diagonale et terminée au côté AB prolongé suffisamment; puis joignez les points E, C; le triangle BCE sera équivalent au quadrilatère ABCD.

On voit par là la possibilité de transformer un polygone quelconque en un triangle équivalent: car s'il s'agit, par exemple, d'opérer sur un pentagone, on le transformera, par la méthode précédente, en un quadrilatère équivalent, puis l'on trouvera un triangle équivalent à ce quadrilatère.

36. *Trouver un carré équivalent à un polygone donné.* Pour résoudre ce problème graphiquement, on transformera le polygone donné en un triangle équivalent; ensuite, on prendra, par le procédé du n° 22, une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur de ce triangle : cette moyenne proportionnelle sera le côté du carré cherché.

Il suit de là que toutes les figures rectilignes sont *carrables*.

Nota. Pour construire un carré équivalent à un cercle, il faudrait que le

côté de ce carré fût une moyenne proportionnelle entre la circonférence et la moitié du rayon du cercle donné ; mais le rapport numérique de ces deux lignes étant incommensurable, il s'en suit que la quadrature du cercle est impossible ; cependant l'aire du carré obtenu par cette méthode, différera d'autant moins de celle du cercle, que le rapport dont il s'agit sera plus approché (*Voyez* 14, pag. 849, et 60, pag. 889).

37. *Faire passer une circonférence par trois points donnés* A, B, C *non en ligne droite* (fig. 16, pl. LXXVIII). Joignez les points par les deux droites AB, BC, et sur le milieu de chacune, élevez les perpendiculaires *de*, *gf*. Le point O d'intersection de ces perpendiculaires sera alors également distant des trois points A, B, C, et sera par conséquent le centre du cercle cherché.

On ne peut faire passer qu'une seule circonférence par les trois points A, B, C, et l'on voit bien que si ces points étaient en ligne droite, le problème serait impossible.

Cette solution résout de même le problème où il s'agit de *faire passer une circonférence par les sommets des trois angles d'un triangle*, ou bien de *trouver le centre d'un cercle ou d'un arc.*

38. *Si les trois points* A, B, C *sont donnés sur le terrain*, et qu'il faille tracer une circonférence par ces trois points supposés très-éloignés les uns des autres, on mesurera avec un graphomètre l'angle ABC, et l'on choisira d'autres points, tels que B', d'où les objets A, C soient vus sous le même angle qu'en B, c'est-à-dire de manière qu'on ait ABC = AB'C. L'ensemble de tous ces points déterminera l'arc de cercle cherché que l'on tracera ensuite librement. Pour achever la circonférence, on choisira de même d'autres points *b*, *b'*...., en sorte que chacun des angles A*b*C, A*b'*C...., soit égal à l'excès des deux angles droits sur l'angle B'.

39. *Inscrire un cercle dans un triangle* (fig. 17, pl. LXXVIII). Divisez en deux parties égales deux des angles AB de ce triangle ; le point d'intersection O des deux lignes de division sera le centre du cercle cherché. Quant au rayon OK de ce cercle, il est égal à la perpendiculaire abaissée du centre O, sur un des côtés AC du triangle ABC.

40. *Etant donnés trois points* P, P', m (fig. 18, pl. LXXVIII) *d'un arc de cercle dont le centre est inaccessible*, *tracer cet arc.* Des points extrêmes P, P' comme centres et avec leur distance PP' pour rayon, décrivez les arcs indéfinis P*z*, P'*z'*.

Par les points P*m* et P'*m*, menez des droites qui rencontreront respectivement P*z* et P'*z'* en O et O'. Divisez les arcs PO, P'O' en un même nombre *n* de parties égales (ici $n = 4$), puis au-dessus de O et de O', portez $(n - 1)$ de ces divisions, tirez — 3 P' et + 3'P, qui donnera le point *a* de l'arc cherché ; les autres points *b c c'b'*.... seront donnés respectivement par les intersections de — 2 P' et + 2'P, de — 1 P' et + 1'P, de + 2 P et — 1'P, etc.

On eût opéré d'une manière analogue, si, au lieu de *m*, on eût donné tout autre point *c b* ou *a* ; alors prenant le milieu *m* de l'arc déterminé et abaissant de ce point une perpendiculaire sur la corde PP', on eût obtenu la *flèche my*.

41. *Sur une droite donnée* AB, *décrire un segment capable d'un angle donné* C (fig. 1, pl. LXXIX). Il s'agit de décrire sur AB un arc AKB, qui soit tel que tous les angles inscrits K, K'..., soient égaux à l'angle C.

Faites l'angle MAB = C. Elevez AO perpendiculaire à AM, ainsi que OD perpendiculaire sur le milieu de AB, et le point O, commun à ces deux perpendiculaires, sera le centre de l'arc AKB demandé.

42. *Par un point donné* A (fig. 2, pl. LXXIX), *mener une tangente à un cercle.* Si le point A est donné sur la circonférence, menez le rayon AC, et élevez sur ce rayon la perpendiculaire AB, qui sera tangente au point A.

Si le point A′ est donné hors de la circonférence, joignez ce point et le centre C du cercle donné, et sur la ligne A′C comme diamètre, décrivez la circonférence A′BCB′ : les droites A′B, A′B′, menées du point donné aux intersections des deux cercles, seront tangentes au premier cercle CB.

On voit aussi que, pour qu'un cercle C touche les côtés d'un angle A′, il faut que son centre soit sur la droite qui divise cet angle en deux parties égales.

43. *Inscrire un carré dans un cercle, et circonscrire un carré au cercle* (fig. 3, pl. LXXIX). Menez deux diamètres AC, BD perpendiculaires entre eux, et les quatre droites qui joindront leurs extrémités seront les côtés du carré inscrit ABCD.

On voit bien ce qu'il faudrait faire pour circonscrire un carré au même cercle, et il n'est pas difficile de prouver que le carré circonscrit est double du carré inscrit.

En divisant en deux parties égales chaque quart de circonférence, et joignant tous les points de division, on aurait l'octogone régulier inscrit ; de là, on pourrait passer à un autre polygone régulier d'un nombre de côtés double. Ainsi, tous les polygones réguliers inscriptibles ou circonscriptibles à l'aide du carré, sont ceux de

4, 8, 16, 32, etc., côtés.

44. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle.* Portez le rayon du cercle donné, six fois de suite sur la circonférence.

En joignant de deux en deux les six points de division, l'on aurait le triangle équilatéral inscrit. Il est remarquable que ce triangle est le quart du triangle équilatéral circonscrit.

Tous les polygones inscriptibles ou circonscriptibles au cercle, à l'aide de l'hexagone régulier, sont ceux de

3, 6, 12, 24, etc., côtés.

45. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle.* On divisera le rayon du cercle donné en moyenne et extrême raison, et la plus grande partie de ce rayon sera le côté du décagone régulier inscrit.

Si l'on joint de deux en deux les dix points de division, l'on obtiendra le pentagone régulier. Il suit de là que tous les polygones réguliers inscriptibles ou circonscriptibles au moyen du décagone, sont, sont ceux de

5, 10, 20, 40, etc., côtés.

46. *Inscrire un pentédécagone dans un cercle.* L'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone est égal à l'arc de l'hexagone, moins celui du décagone. En effet, l'arc de l'hexagone $= \frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un angle droit ; l'arc du décagone $= \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$; donc la différence de ces deux arcs $= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ d'un angle droit, et c'est précisément l'arc du pentédécagone. Au moyen de ce polygone, on pourra inscrire ou circonscrire tous ceux de

15, 30, 60, etc., côtés.

47. *Inscrire dans un cercle, avec le rapporteur, un polygone régulier d'un nombre de côtés donné.* La méthode graphique, qui s'applique indistinctement à tout polygone régulier, consiste à placer le centre d'un grand rapporteur au centre du cercle donné, et à prendre sur la circonférence de ce rapporteur, des arcs consécutifs dont la graduation soit la valeur de l'angle au centre du polygone à inscrire.

48. *Étant donné le côté a d'un polygone régulier, trouver le rayon* R *du cercle qui lui est circonscrit.*

La table suivante et la formule R = *a f* résolvent ce problème.

NOMBRE de CÔTÉS.	ARC dont le côté du polygone est la corde.	VALEURS de *f* CORRESPONDANTES.	VALEURS de *c* CORRESPONDANTES.
3	120°	0.5773503	1.732051
4	90	0.7071068	1.414214
5	72	0.8506508	1.175570
6	60	1.0000000	1.000000
7	51 $\frac{3}{7}$	1.1523824	0.867767
8	45	1.3065628	0.765367
9	40	1.4619022	0.684040
10	36	1.6180340	0.618034
11	32 $\frac{8}{11}$	1.7747321	0.563465
12	30	1.9318517	0.517638

Veut-on connaître, par exemple, le rayon du cercle circonscrit à l'octogone dont le côté est 12, on a

$$R = 12 \times 1.3065628 = 15.66.....$$

Cette table, et la formule *c* R = *a*, peuvent encore servir à résoudre le problème inverse.

49. *Etant donné le rayon* R *d'un cercle, trouver le côté a d'un polygone régulier* (de moins de 12 côtés) *qui lui est inscrit.*

Soit, par exemple, 5 le rayon d'un cercle, on aurait pour le côté du triangle équilatéral inscrit

$$5 \times 1.732051 = 8.66......$$

50. *Mener des tangentes à deux circonférences* C C' (fig. 4, pl. LXXIX). Tirez une droite indéfinie à travers les centres C, C'; menez dans chacun des cercles, et d'une manière quelconque, les rayons C R, C' R' parallèles entre eux et dirigés dans le même sens. Tirez la droite R, R' jusqu'à sa rencontre en A avec le prolongement de C, C'.

Du point A, menez des tangentes par le problème 42 à l'une des deux circonférences, elle seront en même temps tangentes à l'autre.

51. *Si la place manquait pour trouver le point de rencontre* A de C C' et de R R' (fig. 5), on porterait dans le plus grand cercle le rayon le plus petit R' C' de R en C'; on décrirait ensuite la circonférence C C', à laquelle on mènerait deux tangentes partant du centre C' du petit cercle. Menant ensuite les perpendiculaires T P, C' *p*, T' P', C' *p'* à l'origine C' et aux points de contact T, T' de ces tangentes, il ne restera plus qu'à joindre respectivement les points P *p* et P' *p'* par des droites qui seront les tangentes cherchées.

52. *Un point* C *est donné dans l'angle* A, *on demande de faire passer par ce point une circonférence qui soit tangente aux deux côtés de l'angle* (fig. 6, pl. LXXIX).

Coupez l'angle A en deux parties égales par la bisectrice A X; le centre du cercle est sur cette droite. Du point C abaissez une perpendiculaire indéfinie C *i* D E B sur la bisectrice. Portez C *i* de *i* en D. Prenez $BT = \sqrt{BC \times BD}$ par T ainsi déterminé, et menez T O perpendiculaire à A B. O est le centre du cercle et T O = O C son rayon.

53. ***Etant données deux droites* M N, P Q, *tracer entre elles des circonférences tangentes entre elles et à ces droites*** (fig. 7, pl. LXXIX).

Coupez en deux parties égales l'angle formé par les directions de ces droites; la bisectrice X Y contiendra les centres de toutes les circonférences cherchées.

D'un point C pris sur X y, menez c T perpendiculaire à l'une des droites M N, par exemple. Du rayon c T, décrivez la circonférence dont le rayon est c T $= c\ t$.

Par le point t menez t O perpendiculaire à la bisectrice. Du point O comme centre avec O t = O T pour rayon, décrivez la demi-circonférence T t T'; T' est le point de contact du second cercle avec M N; par T', élevez la perpendiculaire T' c'; c' est le centre du second cercle, et son rayon c' T' = $c\ t'$; par t' élevez la perpendiculaire t' O' à la bisectrice, avec O' t' = O' T' pour rayon..., et ainsi de suite.

54. On remarque que $d\ d'$... étant les distances c X, c'X... au sommet de l'angle 2α des droites; r, r'... les rayons c T, c' T' de deux cercles successifs, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{1 - \sin.\ \alpha}{1 + \sin.\ \alpha} = \text{tang.}^2 \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\right)$$

Les rayons de tous les cercles, et, par suite, leurs circonférences et leurs surfaces forment une progression par quotients.

55. ***Etant donné un point* T *sur la bisectrice de l'angle formé par les directions de deux droites, mener une circonférence qui soit à la fois tangente aux deux droites et qui passe par le point*** T (fig. 8, pl. LXXIX).

Par le point T menez A B perpendiculaire à la bisectrice. Divisez les angles B A N, A B Q, chacun en deux parties égales, par des droites dont l'intersection donnera le centre O du cercle cherché, dont le rayon est O T. Les perpendiculaires O t, O t' donnent les points de contact $t\ t'$ avec les droites.

56. ***Tracer un cercle tangent à la fois à une droite donnée de position* X Y *et à une circonférence* C T, *en un point déterminé* T *de cette circonférence*** (fig. 9, pl. LXXIX).

Menez le rayon C T, au point en question; puis, par ce point, une tangente T Y que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre Y avec la droite. Coupez en deux parties égales l'angle T Y X. La rencontre O de la bisectrice Y O et du rayon prolongé C T O donne le centre O du cercle cherché dont le rayon est O T = O t.

57. ***Tracer un cercle tangent à la fois à un autre cercle* O r *et à une droite* X y, *le point de contact* T *avec la droite étant fixé*** (fig. 10, pl. LXXIX).

Par le point T, menez une perpendiculaire indéfinie à la droite Xy, portez le rayon O r de T en n; joignez O n; sur le milieu m de O n, élevez la perpendiculaire mC; son intersection C avec n Z est le centre du cercle cherché. Joignez O C qui déterminera le point de contact r du cercle O r avec le cercle cherché, dont le rayon est C T = C r.

Si l'on porte O r de T en n' et qu'on opère d'une manière analogue, on trouve une autre circonférence M N de rayon C' r' = C' T qui satisfait à la question. Le rayon r' C' a son centre C' en dehors de la planche, dans les directions O r' et n Z.

58. ***Mener une circonférence qui soit à la fois tangente à une droite* K L, *à un cercle* D n, *et qui passe par un point donné*** A (fig. 11, pl. LXXIX). Par le centre du cercle donné, menez le diamètre D n perpendiculaire à K L, et prolongez ce diamètre jusqu'à la droite K L en C. Du point D, menez à travers

le point donné A une droite qui rencontre KL en K. Portez sur cette dernière, à partir de D, une longueur $DH = \frac{Dn \times DC}{DA}$, ce qui déterminera le point H; portez sur KL, à partir de K, une distance $KT = \sqrt{KA \times KH}$, ce qui déterminera le point T.

Il ne reste plus qu'à faire passer une circonférence par les points A, H et T.

59. *Conduire un arc tangent à la fois aux circonférences* C *et* C′, *le point de contact* T *sur cette dernière étant fixé* (fig. 12, pl. LXXIX). Par le point T donné sur la circonférence C′, tirez la droite indéfinie C′TO. De T vers C′, portez sur cette droite la longueur T′*a* = CA = rayon du cercle C. Joignez C et *a*. Sur le milieu M de cette droite, menez la perpendiculaire MO, qui déterminera le centre O de l'arc cherché par sa rencontre avec C′TO. Joignez CO qui donnera le point A. OT = OA sont deux rayons de l'arc dont le centre est O et les points de contact avec les deux cercles sont A et T.

60. *Développer en ligne droite la circonférence d'un cercle donné* (fig. 13, pl. LXXIX). Soit AB le diamètre du cercle. A chacune de ses extrémités A, B, élevez des perpendiculaires indéfinies, puis menez le rayon OM parallèle à ces tangentes. Du point M avec MO pour rayon, recoupez la circonférence en S, menez par O et S la droite indéfinie OS, qui déterminera le point T sur la tangente AT. Portez sur la tangente BX de B vers X trois rayons OM; Menez TX; TX = longueur approchée de la demi-circonférence. OM étant 1, on a, comme on sait

$\pi = 3.14159$; le calcul donne ici
$TX = 3.14153$

la différence. . . . . 0.00006 est inappréciable dans un tracé, si parfait qu'il puisse être.

61. *Raccorder un arc de cercle* AR (fig. 1, pl. LXXX) *et une droite* XY *par un autre arc de cercle* RT, *dont le rayon est donné* = OR. Au rayon CR de l'arc AR ajoutez le rayon OR et décrivez l'arc OZ dont le rayon est CRO. Par un point quelconque N de XY, élevez la perpendiculaire NP = OR = rayon de raccordement; par le point P, menez PO parallèle à XY jusqu'à sa rencontre O avec l'arc OZ. O est le centre de l'arc de raccordement. Tirez CO, abaissez de O la perpendiculaire OT à XY, les points R et T sont les points de raccordement. Avec OR = OT pour rayon, décrivez l'arc RT.

62. *Deux points* A, A′ *sont donnés de position sur deux parallèles* PA′ QA, *on demande de raccorder ces points par deux arcs de cercle tangents entre eux, ainsi qu'aux droites dans les points* A, A′ (fig. 2, pl. LXXX). Tirez AA′, conduisez par le milieu M de cette droite une perpendiculaire, par les milieux *m*, *m*′ de AM, MA′, élevez en sens inverses des perpendiculaires *m*O, *m*′O′, puis respectivement de A et A′ des perpendiculaires aux droites PA′, QA. Les points O, O′ déterminés par les intersections de *m*′O′ et A′O, *m*O et AO, sont les centres des arcs cherchés. La courbe AMA′ est la *cimaise*.

63. *Deux points* A, A′ *sont donnés de position sur deux parallèles, on demande de les raccorder par un* TALON, *c'est-à-dire par deux arcs tangents entre eux, mais non tangents aux droites* (fig. 3, pl. LXXX). Joignez AA′ que vous partagerez en deux parties égales au point M, puis divisez chaque moitié en deux parties égales aux points *mm*′ par des perpendiculaires qui couperont PA′, QA aux points O, O′. Ces points sont les centres des arcs que l'on décrira avec les rayons OA = OM, O′A′ = O′M.

64. *Etant données* (fig. 4, pl. LXXX) *deux circonférences dont le centre commun est* A, *insérer entre elles un arc de cercle qui, à sa rencontre avec chacune, fasse avec elle un angle donné.*

Soit $AB = R$ le rayon de la grande circonférence,

$AD = r$ celui de la plus petite,

$BC = \rho$ le rayon de l'arc qui satisfait au problème,

$ABH = B$ l'angle donné que l'arc cherché doit former avec la circonférence extérieure,

$EDF = D$ l'angle donné que l'arc cherché doit former avec la circonférence intérieure,

Soit enfin C le centre de l'arc de rayon ρ, les triangles ABC, ADC donnent

$$\overline{AC}^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos. B$$
$$= r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos. D$$

attendu que $ABC = 180° - D$, on en tire

$$R^2 - r^2 = 2\rho\,(R \cos. B + r \cos. D)$$

$$2\rho = \frac{R^2 - r^2}{R \cos. B + r \cos. D.\,\rho}$$

Pour construire cette expression, menez BG tangente au cercle r, vous aurez $\overline{BG}^2 = R^2 - r^2$; projetez le centre A en H sur la ligne donnée de position BH, vous aurez $BH = R \cos. B$. Par le point H, menez HI faisant avec BH l'angle $KHI = D$, prenez $HI = r$. Projetez I en K, vous aurez $HK = r \cos. D$, d'où $BK = R \cos. B + r \cos. D$.

Du point B comme centre et du rayon BK, décrivez l'arc KL. Par sa rencontre en L avec la circonférence intérieure, menez la sécante BL à cette circonférence, vous aurez

$$BM = \frac{\overline{BG}^2}{BL} = \frac{R^2 - r^2}{R \cos. B + r \cos. D} = 2\rho$$

Le rayon ρ étant déterminé, tracez l'arc cherché du centre C situé sur BH, à la distance ρ de B. (*M. Poncelet.*)

65. *Développer une surface conique* (fig.5, pl. LXXX). *Si la surface est celle d'un cône droit*, il est évident que le développement est une portion de cercle S'A'A'' (fig. 6) dont le rayon S'A'' est égal à la génératrice droite SA et dont l'arc a pour longueur celle de la circonférence dont le diamètre est AB. Il suffit donc, pour obtenir le développement, de décrire d'un point S' (fig. 6) et d'un rayon $S'A' = SA = SB$ un arc de cercle indéfini A'A'', puis de prendre sur cet arc, à partir d'un de ses points A'', une longueur de courbe $A''A' = 3.1416 \times AB$; A' étant ainsi déterminé, il ne reste plus qu'à tirer les rayons de développement A'S', A''S'.

66. *Si la surface conique droite est tronquée par un plan* ab *parallèle à sa base*, on développe d'abord la surface entière en S'A''A', puis du point S' et du rayon $Sa' = Sa$, on décrit entre les rayons SA'', SA' dont la position est connue, l'arc de cercle $a'a''$; on a ainsi le trapèze mixtiligne $a'a''$A''A' pour le développement de la surface tronc conique droite abAB.

67. Si l'on ne connaît directement que la hauteur h du tronc et les rayons R et r de ses bases, on trace (fig. 6) une droite indéfinie CS'; par un point quelconque C de cette droite, on élève une perpendiculaire CA' qu'on fait $= R$, puis de C en c, on porte la longueur h, enfin, on mène par c une parallèle $a'c = r$ à A'c; la droite tirée par A'a' rencontre CS' en un point S' qui est le centre de développement de la surface tronc conique. De ce point S' et avec les rayons S'a', S'A', on décrit deux arcs indéfinis sur lesquels

on prend à partir de A' et a' des longueurs de courbes $A'A''=2\pi R$, $a'a''=2\pi r$. Menant une droite $A''a''$, qui doit passer par S' si l'on a bien opéré, on a $A'a'A''a''$ pour le développement demandé.

68. Si l'on ne connaît que la génératrice A a et les rayons Rr, on construit un angle droit D, on porte de D en A' la différence $R-r$ des rayons, puis de A' en a' la génératrice connue Aa, qui prolongée rencontre en S' la parallèle à Da' menée par un point C tel qu'on ait $C'A'=R$. Le développement s'achève alors comme dans le cas précédent.

69. Enfin, si l'on connaît l'axe h, la génératrice et l'un des rayons, R par exemple, on fait un angle droit en C; sur l'un des côtés de cet angle, on prend $Cc=h$ et sur l'autre côté $A'C=R$; par c, on mène une parallèle $a'c$ à A'C, et du point A' avec un rayon égal à la génératrice donnée Aa, on recoupe $a'c$ en a'. On est ainsi ramené au cas précédent.

70. *Si la surface conique droite* (fig. 7, pl. LXXX) *est tronquée par un plan* a*b* *non parallèle à sa base*, on développe d'abord la surface entière SAB en S'B'A'B' (fig. 8) comme on l'a fait plus haut. Puis décrivant sur le diamètre AB du cône le demi-cercle ACEDB, on partage sa circonférence en un nombre n de parties égales qu'on a réduit ici à quatre pour rendre la figure plus distincte. De chacun des points de division C, E, D, on conduit des perpendiculaires au diamètre AB, et des points de rencontre, on mène des droites au sommet S, qui coupent la projection ab du plan d'intersection du cône, et enfin par ces derniers points de rencontre, on mène des parallèles à AB terminées aux génératrices SA, SB. Cela fait, on partage le développement total (fig. 8) en un nombre $2n$ de secteurs égaux symétriquement disposés par rapport à la ligne S'A' milieu du développement et qui correspond à la génératrice SA du cône; sur S'A', on prend $S'a'=Sa$, puis successivement sur les S'C', S'E', SD', S'B', on prend $S'c'=Sc$, $S'e'=Se$, $S'd'=Sd$, $S'b'=Sb$, et faisant passer une courbe continue et symétrique par les points $b'd'e'c'a'c'e'd'b'$, on a $b'B'A'B'b'$ pour le développement cherché.

Je termine ce résumé de géométrie par une TABLE des LIGNES NATURELLES donnant directement de minute en minute les *sinus*, *cosinus*, *tangentes* et *cotangentes* du cercle dont le rayon est 1.0000000.

On obtiendrait les valeurs de ces lignes de *seconde* en *seconde*, avec assez d'approximation, en ajoutant algébriquement le soixantième de la différence de deux termes consécutifs;

Ainsi sinus de 19°,3',22''

$$=\text{sinus } 19°,3'+\frac{22}{60}(\text{sin. } 19°,4'-\text{sin. } 19°,3')$$

$$=0.3263931+\frac{22}{60}(0.3266681-0.3263931)$$

$$=0.3263931+0.0001008=0.3264939$$

	0 D.				1 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.0000000	1.0000000	0.0000000	Infinie.	0.0174524	0.9998477	0.0174551	57.2899620	60
1	0.0002909	0.9999999	0.0002909	3437.7466700	0.0177432	0.9998426	0.0177460	56.3505900	59
2	0.0005818	0.9999998	0.0005818	1718.8731900	0.0180341	0.9998374	0.0180370	55.4415170	58
3	0.0008727	0.9999996	0.0008727	1145.9153000	0.0183249	0.9998321	0.0183280	54 5613300	57
4	0.0011636	0.9999993	0.0011636	859.4363000	0.0186158	0.9998267	0.0186190	53.7085870	56
5	0.0014544	0.9999989	0.0014544	687.5488700	0.0189066	0.9998212	0.0189100	52 8821090	55
6	0.0017453	0.9999985	0.0017453	572.9572100	0.0191974	0.9998157	0.0192010	52 0806730	54
7	0.0020362	0.9999979	0.0020362	491.1060000	0.0194883	0.9998101	0.0194920	51.3031570	53
8	0.0023271	0.9999973	0.0023271	429.7175700	0.0197791	0.9998044	0.0197830	50.5485060	52
9	0.0026180	0.9999966	0.0026180	381.9709900	0.0200699	0.9997986	0.0200740	49,8157260	51
10	0.0029089	0.9999958	0.0029089	343.7737100	0.0203608	0.9997927	0.0203650	49.1038810	50
11	0.0031998	0.9999949	0.0031998	312.5213700	0.0206516	0.9997867	0.0206560	48.4120840	49
12	0.0034906	0.9999939	0.0034907	286.4777300	0.0209424	0.9997806	0.0209470	47.7395010	48
13	0.0037815	0.9999928	0.0037816	264.4408000	0.0212332	0.9997745	0.0212380	47.0853430	47
14	0.0040724	0.9999917	0.0040725	245.5519800	0.0215241	0.9997683	0.0215291	46.4488620	46
15	0.0043633	0.9999905	0.0043633	229.1816600	0.0218149	0.9997620	0.0218201	45.8293510	45
16	0.0046542	0.9999892	0.0046542	214.8576200	0.0221057	0.9997556	0.0221111	45.2261410	44
17	0.0049451	0.9999878	0.0049451	202.2187500	0.0223965	0.9997491	0.0224021	44.6385960	43
18	0.0052360	0.9999863	0.0052360	190 9841900	0.0226873	0 9997425	0.0226932	44.0661130	42
19	0.0055268	0.9999847	0.0055269	180.9322000	0.0229781	0.9997359	0.0229842	43.5081220	41
20	0.0058177	0.9999837	0.0058178	171.8854000	0.0232690	0.9997292	0.0232753	42.9640770	40
21	0.0061086	0.9999813	0.0061087	163.7001900	0.0235598	0.9997224	0.0235663	42.4334640	39
22	0.0063995	0.9999795	0.0063996	156.2590800	0.0238506	0.9997155	0.0238574	41.9157900	38
23	0.0066904	0.9999776	0.0066905	149.4650100	0.0241414	0.9997085	0.0241484	41.4105880	37
24	0.0069813	0.9999756	0.0069814	143.2371200	0.0244322	0.9997014	0.0244395	40.9174120	36
25	0.0072721	0.9999736	0.0072723	137.5074500	0.0247230	0.9996943	0.0247305	40.4358370	35
26	0.0075630	0.9999714	0.0075632	132.2185100	0.0250138	0.9996871	0.0250216	39.9654600	34
27	0.0078539	0.9999692	0.0078541	127.3213400	0.0253046	0.9996798	0.0253127	39 5058950	33
28	0.0081448	0.9999668	0.0081450	122.7739600	0.0255954	0.9996724	0.0256038	39.0567710	32
29	0.0084357	0.9999644	0.0084360	118.5401800	0.0258862	0.9996649	0.0258948	38.6177380	31
30	0.0087265	0.9999619	0.0087269	114.5886500	0 0261769	0.9990573	0.0261859	38.1884590	30
31	0.0090174	0.9999593	0.0090178	110.8920500	0.0264677	0.9996496	0.0264770	37.7686130	29
32	0.0093084	0.9999566	0.0093087	107.4264800	0.0267585	0.9996419	0.0267681	37.3578920	28
33	0.0095992	0.9999539	0.0095996	104.1709300	0.0270493	0.9996341	0.0270592	36.9560010	27
34	0.0098900	0.9999511	0.0098905	101.1069000	0.0273401	0.9996262	0.0273503	36 5626590	26
35	0.0101809	0.9999482	0.0101814	98.2179430	0.0276309	0.9996182	0.0276414	36.1775960	25
36	0.0104718	0.9999452	0.0104725	95.4894750	0.0279216	0.9996101	0.0279325	35.8005530	24
37	0.0107627	0.9999421	0.0107633	92.9084870	0.0282124	0.9996019	0.0282236	35.4312820	23
38	0.0110535	0.9999389	0.0110542	90.4633360	0.0285032	0.9995936	0.0285148	35.0695460	22
39	0.0113444	0.9999356	0.0113451	88.1435720	0.0287940	0.9995853	0.0288059	34.7151150	21
40	0.0116353	0.9999323	0.0116361	85.9397910	0.0290847	0.9995769	0.0290970	34.3677710	20
41	0.0119261	0.9999289	0.0119270	83.8435070	0.0293755	0 9995684	0.0293882	34.0273030	19
42	0.0122170	0.9999254	0.0122179	81.8470410	0.0296662	0.9995598	0.0296793	33.6935090	18
43	0.0125079	0.9999218	0.0125088	79.9434300	0.0299570	0.9995511	0.0299705	33.3661940	17
44	0.0127987	0.9999181	0.0127998	78.1263420	0.0302478	0.9995424	0.0302616	33.0451730	16
45	0.0130896	0.9999143	0.0130907	76.3900090	0.0305385	0.9995336	0.0305528	32.7302640	15
46	0.0133805	0.9999104	0.0133817	74.7291650	0.0308293	0.9995247	0.0308439	32.4212950	14
47	0.0136713	0.9999065	0.0136726	73.1389910	0.0311200	0.9995157	0.0311351	32.1180990	13
48	0.0139622	0.9999025	0.0139635	71.6150700	0.0314108	0.9995066	0.0314263	31.8205160	12
49	0.0142530	0.9998984	0.0142545	70.1533460	0.0317015	0.9994974	0.0317174	31.5283920	11
50	9.0145439	0.9998942	0.0145454	68.7500870	0.0329922	0.9994881	0.0320086	31.2415770	10
51	0.0148348	0.9998899	0.0148364	67.4018540	0.0322830	0.9994788	0.0322998	30.9599280	9
52	0.0151256	0.9998855	0.0151273	66.1054720	0.0325737	0.9994694	0.0325910	30.6833070	8
53	0.0154165	0.9998811	0.0154183	64.8580070	0.0328644	0.9994599	0.0328822	30.4115800	7
54	0.0157073	0.9998766	0.0157093	63.6567410	0.0331552	0.9994503	0.0331734	30.1446190	6
55	0.0159982	0.9998720	0.0160002	62 4991540	0.0334459	0.9994406	0.0334646	29.8822990	5
56	0.0162890	0.9998673	0.0162912	61.3829050	0.0337366	0.9994308	0.0337558	29.6244990	4
57	0.0165799	0.9998625	0.0165821	60.3058200	0.0340273	0.9994209	0.0340471	29.3711060	3
58	0.0168707	0.9998576	0.0168731	59.2658720	0.0343181	0 9994109	0.0343383	29.1220050	2
59	0.0171616	0.9998527	0.0171641	58.2611740	0.0346068	0.9994009	0.0346295	28.8770890	1
60	0.0174524	0.9998477	0.0174551	57.2899620	0.0348995	0.9993908	0.0349208	28.6362530	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M
				89 D.				88 D.	

	2 D.				3 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.0348995	0.9993908	0.0349208	28.6362530	0.0523360	0.9986295	0.0524078	19.0811370	60
1	0.0351902	0.9993806	0.0352120	28.3993970	0.0526264	0.9986142	0.0526995	18.9755230	59
2	0.0354809	0.9993703	0.0355033	28.1664220	0.0529169	0.9985989	0.0529912	18.8710680	58
3	0.0357716	0.9993599	0.0357945	27.9372330	0.0532074	0.9985835	0.0532829	18.7677540	57
4	0.0360623	0.9993495	0.0360858	27.7117400	0.0534979	0.9985680	0.0535746	18.6655620	56
5	0.0363530	0.9993390	0 0363771	27.4898530	0.0537883	0.9985524	0.0538663	18.5644730	55
6	0.0366437	0.9993284	0.0366683	27.2714860	0.0540788	0.9985367	0.0541581	18.4644710	54
7	0.0369344	0.9993177	0.0369596	27.0565570	0.0543693	0.9985209	0.0544498	18.3655370	53
8	0.0372251	0.9993069	0.0372509	26.8449840	0.0546597	0.9985050	0.0547416	18.2676540	52
9	0.0375158	0.9992960	0.0375422	26.6366900	0.0549502	0.9984891	0.0550333	18.1708070	51
10	0.0378065	0.9992851	0.0378335	26.4316000	0.0552406	0.9984731	0.0553251	18.0749770	50
11	0.0380971	0.9992740	0.0381248	26.2296380	0.0555311	0.9984570	0.0556169	17.9801500	49
12	0.0383878	0.9992629	0.0384161	26.0307360	0.0558215	0.9984408	0.0559087	17.8863100	48
13	0.0386785	0.9992517	0.0387074	25.8348230	0.0561119	0.9984245	0.0562005	17.7934420	47
14	0.0389691	0.9992404	0.0389988	25.6418320	0.0564024	0.9984081	0.0564923	17.7015290	46
15	0.0392578	0.9992290	0.0392901	25.4517000	0.0566928	0.9983916	0.0567841	17.6105590	45
16	0.0395505	0.9992175	0.0395814	25.2643610	0.0569832	0.9983751	0.0570759	17.5205160	44
17	0.0398411	0.9992060	0.0398728	25.0797570	0.0572736	0.9983585	0.0573678	17.4313850	43
18	0.0401318	0.9991944	0.0401641	24.8978260	0.0575640	0.9983418	0.0576596	17.3431550	42
19	0.0404224	0.9991827	0.0404555	24.7185120	0.0578544	0.9983250	0.0579515	17.2558090	41
20	0.0407131	0.9991709	0.0407469	24.5417580	0.0581448	0.9983081	0.0582434	17.1693370	40
21	0.0410037	0.9991590	0.0410383	24.3675090	0.0584352	0.9982911	0.0585352	17.0837230	39
22	0.0412944	0.9991470	0.0413296	24.1957140	0.0587256	0.9982741	0.0588271	16.9989570	38
23	0.0415850	0.9991349	0.0416210	24.0263200	0.0590160	0.9982570	0.0591190	16.9150250	37
24	0.0418757	0.9991228	0.0419124	23.8592770	0.0593064	0.9982398	0.0594109	16.8319150	36
25	0.0421663	0.9991106	0.0422038	23.6945370	0.0595967	0.9982225	0.0597029	16.7496140	35
26	0.0424569	0.9990983	0.0424952	23.5320520	0.0598871	0.9982051	0.0599948	16.6681120	34
27	0.0427475	0.9990859	0.0427866	23.3717770	0.0601775	0.9981876	0.0602867	16.5873960	33
28	0.0430382	0.9990734	0.0430781	23.2136660	0.0604678	0.9981701	0.0605787	16.5074550	32
29	0.0433288	0.9990608	0.0433695	23.0576770	0.0607582	0.9981525	0.0608706	16.4282790	31
30	0.0436194	0.9990482	0.0436609	22.9037650	0.0610485	0.9981348	0.0611626	16.3498560	30
31	0.0439100	0.9990355	0.0439524	22.7518920	0.0613389	0.9981170	0.0614546	16.2721740	29
32	0.0442006	0.9990227	0.0442438	22.6020150	0.0616292	0.9980991	0.0617466	16.1952250	28
33	0.0444912	0.9990098	0.0445353	22.4540960	0.0619196	0.9980811	0.0620386	16.1189980	27
34	0.0447818	0.9989968	0.0448268	22.3080970	0.0622099	0.9980630	0.0623306	16.0434820	26
35	0.0450724	0.9989837	0.0451182	22.1639800	0.0625002	0.9980449	0.0626226	15.9686670	25
36	0.0453630	0.9989705	0.0454097	22.0217100	0.0627905	0.9980267	0.0629147	15.8945450	24
37	0.0456536	0.9989573	0.0457012	21.8812510	0.0630808	0.9980084	0.0632067	15.8211040	23
38	0.0459442	0.9989440	0.0459927	21.7425690	0.0633711	0.9979900	0.0634988	15.7483370	22
39	0.0462347	0.9989306	0.0462842	21.6056300	0.0636614	0.9979715	0.0637908	15.6762330	21
40	0.0465253	0.9989171	0.0465757	21.4704010	0.0639517	0.9979529	0.0640829	15.6047840	20
41	0.0468159	0.9989035	0.0468673	21.3368510	0.0642420	0.9979343	0.0643750	15.5339810	19
42	0.0471064	0.9988898	0.0471588	21.2049490	0.0645323	0.9979156	0.0646671	15.4638140	18
43	0.0473970	0.9988761	0.0474503	21.0746640	0.0648226	0.9978968	0.0649592	15.3942760	17
44	0.0476876	0.9988623	0.0477419	20.9459660	0.0651129	0.9978779	0.0652513	15.3253580	16
45	0.0479781	0.9988484	0.0480334	20 8188280	0.0654031	0.9978589	0.0655435	15.2570520	15
46	0.0482687	0.9988344	0.0483250	20.6932200	0.0656934	0.9978398	0.0658356	15.1893490	14
47	0.0485592	0.9988203	0.0486166	20.5691150	0.0659836	0.9978206	0.0661278	15.1222420	13
48	0.0488498	0.9988061	0.0489082	20.4464860	0.0662739	0.9978014	0.0664199	15.0557250	12
49	0.0491403	0.9987918	0.0491997	20.3253070	0.0665641	0.9977821	0.0667121	14.9897840	11
50	0.0494308	0.9987775	0.0494913	20.2055530	0.0668544	0.9977627	0.0670043	14.9244170	10
51	0.0497214	0.9987631	0.0497829	20.0871990	0.0671446	0.9977432	0.0672965	14.8596150	9
52	0.0500119	0.9987486	0.0500746	19.9702190	0.0674348	0.9977236	0.0675887	14.7953720	8
53	0.0503024	0.9987340	0.0503662	19.8545910	0.0677251	0.9977039	0.0678809	14.7316790	7
54	0.0505929	0.9987193	0.0506578	19.7402910	0.0680153	0.9976842	0.0681732	14.6685290	6
55	0.0508835	0.9987045	0.0509495	19.6272960	0.0683055	0.9976644	0.0684654	14.6059160	5
56	0.0511740	0.9986897	0.0512411	19.5155840	0.0685957	0.9976445	0.0687577	14.5438330	4
57	0.0514645	0.9986748	0.0515328	19.4051330	0.0688859	0.9976245	0.0690499	14.4822730	3
58	0.0517550	0.9986598	0.0518244	19.2959220	0.0691761	0.9976044	0.0693422	14.4212300	2
59	0.0520455	0.9986447	0.0521161	19.1879300	0.0694663	0.9975842	0.0696345	14.3606960	1
60	0.0523360	0.9986294	0.0524078	19.0811370	0.0697565	0.9975640	0.0699268	14.3006660	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				87 D.				86 D.	

	4 D.				5 D.				
M	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.0697565	0.9975640	0.0699268	14.3006660	0.0871557	0.9961947	0.0874887	11.4300520	60
1	0.0700466	0.9975437	0.0702191	14.2411340	0.0874455	0.9961693	0.0877818	11.3918850	59
2	0.0703368	0.9975233	0.0705115	14.1820920	0.0877353	0.9961438	0.0880749	11.3539700	58
3	0.0706270	0.9975028	0.0708038	14.1235360	0.0880251	0.9961182	0.0883681	11.3163040	57
4	0.0709171	0.9974822	0.0710961	14.0654590	0.0883148	0.9960926	0.0886612	11.2788850	56
5	0.0712073	0.9974615	0.0713885	14.0078560	0.0886046	0.9960669	0.0889544	11.2417120	55
6	0.0714974	0.9974407	0.0716809	13.9507190	0.0888943	0.9960411	0.0892476	11.2047800	54
7	0.0717876	0.9974199	0.0719733	13.8940450	0.0891840	0.9960152	0.0895408	11.1680890	53
8	0.0720777	0.9973990	0.0722657	13.8378270	0.0894738	0.9959892	0.0898341	11.1316350	52
9	0.0723678	0.9973780	0.0725581	13.7820600	0.0897635	0.9959631	0.0901273	11.0954160	51
10	0.0726580	0.9973569	0.0728505	13.7267380	0.0900532	0.9959369	0.0904206	11.0594310	50
11	0.0729481	0.9973357	0.0731430	13.6718560	0.0903429	0.9959107	0.0907138	11.0236700	49
12	0.0732382	0.9973144	0.0734354	13.6174090	0.0906326	0.9958844	0.0910071	10.9881500	48
13	0.0735283	0.9972931	0.0737279	13.5633910	0.0909223	0.9958580	0.0913004	10.9528500	47
14	0.0738184	0.9972717	0.0740203	13.5097990	0.0912119	0.9958315	0.0915938	10.9177750	46
15	0.0741085	0.9972502	0.0743128	13.4566250	0.0915016	0.9958049	0.0918871	10.8829210	45
16	0.0743986	0.9972286	0.0746053	13.4038670	0.0917913	0.9957782	0.0921809	10.8482880	44
17	0.0746887	0.9972069	0.0748979	13.3515180	0.0920809	0.9957515	0.0924738	10.8138720	43
18	0.0749787	0.9971851	0.0751904	13.2995740	0.0923706	0.9957247	0.0927672	10.7796730	42
19	0.0752688	0.9971632	0.0754829	13.2480310	0.0926602	0.9956978	0.0930606	10.7456870	41
20	0.0755589	0.9971413	0.0757755	13.1968830	0.0929499	0.9956708	0.0933540	10.7119130	40
21	0.0758489	0.9971193	0.0760680	13.1461270	0.0932395	0.9956437	0.0936474	10.6783480	39
22	0.0761390	0.9970972	0.0763601	13.0957570	0.0935291	0.9956165	0.0939409	10.6449920	38
23	0.0764290	0.9970750	0.0766532	13.0457690	0.0938187	0.9955892	0.0942344	10.6118410	37
24	0.0767190	0.9970527	0.0769458	12.9961600	0.0941083	0.9955619	0.0945278	10.5788950	36
25	0.0770091	0.9970303	0.0772384	12.9469240	0.0943979	0.9955345	0.0948213	10.5461510	35
26	0.0772991	0.9970079	0.0775311	12.8980580	0.0946875	0.9955070	0 0951148	10.5136060	34
27	0.0775891	0.9969854	0.0778237	12.8495570	0.0949771	0.9954794	0.0954084	10.4812610	33
28	0.0778791	0.9969628	0.0781164	12.8014170	0.0952666	0.9954517	0.0957019	10.4491120	32
29	0.0781691	0.9969401	0.0784090	12.7536340	0.0955562	0.9954240	0.0959955	10.4171580	31
30	0.0784591	0.9969173	0.0787017	12.7062050	0.0958458	0.9953962	0.0962890	10.3853970	30
31	0.0787491	0.9968944	0.0789944	12.6591250	0.0961353	0.9953683	0.0965826	10.3538270	29
32	0.0790391	0.9968715	0.0792871	12.6123900	0.0964248	0.9953403	0.0968763	10.3224470	28
33	0.0793290	0.9968485	0.0795798	12.5659970	0.0967144	0.9953122	0.0971699	10.2912550	27
34	0.0796190	0.9968254	0.0798726	12.5199420	0.0970039	0.9952840	0.0974635	10.2602490	26
35	0.0799090	0.9968022	0.0801653	12.4742210	0.0972934	0.9952557	0.0977572	10.2294280	25
36	0.0801989	0.9967789	0.0804581	12.4288310	0.0975829	0.9952274	0.0980509	10.1987890	24
37	0.0804889	0.9967555	0.0807509	12.3837680	0.0978724	0.9951990	0.0983446	10 1683320	23
38	0.0807788	0.9967320	0.0810437	12.3390280	0.0981619	0.9951705	0.0986383	10.1380540	22
39	0.0810687	0.9967085	0.0813365	12.2946080	0.0984514	0.9951419	0.0989320	10.1079540	21
40	0.0813587	0.9966849	0.0816293	12.2505060	0.0987408	0.9951132	0.0992257	10.0780310	20
41	0.0816486	0.9966612	0.0819222	12.2067160	0.0990303	0.9950844	0.0995195	10.0482830	19
42	0.0819385	0.9966374	0.0822150	12.1632360	0.0993197	0 9950555	0.0998133	10.0187080	18
43	0.0822284	0.9966135	0.0825078	12.1200620	0.0996092	0.9950266	0.1001071	9.9893050	17
44	0.0825183	0.9965895	0.0828007	12.0771920	0.0998986	0.9949976	0.1004009	9.9600724	16
45	0.0828082	0.9965655	0.0830936	12.0346220	0.1001881	0.9949685	0.1006947	9.9310088	15
46	0.0830981	0.9965414	0.0833865	11.9923490	0.1004775	0.9949393	0.1009885	9.9021125	14
47	0.0833880	0.9965172	0.0836794	11.9503700	0.1007669	0 9949100	0.1012824	9.8733823	13
48	0.0836778	0.9964929	0.0839723	11.9086820	0.1010563	0.9948806	0.1015763	9.8448166	12
49	0.0839677	0.9964685	0.0842653	11.8672820	0.1013457	0.9948512	0.1018702	9.8164140	11
50	0.0842576	0.9964440	0 0845583	11.8261670	0.1016351	0.9948217	0.1021641	9.7881732	10
51	0.0845474	0.9964194	0.0848512	11.7853330	0.1019245	0.9947921	0.1024580	9.7600927	9
52	0.0848373	0.9963948	0.0851442	11.7447790	0.1022158	0.9947624	0.1027520	9.7321713	8
53	0.0851271	0.9963701	0.0854372	11.7045000	0.1025032	0.9947326	0.1030460	9.7044075	7
54	0.0854169	0.9963453	0.0857302	11.6644950	0.1027925	0.9947027	0.1033400	9.6768000	6
55	0.0857067	0.9963204	0.0860233	11.6247610	0.1030819	0.9946728	0.1036340	9.6493475	5
56	0.0859966	0.9962954	0.0863163	11.5852940	0.1033712	0.9946428	0.1039280	9.6220486	4
57	0.0862864	0 9962703	0.0866094	11.5460930	0.1036605	0.9946127	0.1042220	9.5949022	3
58	0.0865762	0.9962425	0.0869025	11.5071540	0.1039499	0.9945825	0.1045160	9.5679068	2
59	0.0868660	0.9962200	0.0871956	11.4684740	0.1042592	0.9945522	0.1048101	9.5410613	1
60	0.0871557	0.9961947	0.0874887	11.4300520	0.1045285	0.9945218	0.1051042	9.5143645	0
M.	Cosinus.	Sinus	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				85 D.				84 D.	

6 D. | 7 D.

M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.1045285	0.9945218	0.1051042	9.5143645	0.1218693	0.9925462	0.1227846	8.1443464	60
1	0.1048178	0.9944914	0.1053983	9.4878149	0.1221581	0.9925107	0.1230799	8.1248071	59
2	0.1051070	0.9944609	0.1056924	9.4614116	0.1224468	0.9924751	0.1233752	8.1053599	58
3	0.1053963	0.9944303	0.1059866	9.4351531	0.1227355	0.9924394	0.1236705	8.0860042	57
4	0.1056856	0.9943996	0.1062808	9.4090384	0.1230241	0.9924036	0.1239658	8.0667394	56
5	0.1059748	0.9943688	0.1065750	9.3830663	0.1233128	0.9923678	0.1242612	8.0475647	55
6	0.1062641	0.9943379	0.1068692	9.3572355	0.1236015	0.9923319	0.1245566	8.0284796	54
7	0.1065533	0.9943069	0.1071634	9.3315450	0.1238901	0.9922959	0.1248520	8.0094835	53
8	0.1068425	0.9942759	0.1074576	9.3059936	0.1241788	0.9922598	0.1251474	7.9905756	52
9	0.1071318	0.9942448	0.1077519	9.2805802	0.1244674	0.9922236	0.1254429	7.9717555	51
10	0.1074210	0.9942136	0.1080462	9.2553035	0.1247560	0.9921874	0.1257384	7.9530224	50
11	0.1077102	0.9941823	0.1083405	9.2301627	0.1250446	0.9921511	0.1260339	7.9343758	49
12	0.1079994	0.9941509	0.1086348	9.2051564	0.1253332	0.9921147	0.1263294	7.9158151	48
13	0.1082885	0.9941194	0.1089291	9.1802838	0.1256218	0.9920782	0.1266249	7.8973396	47
14	0.1085777	0.9940879	0.1092234	9.1555436	0.1259104	0.9920416	0.1269205	7.8789489	46
15	0.1088669	0.9940563	0.1095178	9.1309348	0.1261990	0.9920049	0.1272161	7.8606423	45
16	0.1091560	0.9940246	0.1098122	9.1064564	0.1264875	0.9919681	0.1275117	7.8424191	44
17	0.1094452	0.9939928	0.1101066	9.0821074	0.1267761	0.9919313	0.1278073	7.8242790	43
18	0.1097343	0.9939609	0.1104010	9.0578867	0.1270646	0.9918944	0.1281029	7.8062212	42
19	0.1100234	0.9939289	0.1106954	9.0337933	0.1273531	0.9918574	0.1283986	7.7882453	41
20	0.1103126	0.9938969	0.1109899	9.0098261	0.1276416	0.9918203	0.1286943	7.7703506	40
21	0.1106017	0.9938648	0.1112844	8.9859843	0.1279301	0.9917831	0.1289900	7.7525366	39
22	0.1108908	0.9938326	0.1115789	8.9622668	0.1282186	0.9917459	0.1292857	7.7348028	38
23	0.1111799	0.9938003	0.1118734	8.9386726	0.1285071	0.9917086	0.1295815	7.7171486	37
24	0.1114689	0.9937679	0.1121679	8.9152008	0.1287956	0.9916712	0.1298773	7.6995735	36
25	0.1117580	0.9937354	0.1124625	8.8918505	0.1290841	0.9916337	0.1301731	7.6820769	35
26	0.1120471	0.9937028	0.1127571	8.8686206	0.1293726	0.9915961	0.1304689	7.6646584	34
27	0.1123361	0.9936702	0.1130517	8.8455103	0.1296609	0.9915584	0.1307648	7.6473174	33
28	0.1126252	0.9936375	0.1133463	8.8225186	0.1299494	0.9915206	0.1310607	7.6300533	32
29	0.1129142	0.9936047	0.1136409	8.7996446	0.1302378	0.9914828	0.1313566	7.6128657	31
30	0.1132032	0.9935718	0.1139356	8.7768874	0.1305262	0.9914449	0.1316525	7.5957541	30
31	0.1134922	0.9935388	0.1142303	8.7542461	0.1308146	0.9914069	0.1319484	7.5787179	29
32	0.1137812	0.9935058	0.1145250	8.7317198	0.1311030	0.9913688	0.1322444	7.5617567	28
33	0.1140702	0.9934727	0.1148197	8.7093077	0.1313913	0.9913306	0.1325404	7.5448699	27
34	0.1143592	0.9934395	0.1151144	8.6870088	0.1316797	0.9912923	0.1328364	7.5280571	26
35	0.1146482	0.9934062	0.1154091	8.6648223	0.1319681	0.9912539	0.1331324	7.5113178	25
36	0.1149371	0.9933728	0.1157039	8.6427475	0.1322564	0.9912155	0.1334285	7.4946514	24
37	0.1152261	0.9933393	0.1159987	8.6207833	0.1325447	0.9911770	0.1337246	7.4780576	23
38	0.1155151	0.9933057	0.1162935	8.5989290	0.1328330	0.9911384	0.1340207	7.4615357	22
39	0.1158040	0.9932720	0.1165883	8.5771838	0.1331213	0.9910997	0.1343168	7.4450855	21
40	0.1160929	0.9932383	0.1168831	8.5555468	0.1334096	0.9910609	0.1346129	7.4287064	20
41	0.1163818	0.9932045	0.1171780	8.5340172	0.1336979	0.9910221	0.1349091	7.4123978	19
42	0.1166707	0.9931706	0.1174729	8.5125943	0.1339862	0.9909832	0.1352053	7.3961595	18
43	0.1169596	0.9931366	0.1177678	8.4912772	0.1342744	0.9909442	0.1355015	7.3799909	17
44	0.1172485	0.9931025	0.1180628	8.4700651	0.1345627	0.9909051	0.1357977	7.3638916	16
45	0.1175374	0.9930684	0.1183578	8.4489573	0.1348509	0.9908659	0.1360940	7.3478610	15
46	0.1178263	0.9930342	0.1186528	8.4279531	0.1351392	0.9908266	0.1363903	7.3318989	14
47	0.1181151	0.9929999	0.1189478	8.4070515	0.1354274	0.9907872	0.1366866	7.3160047	13
48	0.1184040	0.9929655	0.1192428	8.3862519	0.1357156	0.9907478	0.1369829	7.3001780	12
49	0.1186928	0.9929310	0.1195378	8.3655536	0.1360038	0.9907083	0.1372793	7.2844184	11
50	0.1189816	0.9928964	0.1198328	8.3449557	0.1362919	0.9906687	0.1375757	7.2687255	10
51	0.1192704	0.9928617	0.1201279	8.3244577	0.1365801	0.9906290	0.1378721	7.2530987	9
52	0.1195593	0.9928270	0.1204230	8.3040586	0.1368683	0.9905892	0.1381685	7.2375378	8
53	0.1198481	0.9927922	0.1207181	8.2837579	0.1371564	0.9905493	0.1384650	7.2220423	7
54	0.1201368	0.9927573	0.1210132	8.2635547	0.1374445	0.9905094	0.1387615	7.2066116	6
55	0.1204256	0.9927223	0.1213084	8.2434485	0.1377327	0.9904694	0.1390580	7.1912456	5
56	0.1207144	0.9926872	0.1216036	8.2234484	0.1380208	0.9904293	0.1393545	7.1759437	4
57	0.1210031	0.9926521	0.1218988	8.2035239	0.1383089	0.9903891	0.1396510	7.1607056	3
58	0.1212919	0.9926169	0.1221940	8.1837041	0.1385970	0.9903488	0.1399476	7.1465308	2
59	0.1215806	0.9925816	0.1224893	8.1639786	0.1388850	0.9903084	0.1402442	7.1304190	1
60	0.1218693	0.9925462	0.1227846	8.1443464	0.1391731	0.9902680	0.1405408	7.1153697	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.

83 D. | 82 D.

	8 D.				9 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.1391731	0.9902680	0.1405408	7.1153697	0.1564345	0.9876883	0.1583844	6.3137515	60
1	0.1394612	0.9902275	0.1408374	7.1003826	0.1567218	0.9876428	0.1586826	6.3018866	59
2	0.1397492	0.9901869	0.1411341	7.0854573	0.1570091	0.9875972	0.1589808	6.2900651	58
3	0.1400372	0.9901462	0.1414308	7.0705934	0.1572963	0.9875515	0.1592791	6.2782868	57
4	0.1403252	0.9901054	0.1417275	7.0557905	0.1575836	0.0875057	0.1595774	6.2665514	56
5	0.1406132	0.9900645	0.1420243	7.0410482	0.1578708	0.9874598	0.1598757	6.2548588	55
6	0.1409012	0.9900236	0.1423211	7.0263662	0.'581581	0.9874138	0.1601740	6.2432086	54
7	0.1411892	0.9899826	0.1426179	7.0117441	0.1584453	0.8873677	0.1604724	6.2316007	53
8	0.1414772	0.9899415	0.1429147	6.9971806	0.1587325	0.9873216	0.1607708	6.2200347	52
9	0.1417651	0.9899003	0.1432115	6.9826781	0.1590197	0.9872754	0.1610692	6.2085106	51
10	0.1420531	0.9898590	0.1435084	6.9682335	0.1593069	0.9872291	0.1613677	6.1970279	50
11	0.1423410	0.9898176	0.1438053	6.9538473	0.1595940	0.9871827	0.1616662	6.1855867	49
12	0.1426289	0.9897762	0.1441022	6.9395192	0.1598812	0.9871362	0 1619647	6.1741865	48
13	0.1429168	0.9897347	0.1443991	6.9252489	0.1601683	9.9870897	0.1622632	6.1628272	47
14	0.1432047	0.9896931	0.1446961	6.9110359	0.1604555	0.9870431	0.1615617	6.1515085	46
15	0.1434926	0.9896514	0.1449931	6.8968799	0.1607426	0.9869964	0 1628603	6.1402303	45
16	0.1437805	0.9896096	0.1452901	6.8827807	0.1610297	0.9869496	0.1631589	6.1289923	44
17	0.1440684	0 9895677	0.1455871	6.8687378	0.1613167	0.9869027	0.1634576	6.1177943	43
18	0.1443562	0.9895257	0.1458842	6.8547508	0.1616038	0.9868557	0.1637563	6.1066360	42
19	0.1446440	0.9894837	0.1461813	6.8408196	0.1618909	0.9868086	0.1640550	6.0955174	41
20	0.1449319	0.9894416	0.1464784	6.8269437	0.1621779	0.9867615	0.1643537	6.0844381	40
21	0.1452197	0.9893994	0.1467755	6.8131227	0.1624650	0.9867143	0.1646525	6.0733979	39
22	9.1455075	0.9893571	0.1470727	6.7993565	0.1627520	0.9866670	0.1649513	6.0623967	38
23	0.1457953	0.9893147	0.1473699	6.7856446	0.1630390	0.9866196	0.1652501	6.0514343	37
24	0.1460830	0.9892723	0.1476671	6.7719867	0.1633260	0.9865721	0.1655489	6.0405103	36
25	0.1463708	0.9892298	0.1479644	6.7583826	0.1636129	0.9865246	0.1658478	6.0296247	35
26	0.1466585	0.9891872	0.1482617	6.7448318	0.1638999	0.9864770	0.1661467	6.0187772	34
27	0.1469463	0.9891445	0.1485590	6.7313341	0.1641868	0.9864293	0.1664456	6.0079676	33
28	0.1472340	0.9891017	0.1488563	6.7178891	0.1644738	0.9863815	0.1667446	5.9971957	32
29	0.1475217	0.9890588	0.1491536	6.7044966	0.1647607	0.9863336	0.1670436	5.9864614	31
30	0.1478094	0.9890158	0.1494510	6.6911562	0.1650476	0.9862856	0 1673426	5.9757644	30
31	0.1480971	0.9889728	0.1497484	6.6778677	0.1653345	0.9862375	0.1676416	5.9651045	29
32	0.1483848	0.9889297	0.1500458	6.6646307	0.1656214	0.9861894	0.1679407	5.9544815	28
33	0.1486724	0.9888865	0.1503433	6.6514449	0.1659082	0.9861412	0.1682398	5.9438952	27
34	0.1489601	0.9888432	0.1506408	6.6383100	0.1661951	0.9860929	0.1685389	5.9333455	26
35	0.1492477	0.9887998	0.1509383	6.6252258	0.1664819	0.9860445	0.1688381	5.9228322	25
36	0.1495353	0.9887563	0.1512358	6.6121919	0.1667687	0.9859960	0.1691373	5.9123550	24
37	0.1498230	0.9887128	0.1515333	6.5992080	0.1670555	0.9859474	0.1694365	5.9019138	23
38	0.1501106	0.9886692	0.1518309	6.5862739	0.1673423	0.9858988	0.1697358	5.8915084	22
39	0.1503981	0.9886255	0.1521285	6.5733892	0.1676291	0.9858501	0.1700351	5.8811386	21
40	0.1506857	0.9885817	0.1524261	6.5605538	0.1679159	0.9858013	0.1703344	5.8708042	20
41	0.1509733	0.9885378	0.1527238	6.5477672	0.1682026	0.9857524	0.1706337	5.8605051	19
42	0.1512608	0.9884938	0.1530215	6.5350293	0.1684894	0.9857034	0.1709331	5.8502410	18
43	0.1515484	0.9884498	0.1533192	6.5223396	0.1687761	0.9856544	0.1712325	5.8400117	17
44	0.1518359	0.9884057	0.1536189	6.5096981	0.1690628	0.9856053	0.1715319	5.8298172	16
45	0.1521234	0.9883615	0.1539147	6.4971043	0.1693495	0.9855561	0.1718314	5.8196572	15
46	0.1524109	0.9883172	0.1542125	6.4845581	0.1696362	0.9855068	0.1721309	5.8095315	14
47	0.1526984	0.9882728	0.1545103	6.4720591	0.1699228	0.9854574	0.1724304	5.7994400	13
48	0.1529858	0.9882283	0.1548082	6.4596070	0.1702095	0.9854079	0.1727300	5.7893825	12
49	0.1532733	0.9881838	0.1551061	6.4472017	0.1704961	0.9853583	0.1730296	5.7793588	11
50	0.1535607	0.9881392	0.1554040	6.4348428	0.1707828	0.9853087	0.1733292	5.7693688	10
51	0.1538482	0.9880945	0.1557019	6.4225301	0.1710694	0.9852590	0.1736288	5.7594122	9
52	0.1541356	0.9880497	0.1559998	6.4102633	0.1713560	0.9852092	0.1739285	5.7494889	8
53	0.1544230	0.9880048	0.1562978	6.3980422	0.1716425	0.9851593	0.1742282	5.7395988	7
54	0.1547104	0.9879598	0.1565958	6.3858665	0.1719291	0.9851093	0.1745279	5.7297416	6
55	0.1549978	0.9879148	0.1568938	6.3737359	0.1722156	0.9850592	0.1748277	5.7199173	5
56	0.1552851	0.9878697	0.1571919	6.3616502	0.1725022	0.9850091	0.1751275	5.7101256	4
57	0.1555725	0.9878245	0.1574900	6.3496092	0.1727887	0.9849589	0.1754273	5.7003662	3
58	0.1558598	0.9877792	0.1577881	6.3376126	0.1730752	0.9849086	0.1757272	5.6906391	2
59	0.1561472	0.9877338	0.1580862	6.3256601	0.1733617	0.9848582	0.1760271	5.6809446	1
60	0.1564345	0.9876883	0.1583844	6.3137515	0.1736482	0.9848077	0.1763270	5.6712818	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang	Tangente.	M.
	81 D.				80 D.				

	10 D.				11 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.1736482	0.9848077	0.1763270	5.6712818	0.1908090	0.9816271	0.1943803	5.1445540	60
1	0.1739346	0.9847571	0.1766269	5.6616509	0.1910945	0.9815716	0.1946822	5.1365762	59
2	0.1742211	0.9847065	0.1769269	5.6520516	0.1913800	0.9815160	0.1949841	5.1286224	58
3	0.1745075	0.9846558	0.1772269	5.6424838	0.1916655	0.9814603	0.1952861	5.1206921	57
4	0.1747939	0.9846050	0.1775269	5.6329474	0.1919510	0.9814045	0.1955881	5.1127855	56
5	0.1750803	0.9845541	0.1768270	5.6234421	0.1922365	0.9813486	0.1958901	5.1049024	55
6	0.1753667	0.9845031	0.1781271	5.6139680	0.1925220	0.9812926	0.1961922	5.0970426	54
7	0.1756531	0.9844521	0.1784272	5.6045247	0.1928074	0.9812366	0.1964943	5.0892061	53
8	0.1759395	0.9844010	0.1787274	5.5951121	0.1930928	0.9811805	0.1967964	5.0813928	52
9	0.1762258	0.9843498	0.1790276	5.5857302	0.1933782	0.9811243	0.1970986	5.0736025	51
10	0.1765121	0.9842985	0.1793278	5.5763786	0.1936636	0.9810680	0.1974008	5.0658352	50
11	0.1767984	0.9842471	0.1796281	5.5670574	0.1939490	0.9810116	0.1977030	5.0580907	49
12	0.1770847	0.9841956	0.1799284	5.5577663	0.1942344	0.9809551	0.1980053	5.0503690	48
13	0.1773710	0.9841440	0.1802287	5.5485052	0.1945197	0.9808986	0.1983076	5.0426700	47
14	0.1776573	0.9840924	0.1805291	5.5392740	0.1948050	0.9808420	0.1986100	5 0349935	46
15	0.1779435	0.9840407	0.1808295	5.5300724	0.1950903	0.9807853	0.1989124	5.0273395	45
16	0.1782298	0.9839889	0.1811299	5.5209065	0.1953756	0.9807285	0.1992148	5.0197078	44
17	0.1785160	0.9839370	0.1814303	5.5117579	0.1956609	0.9806716	0.1995172	5.0120984	43
18	0.1788022	0.9838850	0.1817308	5.5026446	0.1959461	0.9806146	0.1998197	5.0045111	42
19	0.1790884	0.9838329	0.1820313	5.4935604	0.1962314	0.9805576	0.2001222	4.9969459	41
20	0.1793746	0.9837808	0.1823318	5.4845052	0.1965166	0.9805005	0.2004248	4.9894027	40
21	0.1796607	0.9837286	0.1826324	5.4754788	0.1968018	0.9804433	0.2007274	4.9818813	39
22	0.1799469	0.9836763	0.1829330	5.4664812	0.1970870	0.9803860	0.2010300	4.9743817	38
23	0.1802330	0.9836239	0.1832336	5.4575121	0.1973722	0.9803286	0.2013327	4.9669037	37
24	0.1805191	0.9835714	0.1835343	5.4485715	0.1976573	0.9802711	0.2016354	4.9594474	36
25	0.1808052	0.9835189	0.1838350	5.4396592	0.1979425	0.9802136	0.2019381	4.9520125	35
26	0.1810913	0.9834663	0.1841357	5.4307750	0.1982276	0.9801560	0.2022409	4.9445990	34
27	0.1813774	0.9834136	0.1844365	5.4219188	0.1985127	0.9800983	0.2025437	4.9372068	33
28	0.1816635	0.9833608	0.1847373	5.4130906	0.1987978	0.9800405	0.2028465	4.9298358	32
29	0.1819495	0.9833079	0.1850381	5.4042901	0.1990829	0.9799826	0.2031494	4.9224859	31
30	0.1822355	0.9832549	0.1853390	5.3955172	0.1993679	0.9799247	0.2034523	4.9151570	30
31	0.1825215	0.9832018	0.1856399	5.3867718	0.1996530	0.9798667	0.2037552	4.9078491	29
32	0.1828075	0.9831487	0.1859408	5.3780538	0.1999380	0.9798086	0.2040582	4.9005620	28
33	0.1830935	0.9830955	0.1862418	5.3693630	0.2002230	0.9797504	0.2043612	4.8932956	27
34	0.1833795	0.9830422	0.1865428	5.3606993	0.2005280	0.9796921	0.2046643	4.8560499	26
35	0.1836654	0.9829888	0.1868438	5.2520626	0.2007930	0.9796337	0.2049674	4.8788248	25
36	0.1839513	0.9829353	0.1871449	5.3434527	0.2010779	0.9795752	0.2052705	4.8716201	24
37	0.1842373	0.9828817	0.1874460	5.3348696	0.2013629	0.9795167	0.2055737	4.8644359	23
38	0.1845232	0.9828281	0.1877471	5.3263131	0.2016478	0.9794581	0.2058769	4.8572719	22
39	0.1848091	0.9827744	0.1880483	5.3177830	0.2019327	0.9793994	0.2061801	4.8501282	21
40	0.1850949	0.9827206	0.1883495	5.3092793	0.2022176	0.9793406	0.2064834	4.8430045	20
41	0.1853808	0.9826667	0.1886507	5.3008018	0.2025024	0.9792817	0.2067867	4.8359010	19
42	0.1856666	0.9826127	0.1889520	5.2923505	0.2027873	0.9792228	0.2070900	4.8288174	18
43	0.1859524	0.9825587	0.1892533	5.2839251	0.2030721	0.9791638	0.2073934	4.8217536	17
44	0.1862382	0.9825046	0.1895546	5.2755255	0.2033569	0.9791047	0 2076968	4.8147096	16
45	0.1865240	0.9824504	0 1898559	5.2671517	0.2036417	0.9790455	0.2080003	4.8076854	15
46	0.1868098	0.9823961	0.1901573	5.2588035	0.2039265	0.9789862	0.2083038	4.8006808	14
47	0.1870956	0.9823417	0,1904587	5.2504809	0.2042113	0.9789268	0.2086073	4.7936957	13
48	0.1873813	0.9822872	0.1907602	5.2421836	0.2044961	0.9788674	0.2089109	4.7867300	12
49	0.1876670	0.9822327	0.1910617	5.2339116	0.2047808	0.9788079	0.2092145	4.7797837	11
50	0.1879527	0.9821781	0.1913632	5.2256647	0.2050655	0.9787483	0.2095181	4.7728567	10
51	0.1882384	0.9821234	0.1916648	5 2174428	0.2053502	0.9786886	0.2098218	4.7659490	9
52	0.1885241	0.9820686	0.1919664	5.2092459	0.2056349	0.9786288	0.2101255	4.7590603	8
53	0.1888098	0.9820137	0.1922680	5.2010738	0.2059195	0.9785689	0.2104293	4.7521907	7
54	0.1890954	0.9819587	0.1925696	5.1929264	0.2062042	0.9785090	0.2107331	4.7453401	6
55	0.1893811	0.9819036	0.1928713	5.1848035	0.2064868	0 9784490	0.2110369	4.7385083	5
56	0.1896667	0.9818485	0.1931730	5.1767051	0.2067734	0.9783889	0.2113407	4.7316954	4
57	0.1899523	0.9817933	0.1934748	5.1686311	0.2070580	0.9783287	0 2116446	4.7249012	3
58	0.1902379	0.9817380	0.1937766	5.1605813	0.2073426	0.9782684	0.2119485	4.7181256	2
59	0.1905234	0.9816826	0.1940784	5.1525557	0.2076271	0.9782080	0.2122525	4.7113685	1
60	0.1908090	0.9816271	0.1943803	5.1445540	0.2079117	0.9781476	0.2125565	4.7046301	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				79 D.				78 D.	

	12 D.				13 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.2079117	0.9781476	0.2125565	4.7046301	0.2249511	0.9743701	0.2308682	4.3314759	60
1	0.2081962	0.9780871	0.2128606	4.6979100	0.2252345	0.9743046	0.2311746	4.3257347	59
2	0.2084807	0.9780265	0.2131647	4.6912083	0.2255179	0.9742390	0.2314811	4.3200079	58
3	0.2087652	0.9779658	0.2134688	4.6845248	0.2258013	0.9741734	0.2317876	4.3142955	57
4	0.2090497	0.9779050	0.2137730	4.6778595	0.2260846	0.9741077	0.2320941	4.3085974	56
5	0.2093341	0.9778441	0.2140772	4.6712124	0.2263680	0.9740419	0.2324007	4.3029136	55
6	0.2096186	0.9777832	0.2143814	4.6645832	0.2266513	0.9739760	0.2327073	4.2972440	54
7	0.2099030	0.9777222	0.2146857	4.6579721	0.2269346	0.9739100	0.2330140	4.2915885	53
8	0.2101874	0.9776611	0.2149900	4.6513788	0.2272179	0.9738439	0.2333207	4.2859472	52
9	0.2104718	0.9775999	0.2152944	4.6448034	0.2275012	0.9737778	0.2336274	4.2803199	51
10	0.2107561	0.9775386	0.2155988	4.6382457	0.2277844	0.9737116	0.2339342	4.2747066	50
11	0.2110405	0.9774773	0.2159032	4.6317056	0.2280677	0.9736453	0.2342410	4.2691072	49
12	0.2113248	0.9774159	0.2162077	4.6251832	0.2283509	0.9735789	0.2345479	4.2635218	48
13	0.2116091	0.9773544	0.2165122	4.6186783	0.2286341	0.9735124	0.2348548	4.2579501	47
14	0.2118934	0.9772928	0.2168167	4.6121908	0.2289172	0.9734458	0.2351617	4.2523923	46
15	0.2121777	0.9772311	0.2171213	4.6057207	0.2292004	0.9733792	0.2354687	4.2468482	45
16	0.2124619	0.9771693	0.2174259	4.5992680	0.2294835	0.9733125	0.2357756	4.2413177	44
17	0.2127462	0.9771075	0.2177306	4.5928325	0.2297666	0.9732457	0.2360829	4.2358009	43
18	0.2130304	0.9770456	0.2180353	4.5864141	0.2300497	0.9731788	0.2263900	4.2302977	42
19	0.2133146	0.9769836	0.2183400	4.5800129	0.2303328	0.9731118	0.2366972	4.2248080	41
20	0.2135988	0.9769215	0.2186448	4.5736287	0.2306159	0.9730448	0.2370044	4.2193318	40
21	0.2138829	0.9768593	0.2189496	4.5672614	0.2308989	0.9729777	0.2373116	4.2138690	39
22	0.2141671	0.9767970	0.2192544	4.5609111	0.2311819	0.9729105	0.2376189	4.2084196	38
23	0.2144512	0.9767347	6.2195593	4.5545776	0.2314649	0.9728432	0 2379262	4.2029835	37
24	0.2147353	0 9766723	0.2198642	4.5482608	0.2317479	0.9727758	0.2382336	4.1975606	36
25	9.2150194	0.9766098	0.2201692	4.5419608	0.2320309	0.9727084	0.2385410	4.1921510	35
26	0.2153035	0.9765472	0.2204742	4 5356773	0.2323138	0.9726409	0.2388485	4.1867546	34
27	0.2155876	0.9764845	0.2207793	4.5294105	0.2325967	0.9725733	0.2391560	4.1813713	33
28	0.2158716	0.9764217	0.2210844	4.5231601	0.2328796	0.9725056	0.2394635	4.1760011	32
29	0.2161556	0.9763589	0.2213895	4.5169261	0.2331625	0.9724378	0.2397711	4.1706440	31
30	0.2164396	0.9762960	0.2216947	4.5107085	0.2334454	0.9723699	0.2400787	4.1652998	30
31	0.2167236	0.9762330	0.2219999	4.5045072	0.2337282	0.9723019	0.2403864	4.1599685	29
32	0.2170076	0.9761699	0.2223951	4.4983221	0.2340110	0.9722339	0.2406941	4.1546501	28
33	0.2172915	0.9761067	0.2226104	4.4921532	0.2342938	0.9721658	0.2410019	4.1493446	27
34	0.2175754	0.9760435	0.2229157	4.4860004	0.2345766	0.9720976	0.2413097	4.1440519	26
35	0.2178593	0.9759802	0.2232211	4.4798636	0.2348594	0.9720293	0.2416176	4.1387719	25
36	0.2181432	0.9759168	0.2235265	4.4737428	0.2351421	0.9719609	0.2419255	4.1335046	24
37	0.2184271	0.9758533	0.2238319	4.4676379	0.2354248	0.9718925	0.2422334	4.1282499	23
38	0.2187110	0.9757897	0.2241374	4.4615489	0.2357075	0.9718240	0.2425414	4.1230079	22
39	0.2189948	0.9757260	0.2244429	4.4554756	0.2359902	0.9717554	0.2428494	4.1177784	21
40	0.2192786	0.9756623	0.2247485	4.4494181	0.2362729	0.9716867	0.2431575	4.1125614	20
41	0.2195624	0.9755985	0.2250541	4.4433762	0.2365555	0.9716179	0.2434656	4.1073569	19
42	0.2198462	0.9755346	0.2253597	4.4373499	0.2368381	0.9715491	0.2437737	4.1021649	18
43	0.2201300	0.9754706	0.2256654	4.4313392	0.2371207	0.9714802	0.2440819	4.0969852	17
44	0.2204137	0.9754065	0.2259711	4.4253439	0.2374033	0.9714112	0.2443901	4.0918178	16
45	0.2206974	0.9753423	0.2262769	4.4193641	0.2376859	0 9713421	0.2446984	4.0866627	15
46	0.2209811	0.9752781	0.2265827	4.4133996	0.2379684	0.9712729	0.2450067	4.0815199	14
47	0.2212648	0.9752138	0.2268885	4.4074504	0 2382510	0.9712036	0.2453151	4.0763892	13
48	0.2215485	0.9751494	0.2271944	4.4015164	0.2385335	0.9711343	0.2456235	4.0712707	12
49	0.2218321	0.9750849	0.2275003	4.3955976	0.2388159	0.9710649	0.2459320	4.0661643	11
50	0.2221158	0.9750203	0.2278063	4.3896940	0.2390984	0.9709954	0.2462405	4.0610700	10
51	0.2223994	0.9749556	0.2281123	4.3838054	0.2393808	0.9709258	0.2465491	4.0559877	9
52	0.2226830	0.9748909	0.2284183	4.3779317	0 2396633	0.9708561	0.2468577	4.0509274	8
53	0.2229666	0.9748261	0.2287244	4.3720731	0.2399457	0.9707863	0.2471663	4.0458590	7
54	0.2232501	0.9747612	0.2290305	4.3662293	0.2402280	0.9707165	0.2474750	4 0408125	6
55	0.2235337	0.9746962	0.2293367	4.3604003	0.2405104	0.9706466	0.2477837	4.0357779	5
56	0.2238172	0.9746311	0.2296429	4.3545861	0.2407927	0.9705766	0.2480925	4.0307550	4
57	0.2241007	0.9745660	0.2299492	4.3487866	0.2410751	0.9705065	0.2484013	4.0257440	3
58	0.2243841	0.9745008	0.2302555	4.3430018	0.2413574	0.9704363	0.2487102	4.0207446	2
59	0.2246676	0.9744355	0.2305618	4.3372316	9.2416396	0.9703660	0.2490191	4.0157570	1
60	0.2249511	0.9743701	0.2308682	4.3314759	0.2419219	0.9702957	0.2493280	4.0107809	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				77 D.				76 D.	

14 D. 15 D.

M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangent.	Cotangent	M.
0	0.2419219	0.9702957	0.2493280	4.0107809	0.2588190	0.96 .9258	0.2679492	3.7320508	60
1	0.2422041	0.9702253	0.2496370	4.0058165	0.2591000	0.9658505	0.268.610	3.7277131	59
2	0.2424863	0.9701548	0.2499460	4.0008636	0.2593810	0.9657751	0.2685728	3.7233847	58
3	0.2427685	0.9700842	0.2502551	3.9959223	0.2596619	0.9656996	0.2688847	3.7190658	57
4	0.2430507	0.9700135	0.2505642	3.9909924	0.2599428	0.9656240	0.2691967	3.7147561	56
5	0.2433329	0.9699428	0.2508734	3.9860739	0.2602237	0.9655483	0.2695087	3.7104558	55
6	0.2436150	0.9698720	0.2511826	3.9811669	0.2605045	0.9654726	0.2698207	3.7061648	54
7	0.2438971	0.9698011	0.2514919	3.9762712	0.2607853	0.9653968	0.2701328	3.7018830	53
8	0.2441792	0.9697301	0.2518012	3.9713868	0.2610661	0.9653209	0.2704449	3.6976103	52
9	0.2444613	0.9696590	0.2521106	3.9665137	0.2613469	0.9652449	0.2707571	3.6933469	51
10	0.2447433	0.9695879	0.2524200	3.9616518	0.2616277	0.9651688	0.2710693	3.6890927	50
11	0.2450254	0.9695167	0.2527294	3.9568011	0.2619085	0.9650927	0.2713816	3.6848475	49
12	0.2453074	0.9694454	0.2530389	3.9519615	0.2621892	0.9650165	0.2716940	3.6806115	48
13	0.2455894	0.9693740	0.2533484	3.9471331	0.2624699	0.9649402	0.2720061	3.6763845	47
14	0.2458713	0.9693025	0.2536580	3.9423157	0.2627506	0.9648638	0.2723188	3.6721665	46
15	0.2461533	0.9692309	0.2539676	3.9375094	0.2630312	0.9647873	0.2726313	3.6679575	45
16	0.2464352	0.9691592	0.2542773	3.9327141	0.2633118	0.9647107	0.2729438	3.6637575	44
17	0.2467171	0.9690875	0.2545870	3.9279297	0.2635924	0.9646341	0.2732564	3.6595665	43
18	0.2469990	0.9690157	0.2548968	3.9231563	0.2638730	0.9645574	0.2735690	3.6553844	42
19	0.2472809	0.9689438	0.2552066	3.9183937	0.2641536	0.9644806	0.2738817	3.6512111	41
20	0.2475627	0.9688718	0.2555165	3.9136420	0.2644342	0.9644037	0.2741944	3.6470467	40
21	0.2478445	0.9687998	0.2558264	3.9089011	0.2647147	0.9643267	0 2745072	3.6428911	39
22	0.2481263	0.9687277	0.2561363	3.9041710	0.2649952	0.9642497	0.2748201	3.6387444	38
23	0.2484081	0.9686555	0.2564463	3.8994516	0.2652757	0.9641726	0.2751330	3.6346064	37
24	0.2486899	0.9685882	0.2567563	3.8947429	0.2655561	0.9640954	0.2754459	3.6304771	36
25	0.2489716	0.9685108	0.2570664	3.8900448	0.2658365	0.9640181	0.2757589	3.6263566	35
26	0.2492533	0.9684383	0.2573766	3.8853574	0.2661169	0.9639407	0.2760719	3.6222447	34
27	0.2495350	0.9683657	0.2576868	3.8806805	0.2663973	0.9638633	0.2763850	3.6181415	33
28	0.2498167	0.9682931	0.2579970	3.8760142	0.2666777	0.9637858	0.2766981	3.6140469	32
29	0.2500984	0.9682204	0.2583073	3.8713584	0.2669581	0.9637082	0.2770113	3.6099609	31
30	0.2503800	0.9681476	0.2586176	3.8667131	0.2672384	0.9636305	0.2773245	3.6058835	30
31	0.2506616	0.9680747	0.2589280	3.8620782	0.2675187	0.9635527	0.2776378	3.6018146	29
32	0.2509432	0.9680018	0.2592384	3.8574537	0.2677989	0.9634748	0.2779512	3.5977543	28
33	0.2512248	0.9679288	0.2595488	3.8528396	0.2680792	0.9633969	0.2782646	3.5937024	27
34	0.2515063	0.9678557	0.2598593	3.8482358	0.2683594	0.9633189	0.2785780	3.5896590	26
35	0.2517879	0.9677825	0.2601699	3.8436424	0.2686396	0.9632408	0.2788915	3.5856241	25
36	0.2520694	0.9667092	0.2604805	3.8390591	0.2689198	0.9631626	0.2792050	3.5815975	24
37	0.2523508	0.9676358	0.2607911	3.8844861	0.2692000	0.9630843	0.2795186	3.5775794	23
38	0.2526323	0.9675623	0.2611018	3.8299233	0.2694801	0.9630059	0.2798322	3.5735696	22
39	0.2529137	0.9674888	0.2614126	3.8253707	0.2697602	0.9629275	0.2801459	3.5695681	21
40	0.2531952	0.9674152	0.2617234	3.8208.81	0.2700403	0.9628490	0.2804597	3.5655749	20
41	0.2534766	0.9673415	0.2620342	3.8162957	0.2703204	0.9627704	0.2807735	3.5615900	19
42	0.2537579	0.9672677	0.2623451	3.8117733	0.2706004	0.9626917	0.2810873	3.5576133	18
43	0.2540393	€.9671938	0.2626560	3.8072606	0.2708805	0.9626130	0.2814012	3.5536449	17
44	0.2543206	0.9671199	0.2629670	3 8027585	0.2711605	0.9625342	0.2817152	3.5496846	16
45	0.2546019	0.9670459	0.2632780	3.7982661	0.2714404	0.9624553	0.2820292	3.5457325	15
46	0.2548832	0.9669718	0.2635891	3.7937835	0.2717204	0.9623763	0.2823432	3.5417886	14
47	0.2551645	0.9668976	0.2639002	3.7893109	0.2720003	0.9622972	0.2826573	3 5378528	13
48	0.2554458	0.9668233	0.2642114	3.7848481	0.2722802	0.9622180	0.2829715	3.5339251	12
49	0.2557270	0.9667490	0.2645226	3.7803951	0.2725601	0.9621387	0.2832857	3.5300054	11
50	0.2560082	0.9666746	0.2648339	3.7759519	0.2728400	0.9620594	0.2835999	3.5260938	10
51	0.2562894	0.9666001	0.2651452	3.7715185	0.2731198	0.9619800	0.2839142	3.5221902	9
52	0.2565705	0.9665255	0.2654566	3.7670947	0.2733996	0.9619005	0.2842286	3.5182946	8
53	0.2568517	0.9664508	0.2657680	3.7626807	0.2736794	0.9618209	0.2845430	3.5144070	7
54	0.2571328	0.9663760	0.2660794	3.7582763	0.2739592	0.9617413	0.2848575	3.5105273	6
55	0.2574139	0.9663012	0.2663909	3.7538815	0.2742390	0.9616616	0.2851720	3.5066555	5
56	0.2576950	0.9662263	0.2667025	3.7494963	0.2745187	0.9615818	0.2854866	3.5027916	4
57	0.2579760	0.9661513	0.2670141	3.7451207	0.2747984	0.9615019	0.2858012	3.4989356	3
58	0.2582570	0.9660762	0.2673257	3.7407546	0.2750781	0.9614219	0.2861159	3.4950874	2
59	0.2585381	0.9660010	0.2676374	3 7363980	0.2753578	0.9613418	0.2864306	3.4912470	1
60	0.2588190	0.9659258	0.2679492	3.7320508	0.2756374	0.9612617	0.2867454	3.4874144	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.

75 D. 74 D.

	16 D.				17 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.2756374	0.9612617	0 2867454	3.4874144	0.2923717	0.9563048	0.3057307	3.2708526	60
1	0.2759170	0.9611815	0.2870602	3.4835896	0.2926499	0.9562197	0.3060488	3.2674529	59
2	0.2761965	0.9611012	0.2873751	3.4797726	0.2929280	0.9561345	0.3063669	3.2640596	58
3	0.2764761	0.9610208	0.2876900	3.4759532	0.2932061	0.9560492	0.3066851	3.2606728	57
4	0.2767556	0.9609403	0.2880050	3.4721616	0.2934842	0.9559639	0.3070034	3.2572924	56
5	0.2770352	0.9608598	0.2883201	3.4683676	0.2937623	0.9558785	0.3073218	3.2539184	55
6	0.2773147	0.9607792	0.2886352	3.4645818	0.2940403	0 9557930	0.3076402	3.2505508	54
7	0.2775941	0.9606984	0.2889503	3.4608026	0.2943183	0.9557074	0.3079586	3.2471895	53
8	0.2778736	0.9606177	0.2892655	3.4570315	0.2945963	0.9556217	0.3082771	3.2438346	52
9	0.2781530	0.9605368	0.2895808	3.4532679	0.2948743	0.9555360	0.3085957	3.2404860	51
10	0.2784324	0.9604558	9.2898961	3.4495120	0.2951522	0.9554502	0.3089143	3.2371436	50
11	0.2787118	0.9603748	0.2902114	3.4457635	0.2954301	0.9553643	0.3092330	3.2338078	49
12	0.2789911	0.9602917	0.2905268	3.4420226	0.2957080	0.9552784	0.3095517	3.2304780	48
13	0.2792704	0.9602125	0.2908423	3.4382891	0.2959859	0.9551922	0.3098705	3.2271546	47
14	0.2795497	0.9601312	0.2911578	3.4345631	0.2962638	0.9551061	0.3101893	3.2238373	46
15	0.2798290	0.9600498	0.2914734	3.4308446	0.2965416	0.9550199	0.3105082	3.2205263	45
16	0.2801083	0.9599684	0.2917890	3.4271334	0.2968194	0.9549336	0 3108272	3.2172215	44
17	0.2803875	0.9598869	0.2921047	3.4234297	0.2970971	0.9548472	0.3111462	3.2139228	43
18	0.2806667	0.9598053	0.2924205	3.4197333	0.2973749	0.9547607	0.3114653	3.2106304	42
19	0.2809459	0.9597236	0.2927363	3.4160443	0.2976526	0.9546742	0.3117844	3.2073440	41
20	0.2812251	0.9596418	0.2930521	3.4123626	0.2979303	0.9545876	0.3121036	3.2040638	40
21	0.2815042	0.9595600	0.2933680	3 4086882	0.2982079	0.9545009	0.3124229	3.2007897	39
22	0.2817833	0.9594781	0.2936839	3.4050210	0.2984856	0.9544141	0.3127422	3.1975217	38
23	0.2820624	0.9593961	0.2939999	3.4013612	0.2987632	0.9543272	0.3130616	3.1942598	37
24	0.2823415	0.9593140	0.2943160	3.3977085	0.2990408	0.9542403	0.3133810	3.1910039	36
25	0.2826205	0.9592318	0.2946321	3.3940631	0.2993184	0 9541533	0.3137005	3.1877540	35
26	0.2828995	0.9591496	0.2949483	3.3904249	0.2995959	0.9540662	0.3140200	3.1845102	34
27	0.2831785	0.9590672	0.2952645	3.3867938	0.2998734	0.9539790	0.3143396	3.1812724	33
28	0.2834575	0.9589848	0.2955808	3.3831699	0.3001509	0.9538917	0.3146595	3.1780406	32
29	0.2837364	0.9589023	0.2958971	3.3795531	0.3004234	0.9538043	0.3149790	3.1748147	31
30	0.2840153	0.9588197	0.2962135	3.3759434	0.3007058	0.9537169	0.3152988	3.1715948	30
31	0.2842942	0.9587371	0.2965299	3.3723408	0.3009832	0.9536294	0.3156186	3.1683808	29
32	0.2845731	0.9586543	0.2968464	3.3687452	0.3012606	0.9535418	0.3159395	3.1651728	28
33	0.2848520	0.9585715	0.2971630	3.3651568	0.3015380	0.9534541	0.3162585	3.1619706	27
34	0.2851308	0.9584886	0.2974796	3.3615758	0.3018153	0.9533664	0.3165785	3.1587744	26
35	0.2854096	0.9584056	0.2977962	3.3580008	0.3020926	0.9532786	0.3168986	3.1555840	25
36	0.2856884	0.9583226	0.2981129	3.3544333	0.3023699	0.9531907	0.3172187	3.1523994	24
37	0.2859671	0.9582394	0.2984297	3.3508728	0.3026471	0.9531027	0.3175389	3.1492207	23
38	0.2862458	0.9581562	0.2987465	3.3473191	0.3029244	0.9530146	0.3178591	3.1460478	22
39	0.2865245	0.9580729	0.2990634	3.3437724	0.3032016	0.9529264	0.3181794	3.1428807	21
40	0.2868032	0.9579895	0.2993803	3.3402326	0.3034788	0.9528382	0.3184998	3.1397194	20
41	0.2870819	0.9579060	0.2996973	3.3366997	0.3037559	0.9527499	0.3188202	3.1365639	19
42	0.2873605	0.9578225	0.3000144	3 3331736	0.3040331	0.9526615	0.3191407	3.1334141	18
43	0.2876391	0.9577389	0.3003315	3.3296543	0.3043102	0.9525730	0.3194613	3.1302701	17
44	0.2879177	0.9576552	0.3006486	3.3261419	0.3045872	0.9524844	0.3197819	3.1271317	16
45	0.2881963	0.9575714	0.3009658	3.3226362	0.3048643	0.9523958	0 3201025	3.1239991	15
46	0.2884748	0.9574875	0.3012831	3.3191373	0.3051413	0.9523071	0.3204232	3.1208722	14
47	0.2887533	0.9574035	0.3016004	3.3156452	0.3054183	0.9522183	0.3207440	3.1177509	13
48	0.2890318	0.9573195	0.3019178	3.3121598	0.3056953	0.9521294	0.3210649	3.1146353	12
49	0.2893103	0.9572354	0.3022352	3.3086811	0.3059723	0.9520404	0.3213858	3.1115254	11
50	0.2895887	0.9571512	0.3025527	3.3052091	0.3062492	0.9519514	0.3217067	3.1084210	10
51	0.2898671	0.9570669	0.3028703	3.3017438	0.3065261	0.9518623	0.3220277	3.1053223	9
52	0.2901455	0.9569825	0.3031879	3.2982851	0.3068029	0.9517731	0.3223488	3.1022291	8
53	0.2904239	0.9568981	0.3035055	3.2948330	0.3070798	0.9516838	0.3226700	3.0991416	7
54	0.2907022	0.9568136	0.3038232	3.2913876	0 3073566	0.9515944	0.3229912	3.0960596	6
55	0.2909805	0.9567290	0.3041410	3.2879487	0.3076334	0.9515049	0.3233125	3.0929331	5
56	0.2912588	0.9566443	0.3044588	3.2845164	0.3079102	0.9514154	0.3236338	3.0899122	4
57	0.2915371	0.9565595	0.3047767	3.2810907	0.3081869	0.9513258	0.3239552	3.0868468	3
58	0.2918153	0.9564747	0.3050946	3.2776715	0.3084636	0.9512361	0.3242766	3.0837869	2
59	0.2920935	0.9563898	0.3054126	3.2742588	0.3087403	0.9511463	0.3245981	3.0807325	1
60	0.2923717	0.9563048	0.3057307	3 2708526	0.3090170	0.9510565	0.3249197	3.0776835	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				73 D.				72 D.	

M.	18 D. Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	19 D. Sinus	Cosinus.	Tangent.	Cotangent	M.
0	0.3090170	0.9510565	0.3249197	3.0776835	0.3255682	0.9455185	0.3443276	2.9042109	60
1	0.3092936	0.9509666	0.3252413	3.0746400	0.3258432	0.9454238	0.3446530	2.9014688	59
2	0.3095702	0.9508766	0.3255630	3.0716020	0.3261182	0.9453290	0.3449785	2.8987314	58
3	0.3098468	0.9507867	0.3258848	3.0685693	0.3263931	0.9452341	0.3453040	2.8959986	57
4	0.3101234	0.9506963	0.3262066	3.0655421	0.3266681	0.9451391	0.3456296	2.8932704	56
5	0.3103999	0.9506060	0.3265285	3.0625203	0.3269430	0.9450440	0.3459553	2.8905467	55
6	0.3106764	0.9505157	0.3268504	3.0595038	0.3272179	0.9449489	0.3462810	2.8878277	54
7	0.3109529	0.9504253	0.3271724	3.0564928	0.3274928	0.9448537	0.3466068	2.8851132	53
8	0.3112294	0.9503348	0.3274944	3.0534870	0.3277676	0.9447 84	0.3469327	2.8824038	52
9	0.3115058	0.9502442	0.3278165	3.0504866	0.3280424	0.9446630	0.3472586	2.8796979	51
10	0.3117822	0.9501536	0.3281387	3.0474915	0.3283172	0.9445675	0.3475846	2.8769970	50
11	0.3120586	0.9500629	0.3284610	3.0445018	0.3285919	0.9444720	0.3479107	2.8743007	49
12	0.3123349	0.9499721	0.3287833	3.0415173	0.3288666	0.9443764	0.3482368	2.8716088	48
13	0.3126112	0.9498812	0.3291056	3.0385381	0.3291413	0.9442807	0.3485630	2.8689215	47
14	0.3128875	0.9497902	0.3294280	3.0355641	0.3294160	0.9441849	0.3488893	2.8662386	46
15	0.3131638	0.9496991	0.3297505	3.0325954	0.3296906	0.9440890	0.3492156	2.8635602	45
16	0.3134400	0.9496080	0.3300731	3.0296320	0.3299652	0.9439931	0.3495420	2.8608863	44
17	0.3137163	0.9495168	0.3303957	3.0266737	0.3302398	0.9438971	0.3498685	2.8582168	43
18	0.3139925	0.9494255	0.3307184	3.0237207	0.3305144	0.9438010	0.3501950	2.8555517	42
19	0.3142686	0.9493341	0.3310411	3.0207728	0.3307889	0.9437048	0.3505216	2.8528911	41
20	0.3145448	0.9492426	0.3313639	3.0178301	0.3310634	0.9436085	0.3508483	2.8502349	40
21	0.3148209	0.9491511	0.3316868	3.0148926	0.3313379	0.9435121	0.3511750	2.8475831	39
22	0.3150969	0.9490595	0.3320097	3.0119602	0.3316123	0.9434157	0.3515018	2.8449356	38
23	0.3153730	0.9489678	0.3323327	3 0090330	0.3318867	0.9433192	0.3518287	2.8422926	37
24	0.3156490	0.9488760	0.3326557	3.0061109	0.3321611	0.9432226	0.3521556	2.8396539	36
25	0.3159250	0.9487841	0.3329788	3.0031939	0.3324355	0.9431260	0.3524826	2.8370196	35
26	0.3162010	0.9486922	0.3333020	3.0002820	0.3327098	0.9430293	0.3528097	2.8343896	34
27	0.3164770	0.9486002	0.3336252	2.9973751	0.3329841	0.9429325	0.3531368	2.8317639	33
28	0.3167529	0.9485081	0.3339485	2.9944734	0.3332584	0.9428356	0.3534640	2.8291426	32
29	0.3170288	0.9484159	0.3342719	2.9915766	0.3335327	0.9427386	0.3537913	2.8265256	31
30	0.3173047	0.9483236	0.3345953	2.9886850	0.3338069	0.9426415	0.3541186	2.8239129	30
31	0.3175805	0.9482313	0.3349138	2.9857983	0.3340810	0.9425443	0.3544460	2.8213045	29
32	0.3178563	0.9481389	0.3352424	2.9829166	0 3343552	0.9424471	0.3547735	2.8187003	28
33	0.3181321	0.9480464	0.3355660	2.9800400	0.3346293	0.9423498	0.3551010	2.8161004	27
34	0.3184079	0.9479538	0.3358897	2.9771683	0.3349034	0.9422524	0.3554286	2.8135048	26
35	0.3186836	0.9478611	0.3362134	2.9743016	0.3351775	0.9421550	0.3557563	2.8109134	25
36	0.3189593	0.9477684	0.3365372	2.9714399	0.3354516	0.9420575	0.3560840	2.8083263	24
37	0.3192350	0.9476756	0.3368611	2.9685831	0.3357256	0.9419599	0.3564118	2.8057433	23
38	0.3195106	0.9475827	0.3371850	2.9657312	0.3359996	0.9418620	0.3567397	2.8031646	22
39	0.3197863	0.9474897	0.3375090	2.9628842	0.3362735	0.9417644	0.3570676	2.8005901	21
40	0.3200619	0.9473966	0.3378330	2.9600422	0.3365475	0.9416665	0.3573956	2.7980198	20
41	0.3203374	0.9473035	0.3381571	2.9572050	0.3368214	0.9415685	0.3577237	2.7954537	19
42	0.3206130	0.9472103	0.3384813	2.9543727	0.3370953	0.9414705	0.3580518	2.7928917	18
43	0.3208885	0.9471170	0.3388056	2.9515453	0.3373691	0.9413724	0.3583800	2.7903339	17
44	0.3211640	0.9470236	0.3391299	2.9487227	0.3376429	0.9412742	0.3587083	2.7877802	16
45	0.3214395	0.9469301	0.3394543	2.9459050	0.3379167	0.9411760	0.3590367	2.7852307	15
46	0.3217149	0.9468366	0.3397787	2.9430921	0.3381905	0.9410777	0.3593651	2.7826853	14
47	0.3219903	0.9467430	0.3401032	2.9402840	0.3384642	0.9409793	0.3596936	2.7801440	13
48	0.3222657	0.9466493	0.3404278	2.9371807	0.3387379	0.9408808	0.3600222	2.7776069	12
49	0.3225410	0.9465555	0.3407524	2.9346822	0.3390116	0.9407822	0.3603508	2.7750738	11
50	0.3228164	0.9464616	0.3410771	2.9318885	0 3392853	0.9406835	0.3606795	2.7725448	10
51	0.3230917	0.9463676	0.3414019	2.9290995	0.3395589	0.9405848	0.3610083	2.7700199	9
52	0.3233670	0.9462736	0.3417267	2.9263152	0.3398325	0.9404860	0.3613371	2.7674990	8
53	0.3236422	0.9461795	0.3420516	2.9235358	0.3401060	0.9403871	0.3616660	2.7649822	7
54	0.3239174	0.9460853	0.3423765	2.9207610	0.3403795	0.9402881	0.3619950	2.7624695	6
55	0.3241926	0.9459910	0.3427015	2.9179909	0.3406530	0.9401890	0.3623240	2.7599608	5
56	0.3244678	0.9458967	0.3430266	2.9152256	0.3409265	0.9400899	0.3626531	2.7574561	4
57	0.3247429	0.9458023	0.3433518	2.9124649	0.3412000	0.9399907	0.3629823	2.7549554	3
58	0.3250180	0.9457078	0.3436770	2.9097089	0.3414734	0.9398914	0.3633115	2.7524588	2
59	0.3252931	0.9456132	0.3440023	2.9069576	0.3417468	0.9397920	0.3636408	2.7499661	1
60	0.3255682	0.9455185	0.3443276	2.9042109	0.3420202	0.9396926	0.3639702	2.7474774	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente. 71 D.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente. 70 D.	M.

	20 D.				21 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.3420202	0.9396926	0.3639702	2.7474774	0.3583679	0.9335804	0.3838640	2.6050891	60
1	0.3422935	0.9395931	0.3642997	2.7449927	0.3586395	0.9334761	0.3841978	2.6028258	59
2	0.3425668	0.9394935	0.3646292	2 7425120	0.3589110	0.9333717	0.3845317	2.6005659	58
3	0.3428401	0.9393938	0.3649588	2.7400352	0.3591825	0.9332673	0 3848656	2.5983095	57
4	0.3431133	0.9392940	0.3652885	2.7375623	0.3594540	0.9331628	0.3851996	2.5960564	56
5	0.3433865	0.9391942	0.3656182	2.7350934	0.3597254	0.9330582	0.3855337	2.5938068	55
6	0.3436597	0.9390943	0.3659480	2.7326284	0.3599968	0.9329535	0.3858679	2.5915606	54
7	0.3439329	0.9389943	0.3662779	2.7301674	0.3602682	0.9328487	0.3862021	2.5893177	53
8	0.3442060	0.9388942	0.3666079	2.7277102	0.3605395	0.9327439	0.3865364	2.5870782	52
9	0.3444791	0.9387940	0.3669379	2.7252569	0.3608108	0.9326390	0.3868708	2.5848421	51
10	0.3447522	0.9386937	0.3672680	2.7228075	0 3610821	0.9325340	0.3872053	2.5826094	50
11	0.3450252	0.9385934	0.3675982	2.7203620	0.3613533	0.9324289	0.3875398	2.5803800	49
12	0.3452982	0.9384930	0.3679284	2.7179204	0.3616246	0.9323238	0.3878744	2 5781539	48
13	0.3455712	0.9383925	0.3682587	2.7154826	0.3618958	0.9322186	0.3882091	2.5759312	47
14	0.3458442	0.9382919	0.3685891	2.7130487	0.3621669	0.9321133	0.3885439	2.5737118	46
15	0.3461171	0.9381913	0.3689195	2.7106186	0.3624380	0.9320079	0.3888787	2.5714957	45
16	0.3463900	0.9380906	0.3692500	2.7081923	0.3627091	0.9319024	0.3892136	2.5692830	44
17	0.3466629	0.9379898	0.3695806	2.7057699	0.3629802	0 9317968	0.3895486	2.5670735	43
18	0.3469357	0.9378889	0.3699113	2.7033513	0.3632512	0.9316912	0.3898837	2.5648674	42
19	0.3472085	0.9377879	0.3702420	2.7009364	0.3635222	0.9315855	0.3902189	2 5626645	41
20	0.3474813	0.9376869	0.3705728	2.6985254	0.3637932	0.9314797	0.3905541	2.5604649	40
21	0.3477540	0.9375858	0.3709037	2.6961181	0.3640641	0.9313738	0.3908894	2.5582686	39
22	0.3480267	0.9374846	0.3712316	2.6937147	0.3643350	0.9312679	0.3912248	2.5560756	38
23	0.3482994	0.9373833	0.3715656	2.6913149	0.3646059	0.9311619	0.3915602	2.5538858	37
24	0.3485721	0.9372819	0.3718967	2.6889190	0.3648768	0.9310558	0.3918957	2.5516992	36
25	0.3488447	0.9371805	0.3722278	2.6865267	0.3651476	0.9309496	0.3922313	2.5495160	35
26	0.3491173	0.9370790	0.3725590	2.6841383	0.3654184	0.9308433	0.3925670	2.5473359	34
27	0.3493899	0.9369774	0.3728903	2.6817535	0.3656892	0.9307370	0.3929028	2.5451591	33
28	0.3496624	0.9368757	0.3732217	2.6793725	0.3659599	0.9306306	0.3932386	2.5429855	32
29	0.3499349	0.9367740	0.3735532	2.6769951	0.3662306	0.9305241	0.3935745	2.5408151	31
30	0.3502074	0.9366722	0.3738847	2.6746215	0.3665013	0.9304175	0.3939105	2.5386479	30
31	0.3504799	0.9365703	0.3742163	2.6722516	0.3667719	0.9303109	0.3942466	2.5364839	29
32	0.3507523	0.9364683	0.3745479	2.6698853	0.3670425	0.9302042	0.3945827	2.5343231	28
33	0.3510247	0.9363662	0.3748797	2.6675227	0.3673131	0.9300974	0.3949189	2.5321655	27
34	0.3512970	0.9362640	0.3752115	2.6651638	0.3675836	0.9299905	0.3952552	2.5300111	26
35	0.3515693	0.9361618	0.3755434	2.6628085	0.3678541	0.9298835	0.3955916	2.5278598	25
36	0.3518416	0.9360595	0.3758753	2.6604569	0.3681246	0.92977[illegible]5	0.3959280	2.5257117	24
37	0.3521139	0.9359571	0.3762073	2.6581089	0.3683950	0.9296694	0.3962645	2.5235667	23
38	0.3523862	0.9358546	0·3765394	2.6557645	0.3686654	0.9295622	0.3966011	2.5214249	22
39	0.3526584	0.9357521	0.3768716	2.6534238	0.3689358	0.9294549	0.3969378	2.5192863	21
40	0.3529306	0.9356495	0.3772038	2.6510867	0.3692062	0.9293475	0.3972746	2.5171507	20
41	0.3532027	0.9355468	0.3775361	2.6487531	0.3694765	0.9292401	0.3976114	2.5150183	19
42	0.3534748	0.9354440	0.3778685	2.6464232	0.3697468	0.9291326	0.3979483	2.5128890	18
43	0.3537469	0.9353411	0.3782010	2.6440969	0.3700170	0.9290250	0.3982853	2.5107629	17
44	0.3540190	0.9352382	0.3785335	2.6417741	0.3702872	0.9289173	0.3986224	2.5086398	16
45	0.3542910	0.9351352	0.3788961	2.6394549	0.3705574	0.9288095	0.3989596	2.5065198	15
46	0.3545630	0.9350321	0.3791988	2.6371392	0.3708276	0.9287017	0.3992968	2.5044029	14
47	0.3548350	0.9349289	0.3795316	2.6348271	0.3710977	0.9285938	0.3996341	2.5022891	13
48	0.3551070	0.9348256	0.3798644	2.6325186	0.3713678	0.9264858	0.3999715	2.5001784	12
49	0.3553789	0.9347223	0.3801973	2.6302136	0.3716379	0 9283777	0.4003089	2.4980707	11
50	0.3556508	0.9346189	0.3805303	2.6279121	0.3719080	0.9282696	0.4006465	2.4959661	10
51	0.3559226	0.9345154	0.3808633	2.6256141	0.3721780	0.9281614	0.4009841	2.4938645	9
52	0.3561944	0.9344118	0.3811964	2.6233196	0.3724480	0.9280531	0.4013218	2.4917660	8
53	0.3564662	0.9343082	0.3815296	2.6210286	0.3727179	0.9279447	0.4016596	2.4896706	7
54	0.3567380	0.9342045	0.3818629	2.6187411	0.3729878	0 9278362	0.4019975	2.4875781	6
55	0.3570097	0.9341007	0.3821962	2.6164571	0.3732577	0.9277277	0.4023354	2.4854887	5
56	0.3572814	0.9339966	0.3825296	2.6141766	0.3735275	0.9276191	0.4026734	2.4834023	4
57	0.3575531	0.9338928	0.3828631	2.6118995	0.3737973	0.9275104	0.4030115	2.4813190	3
58	0.3578248	0.9337887	0.3831967	2.6096259	0.3740671	0.9274016	0.4033497	2.4792386	2
59	0.3580964	0.9336846	0.3835303	2.6073558	0.3743369	0.9272928	0.4036879	2.4771612	1
60	0.3583679	0.9335804	0.3838640	2.6050891	0.3746066	0.9271839	0.4040262	2.4750869	0
M.	Cosinus	Sinus.	Cotang	Tangente	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
	69 D.				68 D.				

	22 D.				23 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.3746066	0.9271839	0.4040262	2.4750869	0.3907311	0.9205049	0.4244749	2.3558524	60
1	0.3748763	0.9270749	0.4043646	2.4730155	0.3909989	0.9203912	0.4248182	2.3539483	59
2	0.3751459	0.9269658	0.4047031	2.4709470	0.3912666	0.9202774	0.4251616	2.3520469	58
3	0.3754156	0.9268566	0.4050417	2.4688816	0.3915343	0.9201635	0.4255051	2.3501481	57
4	0.3756852	0.9267473	0.4053804	2.4668191	0.3918019	0.9200496	0.4258487	2.3482519	56
5	0.3759547	0.9266380	0.4057191	2.4647596	0.3920695	0.9199356	0.4261924	2.3463582	55
6	0.3762243	0.9265286	0.4060579	2.4627030	0.3923371	0.9198215	0.4265362	2.3444672	54
7	0.3764938	0.9264191	0.4063968	2.4606494	0.3926047	0.9197073	0.4268800	2.3425787	53
8	0.3767632	0.9263096	0.4067358	2.4585987	0.3928722	0.9196931	0.4272239	2.3406928	52
9	0.3770327	0.9262000	0.4070748	2.4565509	0.3931397	0.9194788	0.4275679	2.3388095	51
10	0.3773021	0.9260903	0.4074139	2.4545061	0.3934071	0.9193644	0.4279120	2.3369287	50
11	0.3775714	0.9259805	0.4077531	2.4524642	0.3937845	0.9192499	0.4282562	2.3350505	49
12	0.3778408	0.9258706	0.4080924	2.4504252	0.3939419	0.9191353	0.4286005	2.3331748	48
13	0.3781101	0.9257606	0.4084318	2.4483891	0.3942093	0.9190207	0.4289449	2.3313017	47
14	0.3783794	0.9256506	0.4087713	2.4463559	0.3944766	0.9189060	0.4292894	2.3294811	46
15	0.3786486	0.9255405	0.4091108	2.4443256	0.3947439	0.9187912	0.4296339	2.3275630	45
16	0.3789178	0.9254303	0.4094504	2.4422982	0.3950111	0.9186763	0.4299785	2.3256975	44
17	0.3791870	0.9253200	0.4097901	2.4402736	0.3952783	0.9185614	0.4303232	2.3238345	43
18	0.3794562	0.9252097	0.4101299	2.4382519	0.3955455	0.9184464	0.4306680	2.3219740	42
19	0.3797253	0.9250993	0.4104697	2.4362331	0.3958127	0.9183313	0.4310129	2.3201160	41
20	0.3799944	0.9249888	0.4108097	2 4342172	0.3960798	9 9182161	0.4313579	2.3182606	40
21	0.3802634	0.9248782	0.4111497	2.4322041	0.3963469	0.9181008	0.4317030	2.3164076	39
22	0.3805324	0.9247675	0.4114898	2.4301938	0.3966139	0.9179855	0.4320481	2.3145571	38
23	0.3808014	0.9246568	0.4118300	2.4281864	0.3968809	0.9178701	0.4323933	2.3127091	37
24	0.3810704	0.9245460	0 4121703	2.4261819	0.3971479	0.9177546	0.4327386	2.3108636	36
25	0.3813393	0.9244351	0.4125106	2.4241801	0.3974148	0.9176390	0.4330840	2.3090206	35
26	0.3816082	0.9243241	0.4128510	2.4221812	0.3976817	0.9175234	0.4334295	2.3071801	34
27	0 3818770	0.9242131	0.4131915	2.4201851	0.3979486	0.9174077	0.4337751	2.3053420	33
28	0.3821459	0.9241020	0.4135321	2.4181918	0.3982155	0.9172919	0.4341208	2.3035064	32
29	0.3824147	0.9239908	0.4138728	2.4162013	0.3984823	0.9171760	0.4344666	2.3016732	31
30	0.3826834	0.9238795	0.4142136	2.4142236	0.3987491	0.9170601	0.4348124	2.2998425	30
31	0.3829522	0.9237681	0.4145544	2.4122286	0.3990158	0.9169441	0.4351583	2.2980143	29
32	0.3832209	0.9236567	0.4148953	2.4102465	0.3992825	0.9168280	0.4355043	2.2961885	28
33	0.3834895	0.9235452	0.4152363	2.4082672	0.3995492	0.9167118	0.4358504	2.2943651	27
34	0.3837582	0.9234336	0.4155774	2.4062906	0.3998158	0.9165955	0.4361966	2.2925442	26
35	0.3840268	0.9233219	0.4159186	2.4043168	0.4000824	0.9164791	0.4365429	2.2907257	25
36	0.3842953	0.9232102	0.4162599	2.4023457	0.4003490	0.9163627	0.4368893	2.2889096	24
37	0.3845639	0 9230984	0.4166012	2.4003774	0.4006156	0.9162462	0.4372358	2.2870959	23
38	0.3848324	0.9229865	0.4169426	2.3984118	0.4008821	0.9161296	0.4375823	2.2852846	22
39	0.3851008	0.9228745	0.4172841	2.3964490	0.4011486	0.9160130	0.4379289	2.2834758	21
40	0.3853693	0.9227624	0.4176257	2.3944889	0.4014150	0.9158963	0.4382756	2.2816693	20
41	0.3856377	0.9226503	0.4179674	2 3925316	0 4016814	0.9157795	0.4386224	2.2798653	19
42	0.3859060	0.9225381	0.4183091	2.3905769	0.4019478	0.9156626	0.4389693	2.2780636	18
43	0.3861744	0.9224258	0.4186509	2.3886250	0.4022141	0 9155456	0.4393163	2.2762643	17
44	0.3864427	0.9223134	0.4189928	2.3866758	0.4024804	0.9154286	0.4396634	2.2744674	16
45	0.3867110	0.9222009	0.4193348	2.3847293	0.4027467	0.9153115	0.4400106	2.2726729	15
46	0.3869792	0.9220884	0.4196769	2.3827855	0.4030129	0.9151943	0.4403578	2.2708807	14
47	0.3872474	0.9219758	0.4200191	2.3808444	0.4032791	0.9150770	0.4407051	2.2690909	13
48	0.3875156	0.9218631	0.4203613	2.3789060	0.4035453	0.9149596	0.4410525	2.2673035	12
49	0.3877837	0.9217503	0.4207036	2.3769703	0.4038114	0.9148422	0.4414000	2.2655184	11
50	0.3880518	0.9216375	0.4210460	2.3750372	0.4040775	0.9147247	0.4417476	3.2637357	10
51	0.3883199	0.9215246	0.4213885	2.3731068	0.4043436	0.9146071	0.4420953	2.2619553	9
52	0.3885880	0.9214116	0.4217311	2.3711791	0.4046096	0.9144895	0.4424431	2.2601773	8
53	0.3888560	0.9212985	0.4220738	2.3692540	0.4048756	0.9143718	0.4427910	2.2584016	7
54	0.3891239	0.9211854	0.4224166	2.3673316	0.4051416	0.9142540	0.4431390	2.2566283	6
55	0.3893919	0.9210722	0.4227594	2.3654118	0.4054075	0.9141361	0.4434871	2.2548572	5
56	0.3896598	0.9209589	0.4231023	2.3634946	0.4056734	0.9140181	0.4438353	2.2530885	4
57	0.3899277	0.9208455	0.4234453	2.3615801	0.4059393	0.9139000	0.4441835	2.2513221	3
58	0.3901955	0.9207320	0.4237884	2.3596683	0.4062051	0.9137819	0.4445316	2.2495580	2
59	0.3904633	0.9206185	0.4241316	2.3577590	0.4064709	0.9136637	0.4448802	2.2477962	1
60	0.3907311	0.9205049	0.4244749	2.3558524	0.4067366	0.9135454	0.4452287	2.2460368	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				67 D.				66 D.	

M.	24 D. Sinus.	24 D. Cosinus.	24 D. Tangente	24 D. Cotangente	25 D. Sinus.	25 D. Cosinus.	25 D. Tangente	25 D. Cotangent	M.
0	0.4067366	0.9135454	0.4452287	2.2460368	0.4226183	0.9063078	0.4663077	2.1445069	60
1	0.4070023	0.9134271	0.4455773	2.2442796	0.4228819	0.9061848	0.4666619	2.1428793	59
2	0.4072680	0.9133087	0.4459260	2.2425247	0.4231455	0.9060617	0.4670162	2.1412537	58
3	0.4075337	0.9131902	0.4462746	2.2407721	0.4234090	0.9059386	0.4673706	2.1396301	57
4	0.4077993	0.9130716	0.4466237	2.2390218	0.4236725	0.9058154	0.4677251	2.1380085	56
5	0.4080649	0.9129529	0.4469727	2.2372738	0.4239360	0.9056921	0.4680797	2.1363889	55
6	0.4083305	0.9128342	0.4473217	2.2355280	0.4241994	0.9055688	0.4684343	2.1347714	54
7	0.4085960	0.9127154	0.4476708	2.2337845	0.4244628	0.9054454	0.4687890	2.1331559	53
8	0.4088615	0.9125965	0.4480200	2.2320433	0.4247262	0.9053219	0.4691438	2.1315423	52
9	0.4091269	0.9124775	0.4483693	2.2303043	0.4249895	0.9051983	0.4694988	2.1299308	51
10	0.4093923	0.9123584	0.4487187	2.2285676	0.4252528	0.9050746	0.4698539	2.1283213	50
11	0.4096577	0.9122393	0.4490682	2.2268331	0.4255161	0.9049509	0.4702090	2.1267137	49
12	0.4099230	0.9121201	0.4494178	2.2251009	0.4257793	0.9048271	0.4705643	2.1251082	48
13	0.4101883	0.9120008	0.4497675	2.2233709	0.4260425	0.9047032	0.4709196	2.1235046	47
14	0.4104536	0.9118814	0.4501173	2.2216432	0.4263056	0.9045792	0.4712751	2.1219030	46
15	0.4107189	0.9117620	0.4504672	2.2199177	0.4265687	0.9044551	0.4716306	2.1203034	45
16	0.4109841	0.9116425	0.4508172	2.2181944	0.4268318	0.9043310	0.4719863	2.1187057	44
17	0.4112493	0.9115229	0.4511673	2.2164733	0.4270949	0.9042068	0.4723420	2.1171101	43
18	0.4115144	0.9114032	0.4515174	2.2147545	0.4273579	0.9040825	0.4726978	2.1155164	42
19	0.4117795	0.9112835	0.4518676	2.2130379	0.4276209	0.9039582	0.4730538	2.1139246	41
20	0.4120446	0.9111637	0.4522179	2.2113234	0.4278838	0.9038338	0.4734098	2.1123348	40
21	0.4123096	0.9110438	0.4525683	2.2096112	0.4281467	0.9037093	0.4737659	2.1107470	39
22	0.4125746	0.9109238	0.4529188	2.2079012	0.4284095	0.9035847	0.4741222	2.1091611	38
23	0.4128395	0.9108038	0.4532694	2.2061934	0.4286723	0.9034600	0.4744785	2.1075771	37
24	0.4131044	0.9106837	0.4536201	2.2044878	0.4289351	0.9033353	0.4748349	2.1059951	36
25	0.4133693	0.9105635	0.4539709	2.2027843	0.4291979	0.9032105	0.4751914	2.1044150	35
26	0.4136342	0.9104432	0.4543218	2.2010831	0.4294606	0.9030856	0.4755481	2.1028369	34
27	0.4138990	0.9103228	0.4546728	2.1993840	0.4297233	0.9029606	0.4759048	2 1012607	33
28	0.4141638	0.9102024	0.4550239	2.1976871	0.4299859	0.9028356	0.4762616	2.0996864	32
29	0.4144285	0.9100819	0.4553751	2.1959923	0.4302485	0.9027105	0.4766185	7.0981140	31
30	0.4146932	0.9099613	0.4557264	2.1942997	0.4305111	0.9025853	0.4769755	2.0965436	30
31	0.4149579	0.9098406	0.4560777	2.1926093	0.4307736	0.9024600	0.4773326	2.0949751	29
32	0.4152226	0.9097198	0.4564291	2.1909210	0.4310361	0.9023347	0.4776899	2.0934084	28
33	0.4154872	0.9095990	0.4567806	2.1892349	0.4312986	0.9022092	0.4780472	2.0918437	27
34	0.4157518	0.9094781	0.4571322	2.1875510	0.4315610	0.9020838	0.4784046	2.0902809	26
35	0.4160163	0.9093571	0.4574839	2.1858691	0.4318234	0.9019582	0.4787621	2.0887200	25
36	0.4162808	0.9092361	0.4578357	2.1841894	0.4320857	0.9018325	0.4791197	2.0871610	24
37	0.4165453	0.9091150	0.4581876	2.1825119	0.4323480	0.9017068	0.4794774	2.0856039	23
38	0.4168097	0.9089938	0.4585396	2.1808364	0.4326103	0.9015810	0.4798352	2.0840486	22
39	0.4170741	0.9088725	0.4588917	2.1791631	0.4328726	0.9014551	0.4801932	2.0824953	21
40	0.4173385	0.9087511	0.4592439	2.1774920	0.4331348	0.9013291	0.4805512	2.0809438	20
41	0.4176028	0.9086297	0.4595962	2.1758229	0.4333970	0.9012031	0.4809093	2.0793942	19
42	0.4178671	0.9085082	0.4599486	2.1741559	0.4336591	0.9010770	0.4812675	2.0778465	18
43	0.4181313	0.9083866	0.4603011	2.1724911	0.4339212	0.9009508	0.4816258	2.0763007	17
44	0.4183955	0.9082649	0.4606537	2.1708283	0.4341833	0.9008245	0.4819842	2.0747567	16
45	0.4186597	0.9081432	0.4610064	2.1691677	0.4344453	0.9006982	0.4823427	2.0732146	15
46	0.4189239	0.9080214	0.4613591	2.1675091	0.4347073	0.9005718	0.4827014	2.0716743	14
47	0.4191880	0.9078995	0.4617119	2.1658527	0.4349692	0.9004453	0.4830601	2.0701359	13
48	0.4194521	0.9077775	0.4620648	2.1641983	0.4352311	0.9003187	0.4834189	2.0685993	12
49	0.4197161	0.9076554	0.4624178	2.1625460	0.4354930	0.9001921	0.4837778	2.0670646	11
50	0.4199801	0.9075333	0.4627709	2.1608958	0.4357548	0.9000654	0.4841368	2.0655318	10
51	0.4202441	0.9074111	0.4631242	2.1592476	0.4360166	0.8999386	0.4844959	2.0640008	9
52	0.4205080	0.9072888	0.4634776	2.1576015	0.4362784	0.8998117	0.4848552	2.0624716	8
53	0.4207719	0.9071664	0.4638311	2.1559575	0.4365401	0.8996848	0.4852145	2.0609442	7
54	0.4210358	0.9070440	0.4641846	2.1543156	0.4368018	0.8995578	0.4855739	2.0594187	6
55	0.4212996	0.9069215	0.4645382	2.1526757	0.4370634	0.8994307	0.4859334	2.0578950	5
56	0.4215634	0.9067989	0.4648919	2.1510378	0.4373250	0.8993035	0.4862931	2.0563732	4
57	0.4218272	0.9066762	0.4652457	2.1494020	0.4375866	0.8991762	0.4866528	2.0548531	3
58	0.4220909	0.9065535	0.4655996	2.1477683	0.4378482	0.8990489	0.4870126	2.0533349	2
59	0.4223546	0.9064307	0.4659536	2.1461366	0.4381097	0.8989215	0.4873726	2.0518184	1
60	0.4226183	0.9063078	0.4663077	2.1445069	0.4383712	0.8987940	0.4877326	2.0503038	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				65 D.				64 D.	

	26 D.				27 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.4383712	0.8987940	0.4877326	2.0503038	0.4539905	0.8910065	0.5095254	1.9626105	60
1	0.4386326	0.8986665	0.4880927	2.0487910	0.4542497	0.8908744	0.5098919	1.9612000	59
2	0.4388940	0.8985389	0.4884530	2.0472800	0.4545088	0.8907422	0.5102585	1.9597910	58
3	0.4391553	0.8984112	0.4888133	2.0457708	0.4547679	0.8906100	0.5106252	1.9583837	57
4	0.4394166	0.8982834	0.4891737	2.0442634	0.4550269	0.8904777	0.5109919	1.9569780	56
5	0.4396779	0.8981555	0.4895343	2.0427578	0.4552859	0.8903453	0.5113588	1.9555739	55
6	0.4399392	0.8980276	0.4898949	2.0412540	0.4555449	0.8902128	0.5117259	1.9541713	54
7	0.4402004	0.8978996	0.4902557	2.0397519	0.4558038	0.8900802	0.5120930	1.9527704	53
8	0.4404616	0.8977715	0.4906166	2.0382517	0.4560627	0.8899476	0.5124602	1.9513711	52
9	0.4407227	0.8976433	0.4909775	2.0367532	0.4563216	0.8898149	0.5128275	1.9499733	51
10	0.4409838	0.8975151	0.4913386	2.0352565	0.4565804	0.8896821	0.5131950	1.9485771	50
11	0.4412448	0.8973868	0.4916997	2.0337615	0.4568392	0.8895493	0.5135625	1.9471826	49
12	0.4415058	0.8972584	0.4920610	2.0322683	0.4570979	0.8894164	0.5139302	1.9457896	48
13	0.4417668	0.8971299	0.4924224	2.0307769	0.4573566	0.8892834	0.5142980	1.9443981	47
14	0.4420278	0.8970013	0.4927838	2.0292873	0.4576153	0.8891503	0.5146658	1.9430083	46
15	0.4422887	0.8968727	0.4931454	2.0277994	0.4578739	0.8890171	0.5150338	1.9416200	45
16	0.4425496	0.8967440	0.4935071	2.0263133	0.4581325	0.8888839	0.5154019	1.9402333	44
17	0.4428104	0.8966152	0.4938689	2.0248289	0.4583910	0.8887506	0.5157702	1.9388481	43
18	0.4430712	0.8964864	0.4942308	2.0233462	0.4586495	0.8886172	0.5161385	1.9374645	42
19	0.4433320	0.8963575	0.4945928	2.0218653	0.4589080	0.8884837	0.5165069	1.9360825	41
20	0.4435927	0.8962285	0.4949549	2.0203862	0.4591664	0.8883502	0.5168755	1.9347020	40
21	0.4438534	0.8960994	0.4953171	2.0189088	0.4594248	0.8882166	0.5172441	1.9333231	39
22	0.4441140	0.8959703	0.4956794	2.0174331	0.4596832	0.8880829	0.5176129	1.9319457	38
23	0.4443746	0.8958411	0.4960418	2.0159592	0.4599415	0.8879492	0.5179818	1.9305698	37
24	0.4446352	0.8957118	0.4964043	2.0144869	0.4601998	0.8878154	0.5183505	1.9291956	36
25	0.4448957	0.8955824	0.4967669	2.0130164	0.4604580	0.8876815	0.5187199	1.9278228	35
26	0.4451562	0.8954529	0.4971297	2.0115477	0.4607162	0.8875475	0.5190891	1.9264516	34
27	0.4454167	0.8953234	0.4974925	2.0100806	0.4609744	0.8874134	0.5194584	1.9250819	33
28	0.4456771	0.8951938	0.4978554	2.0086153	0.4612325	0.8872793	0.5198278	1.9237138	32
29	0.4459375	0.8950641	0.4982185	2.0071516	0.4614906	0.8871453	0.5201974	1.9223472	31
30	0.4461978	0.8949343	0.4985816	2.0056897	0.4617486	0.8870108	0.5205670	1.9209821	30
31	0.4464581	0.8948045	0.4989449	2.0042295	0.4620066	0.8868764	0.5209368	1.9196186	29
32	0.4467184	0.8946746	0.4993082	2.0027710	0.4622646	0.8867420	0.5213067	1.9182565	28
33	0.4469786	0.8945446	0.4996717	2.0013142	0.4625225	0.8866075	0.5216767	1.9168960	27
34	0.4472388	0.8944145	0.5000352	1.9998590	0.4627804	0.8864729	0.5220468	1.9155370	26
35	0.4474990	0.8942844	0.5003989	1.9984056	0.4630382	0.8863383	0.5224170	1.9141795	25
36	0.4477591	0.8941542	0.5007627	1.9969539	0.4632960	0.8862036	0.5227874	1.9128236	24
37	0.4480192	0.8940239	0.5011266	1.9955038	0.4635538	0.8860688	0.5231578	1.9114691	23
38	0.4482792	0.8938936	0.5014906	1.9940554	0.4638115	0.8859339	0.5235284	1.9101162	22
39	0.4485392	0.8937632	0.5018547	1.9926087	0.4640692	0.8857989	0.5238990	1.9087647	21
40	0.4487992	0.8936327	0.5022189	1.9911637	0.4643269	0.8856639	0.5242698	1.9074147	20
41	0.4490591	0.8935021	0.5025832	1.9897204	0.4645845	0.8855288	0.5246407	1.9060663	19
42	0.4493190	0.8933714	0.5029476	1.9882787	0.4648421	0.8853936	0.5250117	1.9047193	18
43	0.4495789	0.8932406	0.5033121	1.9868387	0.4650996	0.8852583	0.5253829	1.9033738	17
44	0.4498387	0.8931098	0.5036767	1.9854003	0.4653571	0.8851230	0.5257541	1.9020299	16
45	0.4500985	0.8929789	0.5040415	1.9839636	0.4656145	0.8849876	0.5261254	1.9006874	15
46	0.4503582	0.8928479	0.5044063	1.9825286	0.4658719	0.8848521	0.5264969	1.8993464	14
47	0.4506179	0.8927169	0.5047713	1.9810952	0.4661293	0.8847166	0.5268685	1.8980068	13
48	0.4508776	0.8925858	0.5051363	1.9796635	0.4663866	0.8845810	0.5272402	1.8966688	12
49	0.4511372	0.8924546	0.5055015	1.9782334	0.4666439	0.8844453	0.5276120	1.8953322	11
50	0.4513968	0.8923234	0.5058668	1.9768050	0.4669012	0.8843995	0.5279839	1.8939971	10
51	0.4516563	0.8921920	0.5062322	1.9753782	0.4671584	0.8841736	0.5283559	1.8926634	9
52	0.4519158	0.8920606	0.5065977	1.9759531	0.4674156	0.8840377	0.5287281	1.8913313	8
53	0.4521753	0.8919291	0.5069633	1.9725296	0.4676727	0.8839017	0.5291004	1.8900006	7
54	0.4524347	0.8917975	0.5073290	1.9711077	0.4679298	0.8837656	0.5294727	1.8886713	6
55	0.4526941	0.8916659	0.5076948	1.9696874	0.4681869	0.8836294	0.5298452	1.8873436	5
56	0.4529535	0.8915342	0.5080607	1.9682688	0.4684439	0.8834932	0.5302178	1.8860172	4
57	0.4532128	0.8914024	0.5084267	1.9668518	0.4687009	0.8833569	0.5305906	1.8846924	3
58	0.4534721	0.8912705	0.5087928	1.9654364	0.4689578	0.8832205	0.5309634	1.8833690	2
59	0.4537313	0.8911385	0.5091591	1.9640227	0.4692147	0.8830841	0.5313364	1.8820470	1
60	0.4539905	0.8910065	0.5095254	1.9626105	0.4694716	0.8829476	0.5317094	1.8807265	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Colang	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Colang.	Tangente.	M.
				63 D.				62 D.	

	28 D.				29 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangent.	Cotangent	M.
0	0.4694716	0.8829476	0.5317094	1.8807265	0.4848096	0.8746197	0.5543090	1.8040478	60
1	0.4697284	0.8828110	0.5320826	1.8794074	0.4850640	0.8744786	0.5546894	1.8028108	59
2	0.4699852	0.8826743	0.5324559	1.8780898	0.4853184	0.8743375	0.5550698	1.8015751	58
3	0.4702419	0.8825375	0.5328293	1.8767736	0.4855727	0.8741963	0.5554504	1.8003408	57
4	0.4704986	0.8824007	0.5332029	1.8754588	0.4858270	0.8740550	0.5558311	1.7991077	56
5	0.4707553	0.8822638	0.5335765	1.8741455	0.4860812	0.8739136	0.5562119	1.7978759	55
6	0.4710119	0.8821268	0.5339503	1.8728336	0.4863354	0.8737722	0.5565929	1.7966454	54
7	0.4712685	0.8819898	0.5343242	1.8715231	0.4865895	0.8736307	0.5569739	1.7954162	53
8	0.4715250	0.8818527	0.5346982	1.8702141	0.4868436	0.8734891	0.5573551	1.7941883	52
9	0.4717815	0.8817155	0·5350723	1.8689064	0.4870977	0.8733475	0.5577364	1.7929616	51
10	0.4720380	0.8815782	0.5354465	1.8676003	0.4873517	0.8732058	0.5581179	1.7917362	50
11	0.4722944	0.8814409	0.5358208	1.8662955	0.4876057	0.8730640	0.5584994	1.7905121	49
12	0.4725508	0.8813035	0.5361953	1.8649921	0.4878597	0.8729221	0.5588811	1.7892893	48
13	0.4728071	0.8811660	0.5365699	1.8636902	0.4881136	0.8727801	0.5592629	1.7880678	47
14	0.4730634	0.8810284	0.5369446	1.8623896	0.4883674	0.8726381	0.5596448	1.7868475	46
15	0.4733197	0.8808907	0.5373194	1.8610905	0.4886212	0.8724960	0.5600269	1·7856285	45
16	0.4735759	0.8807530	0.5376943	1.8597928	0.4888750	0.8723538	0.5604091	1.7844107	44
17	0.4738321	0.8806152	0.5380694	1.8584965	0.4891287	0.8722116	0.5607914	1.7831943	43
18	0.4740882	0.8804773	0.5384445	1.8572015	0.4893824	0.8720693	0.5611738	1.7819790	42
19	0.4743443	0.8803394	0.5388198	1.8559080	0.4896361	0.8719269	0.5615564	1.7807651	41
20	0.4746004	0.8802014	0.5391952	1.8546159	0.4898897	0.8717844	0.5619391	1.7795524	40
21	0.4748564	0.8800633	0.5395707	1.8533252	0.4901433	0.8716419	0.5623219	1.7783409	39
22	0.4751124	0.8799251	0.5399464	1.8520358	0.4903968	0.8714993	0.5627048	1.7771307	38
23	0.4753683	0.8797869	0.5403221	1.8507479	0.4906503	0.8713566	0.5630879	1.7759218	37
24	0.4756242	0.8796486	0.5406980	1.8494613	0.4909037	0.8712138	0.5634710	1.7747141	36
25	0.4758801	0.8795102	0.5410740	1.8481761	0.4911571	0.8710710	0.5638543	1.7735076	35
26	0.4761359	0.8793717	0.5414501	1.8468923	0.4914105	0.8709281	0.5642378	1.7723024	34
27	0.4763917	0.8792332	0.5418263	1.8456099	0.4916638	0.8707851	0.5646213	1.7710985	33
28	0.4766474	0.8790946	0.5422027	1.8443289	0.4919171	0.8706420	0.5650050	1.7698958	32
29	0.4769031	0.8789559	0.5425791	1.8430492	0.4921704	0.8704989	0.5653888	1.7686943	31
30	0.4771588	0.8788171	0.5429557	1.8417709	0.4924236	0.8703557	0.5657728	1.7674940	30
31	0.4774144	0.8786783	0.5433324	1.8404939	0.4926767	0.8702124	0.5661568	1.7662950	29
32	0.4776700	0.8785394	0.5437092	1.8392184	0.4929298	0.8700690	0.5665410	1.7650972	28
33	0.4779255	0.8784004	0.5440862	1.8379442	0.4931829	0.8699256	0.5669253	1.7639007	27
34	0.4781810	0.8782613	0.5444632	1.8366713	0.4934359	0.8697821	0.5673098	1.7627053	26
35	0.4784364	0.8781222	0.5448404	1.8353999	0.4936889	0.8696385	0.5676954	1.7615112	25
36	0.4786918	0.8779830	0.5452177	1.8341297	0.4939419	0.8694949	0.5680791	1.7603183	24
37	0.4789472	0.8778437	0.5455951	1.8328610	0.4941948	0.8693512	0.5684639	1.7591267	23
38	0.4792026	0.8777043	0.5459726	1.8315936	0.4944477	0.8692074	0.5688488	1.7579362	22
39	0.4794579	0.8775649	0.5463503	1.8303275	0.4947005	0.8690635	0.5692339	1.7567470	21
40	0.4797131	0.8774254	0.5467281	1.8290628	0.4949533	0.8689196	0.5696191	1.7555590	20
41	0.4799683	0.8772858	0.5471060	1.8277994	0.4952060	0.8687756	0.5700045	1.7543722	19
42	0.4802235	0.8771461	0.5474840	1.8265374	0.4954587	0.8686315	0.5703899	1.7531866	18
43	0.4804786	0.8770064	0.5478621	1.8252767	0.4957113	0.8684873	0.5707755	1.7520023	17
44	0.4807337	0.8768666	0.5482404	1.8240173	0.4959639	0.8683431	0.5711612	1.7508191	16
45	0.4809888	0.8767267	0.5486188	1.8227593	0.4962165	0.8681988	0.5715471	1.7496371	15
46	0.4812438	0.8765868	0 5489973	1.8215026	0.4964690	0.8680544	0.5719331	1.7484564	14
47	0.4814988	0.8764468	0·5493759	1.8202473	0.4967215	0.8679100	0.5723192	1.7472768	13
48	0.4817537	0.8763067	0·5497546	1.8189932	0.4969740	0.8677655	0.5727054	1.7460984	12
49	0.4820086	0.8761665	0.5501335	1.8177405	0.4972264	0.8676209	0.5730918	1.7449213	11
50	0.4822634	0.8760262	0.5505125	1.8164892	0.4974787	0.8674762	0.5734783	1.7437453	10
51	0.4825182	0.8758859	0.5508916	1.8152391	0.4977310	0.8673314	0.5738649	1.7425705	9
52	0.4827730	0.8757455	0.5512708	1.8139904	0.4979833	0.8671866	0.5742516	1.7413969	8
53	0.4830277	0.8756050	0.5516502	1.8127430	0.4982355	0.8670417	0.5746385	1.7402245	7
54	0.4832824	0.8754645	0.5520297	1.8114969	0.4984877	0.8668967	0.5750255	1.7390533	6
55	0.4835370	0.8753239	0.5524093	1.8102521	0.4987399	0.8667517	0.5754126	1.7378833	5
56	0.4837916	0.8751832	0.5527890	1.8090086	0.4989920	0.8666066	0.5757999	1.7367144	4
57	0.4840462	0.8750424	0.5531688	1.8077664	0.4992441	0.8664614	0.5761873	1.7355468	3
58	0.4843007	0.8749016	0.5535488	1.8065256	0.4994961	0.8663161	0.5765748	1.7343803	2
59	0.4845552	0.8747607	0.5539288	1.8052860	0.4997481	0.8661708	0.5769625	1.7332149	1
60	0.4848096	0.8746197	0.5543090	1.8040478	0.5000000	0.8660254	0.5773503	1.7320508	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus..	Sinus.	Cotaug.	Tangente.	M.
				61 D.				60 D.	

	30 D.				31 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.5000000	0.8660254	0.5773503	1.7320508	0.5150381	0.8571673	0.6008606	1.6642795	60
1	0.5002519	0.8658799	0.5777382	1.7308878	0.5152874	0.8570174	0.6012566	1.6631834	59
2	0.5005038	0.8657343	0.5781262	1.7297260	0.5155367	0.8568675	0.6016527	1.6620884	58
3	0.5007556	0.8655887	0.5785144	1.7285654	0.5157859	0.8567175	0.6020490	1.6609945	57
4	0.5010074	0.8654430	0.5789027	1.7274060	0.5160351	0.8565674	0.6024454	1.6599016	56
5	0.5012591	0.8652972	0.5792911	1.7262477	0.5162842	0.8564173	0.6028419	1.6588097	55
6	0.5015108	0.8651514	0.5796797	1.7250905	0.5165333	0.8562671	0.6032386	1.6577189	54
7	0.5017624	0.8650055	0.5800684	1.7239345	0.5167824	0.8561168	0.6036354	1.6566292	53
8	0.5020140	0.8648595	0.5804573	1.7227797	0.5170314	0.8559664	0.6040323	1.6555405	52
9	0.5022655	0.8647134	0.5808462	1.7216261	0.5172804	0.8558160	0.6044294	1.6544529	51
10	0.5025170	0.8645673	0.5812353	1.7204736	0.5175293	0.8556655	0.6048266	1.6533663	50
11	0.5027685	0.8644211	0.5816245	1.7193222	0.5177782	0.8555149	0.6052240	1.6522808	49
12	0.5030199	0.8642748	0.5820139	1.7181720	0.5180270	0.8553642	0.6056215	1.6511963	48
13	0.5032713	0.8641284	0.5824034	1.7170230	0.5182758	0.8552135	0.6060192	1.6501128	47
14	0.5035227	0.8639820	0.5827930	1.7158751	0.5185246	0.8550627	0.6064170	1.6490304	46
15	0.5037740	0 8638355	0.5831828	1.7147283	0.5187733	0.8549118	0.6068149	1.6479490	45
16	0.5040253	0.8636889	0.5835727	1.7135827	0.5190219	0.8547609	0.6072130	1.6468686	44
17	0.5042765	0.8635423	0.5839627	1.7124382	0.5192705	0 8546099	0.6076112	1.6457893	43
18	0.5045277	0.8633956	0.5843528	1.7112949	0.5195191	0.8544588	0 6080095	1.6147111	42
19	0.5047788	0.8632488	0.5847431	1.7101527	0.5197676	0.8543076	0.6084080	1.6436338	41
20	0.5050299	0.8631019	0.5851335	1.7090116	0.5200161	0.8541564	0.6088067	1.6425576	40
21	0.5052809	0.8629549	0.5855241	1.7078717	0.5202646	0.8540050	0.6092054	1.6414824	39
22	0.5055319	0.8628079	0.5859148	1.7067329	0.5205130	0.8538537	0.6096043	1.6404082	38
23	0.5057828	0.8626608	0.5863056	1.7055953	0.5207613	0.8537023	0.6100034	1.6393351	37
24	0.5060337	0.8625136	0.5866965	1.7044587	0.5210096	0.8535508	0.6104026	1.6382630	36
25	0.5062846	0.8623664	0.5870876	1.7033233	0.5212579	0.8533992	0.6108019	1.6371919	35
26	0.5065355	0.8622191	0.5874788	1.7021890	0.5215061	0.8532475	0.6112014	1.6361218	34
27	0.5067863	0.8620717	0.5878702	1.7010559	0.5217543	0.8530958	0.6116011	1.6350528	33
28	0.5070370	0.8619243	0.5882617	1.6999238	0.5220024	0.8529440	0.6120008	1.6339847	32
29	0.5072877	0.8617768	0.5886533	1.6987929	0.5222505	0.8527921	0.6124007	1.6329177	31
30	0.5075384	0.8616292	0.5890450	1.6976631	0.5224986	0.8526402	0.6128008	1.6318517	30
31	0.5077890	0.8614815	0.5894369	1.6965344	0.5227466	0.8524881	0.6132010	1.6307867	29
32	0.5080396	0.8613337	0.5898289	1.6954069	0.5229945	0.8523360	0.6136013	1.6297227	28
33	0.5082901	0.8611859	0.5902211	1.6942804	0.5232424	0.8521838	0.6140018	1.6286597	27
34	0.5085406	0 8610380	0.5906134	1.6931550	0.5234903	0.8520316	0.6144024	1.6275977	26
35	0.5087910	0.8608900	0.5910058	1.6920308	0.5237381	0.8518793	0.6148032	1.6265368	25
36	0.5090414	0.8607420	0.5913983	1.6909077	0.5239859	0.8517269	0.6152041	1.6254768	24
37	0.5092918	0.8605939	0.5917910	1.6897856	0.5242336	0.8515744	0.6156052	1.6244178	23
38	0.5095421	0.8604457	0.5921839	1.6886647	0.5244815	0.8514219	0.6160064	1.6233599	22
39	0.5097924	0.8602975	0.5925768	1.6875449	0.5247290	0.8512693	0.6164077	1.6223029	21
40	0.5100426	0·8601491	0.5929699	1.6864261	0.5249766	0.8511166	0.6168092	1.6212469	20
41	0.5102928	0.8600007	0.5933632	1.6853085	0.5252241	0.8509039	0.6172108	1.6201920	19
42	0.5105429	0.8598523	0.5937566	1.6841919	0.5254716	0.8508111	0.6176126	1.6191380	18
43	0.5107930	0.8597037	0.5941501	1.6830765	0.5257191	0.8506582	0.6180145	1.6180850	17
44	0.5110431	0.8595551	0.5945437	1.6819621	0.5259665	0.8505052	0.6184166	1.6170330	16
45	0.5112931	0.8594064	0.5949375	1.6808489	0.5262139	0.8503522	0.6188188	1.6159820	15
46	0.5115431	0.8592576	0.5953314	1.6797367	0.5264612	0.8501991	0.6192211	1.6149320	14
47	0.5117930	0.8591088	0.5957254	1.6786256	0.5267085	0.8500459	0.6196236	1.6138829	13
48	0.5120429	0.8589599	0.5961196	1.6775156	0.5269558	0.8498927	0.6200263	1.6128349	12
49	0.5122927	0.8588109	0.5965140	1.6764067	0.5272030	0.8497394	0.6204291	1.6117878	11
50	0.5125425	0.8586618	0.5969084	1.6752988	0.5274502	0.8495860	0.6208320	1.6107417	10
51	0.5127922	0.8585127	0.5973030	1.6741921	0.5276973	0.8494325	0.6212351	1.6096966	9
52	0.5130419	0.8583635	0.5976978	1.6730864	0.5279444	0.8492790	0.6216383	1.6086525	8
53	0.5132916	0.8582142	0.5980927	1.6719818	0.5281914	0.8491254	0.6220417	1.6076094	7
54	0.5135412	0.8580649	0.5984877	1.6708782	0.5284384	0.8489717	0.6224452	1.6065672	6
55	0.5137908	0.8579155	0.5988828	1.6697758	0.5286853	0.8488179	0.6228488	1.6055260	5
56	0.5140404	0.8577660	0.5992781	1.6686744	0.5289322	0.8486641	0.6232526	1.6044858	4
57	0.5142899	0.8576164	0.5996735	1.6675741	0.5291790	0.8485102	0.6236566	1.6034465	3
58	0.5145393	0.8574668	0.6000691	1.6664748	0.5294258	0.8483562	0.6240607	1 6024082	2
59	0.5147887	0.8573171	0.6004648	1.6653766	0.5296726	0.8482022	0.6244650	1.6013709	1
60	0.5150381	0.8571673	0.6008606	1.6642795	0.5299193	0.8480481	0.6248694	1.6003345	0
M	Cosinus.	Sinus	Cotang.	Tangente	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				59 D.				58 D.	

	32 D.				33 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.5299193	0.8480481	0.6248694	1.6003345	0.5446390	0.8386706	0.6494076	1.5398650	60
1	0.5301659	0.8478939	0.6252739	1.5992991	0.5448830	0.8385121	0·6498212	1.5388848	59
2	0.5304125	0.8477397	0.6256786	1.5982647	0.5451269	0.8383536	0.6502350	1.5379055	58
3	0.5306591	0.8475853	0.6260834	1.5972312	0.5453707	0 8381950	0.6506490	1.5369270	57
4	0.5309056	0.8474309	0.6264884	1 5961987	0.5456145	0.8380363	0.6510631	1.5359494	56
5	0.5311521	0.8472764	0.6268935	1.5951672	0.5458583	0.8378775	0.6514774	1.5349727	55
6	0.5313986	0.8471219	0.6272988	1.5941366	0.5461020	0.8377187	0.6518918	1.5339969	54
7	0.5316450	0.8469673	0.6277042	1.5931070	0.5463456	0.8375598	0.6523064	1.5330220	53
8	0.5318913	0.8468126	0.6281098	1 5920783	0 5465892	0.8374008	0.6527211	1.5320479	52
9	0.5321376	0.8466578	0.6285156	1.5910505	0.5468328	0.8372418	0.6531360	1.5310747	51
10	0.5323839	0.8465030	0.6289215	1.5900238	0.5470763	0.8370827	0.6535511	1.5301023	50
11	0.5326301	0.8463481	0.6293275	1.5889979	0.5473198	0.8369235	0.6539663	1.5291308	49
12	0.5328763	0.8461931	0.6297336	1.5879730	0.5475632	0.8367643	0.6543817	1.5281602	48
13	0.5331224	0.8460381	0.6301399	1.5869491	0.5478066	0.8366050	0.6547972	1.5271904	47
14	0.5333685	0.8458830	0.6305464	1.5859261	0.5480499	0.8364456	0.6552129	1.5262215	46
15	0.5336145	0.8457278	0.6309530	1.5849041	0.5482932	0.8362861	0.6556287	1.5252535	45
16	0.5338605	0.8455725	0.6313598	1.5838830	0.5485365	0.8361266	0.6560447	1.5242863	44
17	0.5341064	0.8454172	0.6317667	1.5828628	0.5487797	0.8359670	0.6564609	1.5233200	43
18	0.5343523	0.8452618	0.6321738	1.5818436	0.5490228	0.8358073	0.6568772	1.5223545	42
19	0.5345982	0.8451063	0.6325810	1.5808253	0.5492659	0.8356476	0.6572937	1.5213899	41
20	0.5348440	0.8449508	0.6329883	1.5798079	0.5495090	0.8354878	0.6577103	1.5204261	40
21	0.5350898	0.8447952	0.6333958	1.5787915	0.5497520	0.8353279	0.6581271	1.5194632	39
22	0.5353355	0.8446395	0.6338035	1.5777760	0.5499950	0.8351680	0.6585441	1.5185012	38
23	0.5355812	0.8444837	0.6342113	1.5767615	0.5502379	0.8350080	0.6589612	1.5175400	37
24	0.5358268	0.8443279	0.6346193	1.5757479	0.5504808	0.8348479	0.6593785	1.5165796	36
25	0.5360724	0.8441720	0.6350274	1.5747352	0.5507236	0.8346877	0.6597959	1.5156201	35
26	0.5363179	0.8440160	0.6354357	1.5737234	0.5509664	0.8345275	0.6602135	1.5146614	34
27	0.5365634	0.8438600	0.6358441	1.5727126	0.5512091	0.8343672	0.6606313	1.5137036	33
28	0.5368088	0.8437039	0.6362527	1.5717026	0.5514518	0.8342068	0.6610492	1.5127466	32
29	0.5370542	0.8435477	0.6366614	1.5706936	0.5516944	0.8340463	0.6614673	1.5117905	31
30	0.5372996	0.8433914	0.6370703	1.5696856	0.5519370	0.8338858	0.6618856	1.5108352	30
31	0.5375449	0.8432351	0.6374793	1.5686784	0.5521795	0.8337252	0.6623040	1.5098807	29
32	0.5377902	0.8430787	0.6378885	1.5676722	0.5524220	0.8335645	0.6627226	1.5089271	28
33	0.5380354	0.8429222	0.6382978	1.5666669	0.5526645	0.8334038	0.6631413	1.5079743	27
34	0.5382806	0.8427657	0.6387073	1.5656625	0.5529069	0.8332430	0.6635602	1.5070224	26
35	0.5385357	0.8426091	0.6391169	1.5646590	0.5531492	0.8330821	0.6639792	1.5060713	25
36	0.5387708	0.8424524	0.6395267	1.5636564	0.5533915	0.8329212	0.6643984	1.5051210	24
37	0.5390158	0.8422956	0.6399366	1.5626548	0.5536338	0.8327602	0.6648178	1.5041716	23
38	0.5392608	0.8421388	0.6403467	1.5616540	0.5538760	0.8325991	0.6652373	1.5032230	22
39	0.5395058	0.8419819	0.6407569	1.5606542	0.5541182	0.8324380	0.6656570	1.5022752	21
40	0.5397507	0.8418249	0.6411673	1.5596552	0.5543603	0.8322768	0.6660769	1.5013282	20
41	0.5399955	0.8416679	0.6415779	1.5586572	0.5546024	0.8321155	0.6664969	1.5003820	19
42	0.5402403	0.8415108	0.6419880	1.5576601	0.5548444	0.8319541	0.6669171	1.4994367	18
43	0.5404851	0.8413536	0.6423995	1.5566639	0.5550864	0.8317927	0.6673375	1.4984922	17
44	0.5407298	0.8411963	0.6428105	1.5556685	0.5553283	0.8316312	0.6677580	1.4975486	16
45	0.5409745	0.8410390	0.6432216	1.5546741	0.5555702	0.8314696	0.6681787	1.4966058	15
46	0.5412191	0.8408816	0.6436329	1.5536806	0.5558121	0.8313079	0.6685995	1·4956638	14
47	0.5414637	0.8407241	0.6440444	1.5526880	0.5560539	0.8311462	0.6690205	1.4947226	13
48	0.5417082	0.8405666	0.6444560	1 5516963	0.5562956	0.8309844	0.6694417	1.4937822	12
49	0.5419527	0.8404090	0.6448678	1.5507054	0.5565373	0.8308226	0.6698630	1.4928426	11
50	0.5421971	0.8402513	0.6452797	1.5497155	0.5567790	0.8306607	0.6702845	1.4919038	10
51	0.5424415	0.8400935	0.6456918	1.5487264	0.5570206	0.8304987	0.6707062	1.4909659	9
52	0.5426859	0.8399357	0.6461041	1.5477383	0.5572621	0.8303366	0.6711280	1.4900288	8
53	0.5429302	0.8397778	0.6465165	1.5467510	0.5575036	0.8301745	0.6715500	1.4890925	7
54	0.5431744	0.8396198	0.6469290	1.5457646	0.5577451	0.8300123	0.6719721	1.4881570	6
55	0.5434186	0.8394618	0.6473417	1.5447792	0.5579865	0.8298500	0.6723944	1.4872223	5
56	0.5436628	0.8393037	0.6477546	1.5437946	0.5582279	0.8296876	0.6728169	1.4862884	4
57	0.5439069	0.8391455	0.6481676	1.5428108	0.5584692	0.8295252	0.6732396	1.4853553	3
58	0.5441510	0.8389873	0.6485808	1.5418280	0.5587105	0.8293627	0.6736624	1.4844230	2
59	0.5443950	0.8388290	0.6489941	1.5408460	0.5589517	0.8292002	0.6740854	1.4834916	1
60	0.5446390	0.8386706	0.6494076	1.5398650	0.5591929	0.8290376	0.6745085	1.4825610	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				57 D.				56 D.	

	34 D.				35 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.5591929	0.8290376	0.6745085	1.4825610	0.5735764	0.8191521	0.7002075	1.4281480	60
1	0.5594340	0.8288749	0.6749318	1.4816311	0.5738147	0.8189852	0.7006411	1.4272642	59
2	0.5596751	0.8287121	0.6753553	1.4807021	0.5740529	0.8188182	0.7010749	1.4263811	58
3	0.5599161	0.8285493	0.6757790	1.4797738	0.5742911	0.8186512	0.7015089	1.4254987	57
4	0.5601571	0.8283864	0.6762028	1.4788463	0.5745292	0.8184841	0.7019430	1.4246171	56
5	0.5603981	0.8282234	0.6766268	1.4779197	0.5747672	0.8183169	0.7023773	1.4237362	55
6	0.5606390	0.8280603	0.6770509	1.4769938	0.5750052	0.8181497	0.7028118	1.4228561	54
7	0.5608798	0.8278972	0.6774752	1.4760688	0.5752432	0.8179824	0.7032465	1.4219766	53
8	0.5611206	0.8277340	0.6778997	1.4751445	0.5754811	0.8178150	0.7036813	1.4210979	52
9	0.5613614	0.8275707	0.6783244	1.4742210	0.5757190	0.8176476	0.7041163	1 4202200	51
10	0.5616021	0.8274074	0.6787492	1.4732983	0.5759568	0.8174801	0.7045515	1.4193427	50
11	0.5618428	0.8272440	0.6791742	1.4723764	0.5761946	0.8173125	0.7049869	1.4184662	49
12	0.5620834	0.8270805	0.6795993	1.4714553	0.5764323	0.8171449	0.7054224	1.4175904	48
13	0.5623239	0.8269170	0.6800246	1.4705350	0.5766700	0.8169772	0.7058581	1.4167153	47
14	0.5625644	0.8267534	0.6804501	1.4696155	0.5769076	0.8168094	0.7062940	1.4158409	46
15	0.5628049	0.8265897	0.6808758	1.4686967	0.5771452	0.8166415	0.7067301	1.4149673	45
16	0.5630453	0.8264260	0.6813016	1.4677787	0.5773827	0.8164736	0.7071664	1.4140943	44
17	0.5632857	0.8262622	0.6817276	1.4668616	0 5776202	0.8163056	0.7076029	1.4132221	43
18	0.5635260	0.8260983	0.6821538	1.4659452	0.5778576	0.8161376	0.7080395	1.4123506	42
19	0.5637663	0.8259343	0.6825801	1.4650296	0.5780950	0 8159695	0.7084763	1.4114799	41
20	0.5640065	0.8257703	0.6830066	1.4641147	0.5783323	0.8158013	0.7089133	1.4106098	40
21	0.5642467	0.8256062	0.6834333	1.4632007	0.5785696	0.8156330	0.7093505	1.4097405	39
22	0.5644869	0.8254420	0.6838601	1.4622874	0.5788068	0.8154647	0.7097878	1.4088718	38
23	0.5647270	0.8252778	0.6842871	1.4613749	0.5790440	0.8152963	0.7102253	1.4080039	37
24	0.5649670	0.8251135	0.6847143	1.4604632	0.5792812	0.8151278	0.7106630	1.4071367	36
25	0.5652070	0.8249491	0.6851417	1.4595522	0.5795183	0.8149593	0.7111009	1.4062702	35
26	0.5654469	0.8247847	0.6855692	1.4586420	0.5797553	0.8147906	0.7115390	1.4054044	34
27	0.5656868	0.8246202	0.6859909	1.4577326	0.5799923	0.8146219	0.7119773	1.4045393	33
28	0.5659267	0.8244556	0.6864247	1.4568240	0.5802292	0.8144532	0.7124157	1.4036749	32
29	0.5661665	0.8242909	0.6868527	1.4559161	0.5804661	0.8142844	0.7128543	1.4028113	31
30	0 5664062	0.8241262	0 6872810	1.4550090	0.5807030	0.8141155	0.7132931	1.4019483	30
31	0.5666459	0.8239614	0.6877094	1.4541027	0.5809398	0.8139465	0.7137321	1.4010860	29
32	0.5668856	0.8237965	0.6881379	1.4531971	0.5811765	0.8137775	0.7141713	1.4002245	28
33	0.5671252	0.8236316	0.6885666	1.4522923	0.5814132	0.8136084	0.7146106	1.3993636	27
34	0.5673648	0.8234666	0.6889955	1.4513883	0.5816498	0.8134393	0.7150501	1.3985034	26
35	0.5676043	0.8233015	0.6894246	1.4504850	0.5818864	0.8132701	0.7154898	1.3976440	25
36	0.5678437	0.8231364	0.6898538	1.4495825	0.5821230	0 8131008	0.7159297	1.3967852	24
37	0.5680831	0 8229712	0.6902832	1.4486808	0.5823595	0.8129314	0.7163698	1.3959272	23
38	0.5683225	0.8228059	0.6907128	1.4477798	0.5825959	0.8127620	0.7168101	1.3950698	22
39	0.5685618	0.8226405	0.6911425	1.4468796	0.5828323	0.8125925	0.7172505	1.3942131	21
40	0.5688011	0.8224751	0.6915724	1.4459801	0.5830687	0.8124229	0.7176911	1.3933571	20
41	0.5690403	0.8223096	0.6920025	1.4450814	0.5833050	0.8122532	0.7181319	1.3925018	19
42	0.5692795	0.8221440	0.6924328	1.4441834	0.5835412	0.8120835	0.7185729	1.3916473	18
43	0.5695186	0.8219784	0.6928633	1.4432862	0.5837774	0.8119137	0.7190141	1.3907934	17
44	0.5697577	0.8218127	0.6932939	1.4423897	0.5840136	0.8117439	0.7194555	1.3899401	16
45	0.5699968	0.8216469	0.6937247	1.4414940	0.5842497	0.8115740	0.7198970	1.3890876	15
46	0.5702358	0.8214811	0.6941557	1.4405991	0.5844857	0.8114040	0.7203387	1.3882358	14
47	0.5704747	0.8213152	0.6945868	1.4397049	0.5847217	0.8112339	0.7207806	1.3873846	13
48	0.5707136	0.8211492	0.6950181	1.4388114	0.5849577	0.8110638	0.7212227	1.3865342	12
49	0.5709524	0.8209831	0.6954496	1.4379187	0.5851936	0.8108936	0.7216650	1.3856844	11
50	0.5711912	0.8208170	0.6958813	1.4370268	0.5854294	0.8107233	0.7221075	1.3848353	10
51	0.5714299	0.8206508	0.6963131	1.4361356	0.5856652	0.8105530	0.7225502	1.3839869	9
52	0.5716686	0.8204846	0.6967451	1.4352451	0.5859010	0.8103826	0.7229931	1.3831392	8
53	0.5719073	0.8208183	0.6971773	1.4343554	0.5861367	0.8102121	0.7234361	1.3822922	7
54	0.5721459	0.8201519	0.6976097	1.4334664	0.5863724	0.8100416	0.7238793	1.3814458	6
55	0.5723844	0.8199854	0.6980422	1.4325781	0.5866080	0.8098710	0.7243227	1.3806001	5
56	0.5726229	0.8198189	0.6984749	1.4316906	0.5868435	0.8097003	0.7247663	1.3797551	4
57	0.5728614	0.8196523	0.6989078	1.4308039	0.5870790	0.8095296	0.7252101	1.3789108	3
58	0.5730998	0.8194856	0.6993409	1.4299178	0.5873145	0.8093588	0.7256541	1.3780672	2
59	0.5733381	0.8193189	0.6997741	1.4290326	0.5875499	0.8091879	0.7260983	1.3772242	1
60	0.5735764	0.8191521	0.7002075	1.4281480	0.5877853	0.8090170	0.7265426	1.3763819	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				55 D.				54 D.	

	36 D.				37 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangent.	Cotangent	M.
0	0.5877853	0.8090170	0.7265426	1.3763819	0.6018150	0.7986355	0.7535540	1.3270448	60
1	0.5880206	0.8088460	0.7269871	1.3755403	0.6020473	0.7984604	0.7540102	1.3262420	59
2	0.5882558	0.8086749	0.7274318	1.3746994	0.6022795	0.7982852	0.7544666	1.3254397	58
3	0.5884910	0.8085037	0.7278767	1.3738591	0.6025117	0.7981100	0.7549232	1.3246381	57
4	0.5887262	0.8083325	0.7283218	1.3730195	0.6027439	0.7979347	0.7553799	1.3238371	56
5	0.5889613	0.8081612	0.7287671	1.3721805	0.6029760	0.7977593	0.7558369	1.3230368	55
6	0.5891964	0.8079899	0.7292126	1.3713423	0.6032080	0.7975839	0.7562941	1.3222370	54
7	0.5894314	0.8078185	0.7296582	1.3705047	0.6034400	0.7974084	0.7567514	1.3214379	53
8	0.5896663	0.8076470	0.7301040	1.3696678	0.6036719	0.7972328	0.7572090	1.3206393	52
9	0.5899012	0.8074754	0.7305501	1.3688315	0.6039038	0.7970572	0.7576668	1.3198414	51
10	0.5901361	0.8073038	0.7309963	1.3679959	0.6041356	0.7968815	0.7581248	1.3190441	50
11	0.5903709	0.8071321	0.7314427	1.3671610	0.6043674	0.7967057	0.7585829	1.3182474	49
12	0.5906057	0.8069603	0.7318894	1.3663267	0.6045991	0.7965299	0.7590413	1.3174513	48
13	0.5908404	0.8067885	0.7323362	1.3654931	0.6048308	0.7963540	0.7594999	1.3166559	47
14	0.5910750	0.8066166	0.7327831	1.3646602	0.6050624	0.7961780	0.7599587	1.3158610	46
15	0.5913096	0.8064446	0.7332303	1.3638279	0.6052940	0.7960020	0.7604177	1.3150668	45
16	0.5915442	0.8062726	0.7336777	1.3629963	0.6055255	0.7958259	0.7608769	1.3142731	44
17	0.5917787	0.8061005	0.7341253	1.3621653	0.6057570	0.7956497	0.7613363	1.3134801	43
18	0.5920132	0.8059283	0.7345730	1.3613350	0.6059884	0.7954735	0.7617959	1.3126876	42
19	0.5922476	0.8057560	0.7350210	1.3605054	0.6062198	0.7952972	0.7622557	1.3118958	41
20	0.5924819	0.8055837	0.7354691	1.3596764	0.6064511	0.7951208	0.7627157	1.3111046	40
21	0.5927162	0.8054113	0.7359174	1.3588481	0.6066823	0.7949443	0.7631759	1.3103140	39
22	0.5929505	0.8052389	0.7363660	1.3580204	0.6069135	0.7947678	0.7636363	1.3095239	38
23	0.5931847	0.8050664	0.7368147	1.3571934	0.6071447	0.7945912	0.7640969	1.3087345	37
24	0.5934189	0.8048938	0.7372636	1.3563670	0.6073758	0.7944146	0.7645577	1.3079457	36
25	0.5936530	0.8047211	0.7377127	1.3555413	0.6076069	0.7942379	0.7650188	1.3071575	35
26	0.5938871	0.8045484	0.7381620	1.3547162	0.6078379	0.7940611	0.7654800	1.3063699	34
27	0.5941211	0.8043756	0.7386115	1.3538918	0.6080689	0.7938843	0.7659414	1.3055828	33
28	0.5943550	0.8042028	0.7390611	1.3530680	0.6082998	0.7937074	0.7664031	1.3047964	32
29	0.5945889	0.8040299	0.7395110	1.3522449	0.6085306	0.7935304	0.7668649	1.3040106	31
30	0.5948228	0.8038569	0.7399611	1.3514224	0.6087614	0.7933533	0.7673270	1.3032254	30
31	0.5950566	0.8036838	0.7404114	1.3506006	0.6089922	0.7931762	0.7677893	1.3024407	29
32	0.5952903	0.8035107	0.7408618	1.3497794	0.6092229	0.7929990	0.7682517	1.3016567	78
33	0.5955240	0.8033375	0.7413124	1.3489589	0.6094535	0.7928218	0.7687144	1.3008732	27
34	0.5957577	0.8031642	0.7417633	1.3481390	0.6096841	0.7926445	0.7691773	1.3000904	26
35	0.5959913	0.8029909	0.7422143	1.3473197	0 6099147	0.7924671	0.7696404	1.2993081	25
36	0.5962249	0.8028175	0.7426655	1.3465011	0.6101452	0.7922896	0.7701037	1.2985265	24
37	0.5964584	0.8026440	0.7431170	1.3456832	0.6103756	0.7921121	0.7705672	1.2977454	23
38	0.5966918	0.8024705	0.7435686	1.3448658	0.6106060	0.7919345	0.7710309	1.2969649	22
39	0.5969252	0.8022969	0.7440204	1.3440492	0.6108363	0.7917569	0.7714948	1.2961850	21
40	0.5971586	0.8021232	0.7444724	1.3432331	0.6110666	0.7915792	0.7719589	1.2954057	20
41	0.5973919	0.8019494	0.7449246	1.3424177	0.6112968	0.7914014	0.7724233	1.2946269	19
42	0.5976251	0.8017756	0.7453770	1.3416029	0.6115270	0.7912235	0.7728879	1.2938488	18
43	0.5978583	0.8016017	0.7458296	1.3407888	0.6117572	0.7910456	0.7733526	1.2930712	17
44	0.5980915	0.8014278	0.7462824	1.3399753	0.6119873	0.7908676	0.7738175	1.2922943	16
45	0.5983246	0.8012538	0.7467354	1.3391624	0.6122173	0.7906896	0.7742827	1.2915179	15
46	0.5985576	0.8010797	0.7471886	1.3383502	0.6124473	0.7905115	0.7747481	1.2907421	14
47	0.5987906	0.8009056	0.7476420	1.3375386	0.6126772	0.7903333	0.7752137	1.2899669	13
48	0.5990236	0.8007314	0.7480956	1.3367276	0.6129071	0.7901550	0.7756795	1.2891922	12
49	0.5992565	0.8005571	0.7485494	1.3359172	0.6131369	0.7899767	0.7761455	1·2884182	11
50	0.5994893	0.8003827	0.7490033	1.3351075	0.6133666	0.7897983	0.7766117	1.2876447	10
51	0.5997221	0.8002083	0.7494575	1.3342984	0.6135963	0.7896198	0.7770782	1.2868718	9
52	0.5999549	0.8000338	0.7499119	1.3334900	0.6138260	0.7894413	0.7775448	1.2860995	8
53	0.6001876	0.7998593	0·7503665	1.3326822	0.6140556	0.7892627	0.7780117	1.2853277	7
54	0.6004202	0.7996847	0.7508212	1.3318749	0.6142852	0.7890841	0.7784788	1.2845566	6
55	0.6006528	0.7995100	0.7512762	1.3310684	0.6145147	0.7889054	0.7789460	1.2837860	5
56	0.6008853	0.7993352	0.7517314	1.3302624	0.6147442	0.7887266	0.7794135	1.2830160	4
57	0.6011178	0.7991604	0.7521867	1.3294971	0.6149736	0.7885477	0.7798812	1.2822466	3
58	0.6013503	0.7989855	0.7526423	1.3286524	0.6152029	0.7883688	0.7803492	1.2814776	2
59	0.6015827	0.7988105	0.7530981	1.3278483	0.6154322	0.7881898	0.7808173	1.2807093	1
60	0.6018150	0.7986355	0.7535540	1.3270448	0.6156615	0.7880107	0.7812856	1.2799416	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				53 D.				52 D.	

38 D. | 39 D.

M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangent.	Cotangent	M.
0	0.6156615	0.7880107	0.7812856	1.2799416	0.6293204	0.7771460	0.8097840	1.2348972	60
1	0.6158907	0.7878316	0.7817542	1.2791745	0.6295464	0.7769629	0.8102658	1.2341629	59
2	0.6161198	0.7876524	0.7822229	1.2 84079	0.6297724	0.7767797	0.8107478	1.2334292	58
3	0.6163489	0.7874732	0.7826919	1.2776419	0.6299983	0.7765965	0.8112300	1.2326961	57
4	0.6165779	0.7872939	0.7831611	1.2768764	0.6302242	0.7764142	0.8117124	1.2319634	56
5	0.6168069	0.7871145	0.7836305	1.2761116	0.6304500	0.7762298	0.8121951	1.2312313	55
6	0.6170359	0.7869350	0.7841002	1.2753473	0.6306758	0.7760464	0.8126780	1.2304997	54
7	0.6172648	0.7867555	0.7845700	1.2745836	0.6309015	0.7758629	0.8131611	1.2297687	53
8	0.6174936	0.7865759	0.7850400	1.2738204	0.6311272	0.7756794	0.8136444	1 2290381	52
9	0.6177224	0.7863962	0.7855103	1.2730578	0.6313528	0.7754958	0.8141280	1.2283081	51
10	0.6179511	0.7862165	0.7859878	1.2722957	0.6315784	0.7753121	0.8146118	1.2275786	50
11	0.6181798	0.7860367	0.7864515	1.2715342	0.6318039	0.7751283	0.8150958	1.2268496	49
12	0.6184084	0.7858569	0.7869224	1.2707733	0.6320293	0.7749445	0.8155801	1.2261211	48
13	0.6186370	0.7856770	0.7873935	1 2700130	0.6322547	0.7747606	0.8160646	1.2253932	47
14	0.6188655	0.7854970	0.7878649	1.2692532	0.6324800	0.7745767	0.8165493	1.2246658	46
15	0.6190940	0.7853169	0.7883364	1.2684939	0.6327053	0.7743927	0.8170343	1.2239389	45
16	0.6193224	0.7851368	0.7888082	1.2677353	0.6329305	0.7742086	0.8175195	1.2232125	44
17	0.6195507	0.7849566	0.7892802	1.2669772	0.6331557	0.7740244	0.8180049	1.2224866	43
18	0.6197790	0.7847764	0.7897524	1.2662196	0.6333808	0.7738402	0.8184905	1.2217613	42
19	0.6200073	0.7845961	0.7902248	1.2654626	0.6336059	0.7736559	0.8189764	1.2210364	41
20	0.6202355	0.7844157	0.7906975	1.2647062	0.6338309	0.7734716	0.8194625	1.2203121	40
21	0.6204636	0.7842352	0.7911703	1.2639503	0.6340559	0.7732872	0.8199488	1.2195883	39
22	0.6206917	0.7840547	0.7916434	1.2631950	0.6342808	0.7731027	0.8204354	1.2188650	38
23	0.6209198	0.7838741	0.7921167	1.2624402	0.6345057	0.7729182	0.8209222	1.2181422	37
24	0.6211478	0.7836935	0.7925902	1.2616860	0.6347305	0.7727336	0.8214093	1.2174199	36
25	0.6213757	0.7835128	0.7930640	1.2609323	0.6349553	0.7725489	0.8218965	1.2166982	35
26	0.6216036	0.7833320	0.7935379	1.2601792	0.6351800	0.7723642	0.8223840	1.2159769	34
27	0.6218314	0.7831511	0.7940121	1.2594267	0.6354046	0.7721794	0.8228718	1.2152562	33
28	0.6220592	0.7829702	0.7944865	1.2586747	0.6356294	0.7719945	0.8233597	1.2145359	32
29	0.6222869	0.7827892	0.7949611	1.2579232	0.6358537	0.7718096	0.8238479	1.2138162	31
30	0.6225146	0.7826082	0.7954359	1.2571723	0.6360782	0.7716246	0.8243364	1.2130970	30
31	0.6227422	0.7824271	0.7959110	1.2564219	0.6363026	0.7714395	0.8248251	1.2123783	29
32	0.6229698	0.7822459	0.7963862	1.2556721	0.6365270	0.7712544	0.8253140	1.2116601	28
33	0.6231973	0.7820646	0.7968617	1.2549229	0.6367513	0.7710692	0.8258031	1.2109424	27
34	0.6234248	0.7818833	0.7973374	1.2541742	0.6369756	0.7708839	0.8262925	1.2102252	26
35	0.6236522	0.7817019	0.7978134	1.2534260	0.6371998	0.7706986	0.8267821	1.2095085	25
36	0.6238796	0.7815205	0.7982895	1.2526784	0.6374240	0.7705132	0.8272719	1.2087923	24
37	0.6241069	0.7813390	0.7987659	1.2519313	0.6376481	0.7703278	0.8277620	1.2080767	23
38	0.6243342	0.7811574	0.7992425	1.2511848	0.6378721	0.7701423	0.8282523	1.2073615	22
39	0.6245614	0.7809757	0.7997193	1.2504388	0.6380961	0.7699567	0.8287429	1.2066468	21
40	0.6247885	0.7807940	0.8001963	1.2496933	0.6383201	0.7697710	0.8292337	1.2059327	20
41	0.6250156	0.7806122	0.8006736	1.2489484	0.6385440	0.7695853	0.8297247	1.2052190	19
42	0.6252426	0.7804304	0.8011511	1.2482040	0.6387678	0.7693995	0.8302160	1.2045058	18
43	0.6254696	0.7802485	0.8016288	1.2474602	0.6389916	0.7692137	0.8307075	1.2037931	17
44	0.6256966	0.7800665	0.8021067	1.2467169	0.6392153	0.7690278	0.8311992	1.2030810	16
45	0.6259235	0.7798845	0.8025848	1.2459742	0.6394390	0.7688418	0.8316912	1.2023693	15
46	0.6261503	0.7797024	0.8030632	1.2452320	0.6396626	0.7686558	0.8321834	1.2016581	14
47	0.6263771	0.7795202	0.8035418	1.2444903	0.6398862	0.7684697	0.8326759	1.2009475	13
48	0.6266038	0.7793380	0.8040206	1.2437492	0.6401097	0.7682835	0.8331686	1.2002373	12
49	0.6268305	0.7791557	0.8044997	1.2430086	0.6403332	0.7680973	0.8336615	1.1995276	11
50	0.6270571	0.7789733	0.8049790	1.2422685	0.6405566	0.7679110	0.8341547	1.1988184	10
51	0.6272837	0.7787908	0.8054585	1.2415290	0.6407799	0.7677246	0.8346481	1.1981097	9
52	0.6275102	0.7786083	0.8059382	1.2407900	0.6410032	0.7675382	0.8351418	1.1974015	8
53	0.6277366	0.7784257	0.8064181	1.2400515	0.6412264	0.7673517	0.8356357	1.1966938	7
54	0.6279630	0.7782431	0.8068983	1.2393136	0.6414496	0.7671651	0.8361298	1.1959866	6
55	0.6281894	0.7780604	0.8073787	1.2385762	0.6416727	0.7669785	0.8366242	1.1952799	5
56	0.6284157	0.7778777	0.8078593	1.2378393	0.6418958	0.7667918	0.8371188	1.1945736	4
57	0.6286420	0.7776949	0.8083401	1.2371030	0.6421188	0.7666051	0.8376136	1.1938679	3
58	0.6288682	0.7775120	0.8088212	1.2363672	0.6423418	0.7664183	0.8381087	1.1931626	2
59	0.6290943	0.7773290	0.8093025	1.2356319	0.6425647	0.7662314	0.8386040	1.1924579	1
60	0.6293204	0.7771460	0.8097840	1.2348972	0.6427876	0.7660444	0.8390996	1 1917536	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.

51 D. | 50 D.

	40 D.				41 D.				
M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangente	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotangent	M.
0	0.6427878	0.7660444	0.8390996	1.1917536	0.6560590	0.7547096	0.8692868	1.1503684	60
1	0.6430104	0.7658574	0.8395954	1.1910498	0.6562785	0.7545187	0.8697976	1.1496984	59
2	0.6432332	0.7656703	0.8400915	1.1903465	0.6564980	0.7543278	0.8703087	1.1490176	58
3	0.6434559	0.7654832	0.8405878	1.1896437	0.6567174	0.7541368	0 8708200	1.1483429	57
4	0.6436785	0.7652960	0.8110844	1.1889414	0.6569367	0.7539457	0.8713316	1.1476687	56
5	0.6439011	0.7651087	0.8415812	1.1882395	0.6571560	0.7537546	0.8718435	1.1469949	55
6	0.6441236	0.7649214	0.8420782	1.1875382	0.6573752	0.7535634	0.8723556	1.1463215	54
7	0.6443461	0.7647340	0.8425755	1.1868373	0.6575944	0.7533721	0.8728680	1.1456486	53
8	0.6445685	0.7645465	0.8430730	1.1861369	0.6578135	0.7531808	0.8733806	1.1449762	52
9	0.6447909	0.7643590	0.8435708	1.1854370	0.6580326	0.7529894	0.8738935	1.1443041	51
10	0.6450132	0.7641714	0.8440688	1.1847376	0.6582516	0.7527980	0.8744067	1.1436326	50
11	0.6452355	0.7639837	0.8445670	1.1840387	0.6584706	0.7526065	0.8749201	1.1429615	49
12	0.6454577	0.7637960	0.8450655	1.1683402	0.6586895	0.7524149	0.8754338	1.1422908	48
13	0.6456798	0.7636082	0.8455643	1.1826422	0.6589083	0.7522233	0.8759478	1.1416206	47
14	0.6459019	0.7634204	0.8460633	1.1819447	0.6591271	0.7520316	0.8764620	1.1409508	46
15	0.6461240	0 7632325	0.8465625	1.1812477	0.6593458	0.7518398	0.8769765	1.1402815	45
16	0.6463460	0.7630445	0.8470620	1.1805512	0.6595645	0.7516480	0.8774912	1.1396126	44
17	0.6465679	0.7628564	0.8475617	1.1798551	0.6597831	0 7514561	0.8780062	1.1389441	43
18	0.6467898	0.7626683	0.8480617	1.1791595	0.6600017	0.7512641	0.8785215	1.1382761	42
19	0.6470116	0.7624801	0.8485619	1.1784644	0.6602202	0.7510721	0.8790370	1.1376085	41
20	0.6472334	0.7622919	0.8490624	1.1777698	0.6604386	0.7508800	0.8795528	1.1369414	40
21	0.6474551	0.7621036	0.8495631	1.1770756	0.6606570	0.7506879	0.8800689	1.1362747	39
22	0.6476767	0.7619152	0.8500640	1.1763820	0.6608753	0.7504957	0.8605852	1.1356085	38
23	0.6478983	0.7617268	0.8505652	1.1756888	0.6610936	0.7503034	0.8811018	1.1349427	37
24	0.6481199	0.7615383	0.8510667	1.1749960	0.6613118	0.7501111	0.8816186	1.1342773	36
25	0.6483414	0.7613497	0.8515684	1.1743038	0.6615300	0.7499187	0.8821357	1.1336124	35
26	0.6485628	0.7611611	0.8520704	1.1736120	0.6617481	0.7497262	0.8826531	1.1329479	34
27	0.6487842	0.7609724	0.8525726	1.1729207	0.6619662	0.7495337	0.8831707	1.1322839	33
28	0.6490055	0.7607837	0.8530750	1.1722298	0.6621842	0.7493411	0.8836886	1.1316203	32
29	0.6492268	0.7605949	0.8535777	1.1715395	0.6624022	0.7491484	0.8842068	1.1309571	31
30	0.6494480	0.7604060	0.8540807	1·1708496	0.6626201	0.7489557	0.8847253	1.1302944	30
31	0.6496692	0.7602170	0.8545839	1.1701601	0.6628379	0.7487629	0.8852440	1.1296321	29
32	0.6498903	0.7600280	0.8550873	1.1694712	0.6630557	0.7485701	0.8857630	1.1289702	28
33	0.6501114	0.7598389	0.8555910	1.1687827	0.6632734	0.7483772	0.8862822	1.1283088	27
34	0.6503324	0 7596498	0.8560950	1.1680947	0.6634911	0.7481842	0.8868017	1.1276478	26
35	0.6505533	0.7594606	0.8565992	1.1674071	0.6637087	0.7479912	0.8873215	1.1269872	25
36	0.6507742	0.7592713	0.8571037	1.1667200	0.6639262	0.7477981	0.8878416	1.1263271	24
37	0.6509950	0.7590820	0.8576084	1.1660334	0.6641437	0.7476049	0.8883620	1.1256674	23
38	0.6512158	0.7588926	0.8581133	1.1653472	0.6643611	0.7474117	0.8888826	1.1250081	22
39	0.6514366	0.7587031	0.8586185	1.1646615	0.6645785	0.7472184	0.8894034	1.1243493	21
40	0.6516572	0·7585136	0.8591240	1.1639763	0.6647959	0.7470251	0.8899245	1.1236909	20
41	0.6518778	0.7583240	0.8596297	1.1632916	0.6650132	0.7468317	0.8904459	1.1230329	19
42	0.6520984	0.7581343	0.8601357	1.1626073	0.6652304	0.7466382	0.8909675	1.1223754	18
43	0.6523189	0.7579446	0.8606419	1.1619234	0.6654475	0.7464446	0.8914894	1.1217183	17
44	0.6525394	0.7577548	0.8611484	1.1612400	0.6656646	0.7462510	0.8920116	1.1210616	16
45	0.6527598	0.7575650	0.8616551	1.1605571	0.6658817	0.7460574	0.8925341	1.1204053	15
46	0.6529801	0.7573751	0.8621621	1.1598747	0.6660987	0.7458637	0.8930569	1.1197495	14
47	0.6532004	0.7571851	0.8626693	1.1591927	0.6663156	0.7456699	0.8935799	1.1190941	13
48	0.6534206	0.7569950	0.8631768	1.1585111	0.6665325	0.7454760	0.8941032	1.1184391	12
49	0.6536408	0.7568049	0.8636846	1.1578301	0.6667493	0.7452821	0.8946268	1.1177846	11
50	0.6538609	0.7566147	0.8641926	1.1571495	0.6669661	0.7450881	0.8951506	1.1171395	10
51	0.6540810	0.7564245	0.8647009	1.1564693	0.6671828	0.7448091	0.8956747	1.1164768	9
52	0.6543010	0.7562342	0.8652094	1.1557896	0.6673994	0.7446999	0.8961991	1.1158235	8
53	0.6545209	0.7560439	0.8657181	1.1551104	0.6676160	0.7445057	0.8967238	1.1151706	7
54	0.6547408	0.7558535	0.8662271	1.1544316	0.6678326	0.7443115	0.8972487	1.1145182	6
55	0.6549606	0.7556630	0.8667364	1.1537532	0.6680491	0.7441172	0.8977739	1.1138662	5
56	0.6551804	0.7554724	0.8672460	1.1530754	0.6682655	0.7439229	0.8982994	1.1132146	4
57	0.6554001	0.7552818	0.8677558	1.1523979	0.6684818	0.7437285	0.8988252	1.1125635	3
58	0.6556198	0.7550911	0.8682659	1.1517210	0.6686981	0.7435340	0.8993512	1.1119127	2
59	0.6558394	0.7549004	0.8687762	1.1510445	0.6689141	0.7433394	0.8998775	1.1112624	1
60	0.6560590	0.7547096	0.8692868	1.1503684	0.6691306	0.7431448	0.9004041	1.1106125	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	M.
				49 D.				48 D.	

M.	42 D. Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	43 D. Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangent.	M.
0	0.6691306	0.7431448	0.9004041	1.1106125	0.6819984	0.7313537	0.9325151	1.0723687	60
1	0.6693467	0.7429501	0.9009309	1.1099630	0.6822111	0.7311553	0.9330591	1.0717435	59
2	0.6695628	0.7427554	0.9014580	1.1093140	0.6824237	0.7309568	0.9336034	1.0711187	58
3	0.6697788	0.7425606	0.9019854	1.1086653	0.6826363	0.7307583	0.9341479	1.0704943	57
4	0.6699948	0.7423657	0.9025131	1.1080171	0.6828488	0.7305597	0.9346928	1.0698702	56
5	0.6702107	0.7421708	0.9030411	1.1073693	0.6830613	0.7303610	0.9352380	1.0692466	55
6	0.6704266	0.7419758	0.9035694	1.1067219	0.6832737	0.7301623	0.9357834	1.0686233	54
7	0.6706424	0.7417808	0.9040979	1.1060750	0.6834861	0.7299635	0.9363292	1.0680004	53
8	0.6708582	0.7415857	0.9046267	1.1054284	0.6836984	0.7297646	0.9368753	1.0673779	52
9	0.6710739	0.7413905	0.9051558	1.1047823	0.6839107	0.7295657	0.9374215	1.0667558	51
10	0.6712895	0.7411953	0.9056851	1.1041365	0.6841229	0.7293667	0.9379683	1.0661341	50
11	0.6715051	0.7410000	0.9062147	1.1034912	0.6843350	0.7291677	0.9385152	1.0655128	49
12	0.6717206	0.7408046	0.9067446	1.1028463	0.6845471	0.7289686	0.9390628	1.0648918	48
13	0.6719361	0.7406092	0.9072748	1.1022019	0.6847591	0.7287694	0.9396101	1.0642713	47
14	0.6721515	0.7404137	0.9078053	1.1015578	0.6849711	0.7285702	0.9401579	1.0636511	46
15	0.6723668	0.7402181	0.9083360	1.1009141	0.6851830	0.7283709	0.9407061	1.0630313	45
16	0.6725821	0.7400225	0.9088671	1.1002709	0.6853948	0.7281716	0.9412545	1.0624119	44
17	0.6727973	0.7398268	0.9093984	1.0996281	0.6856066	0.7279722	0.9418033	1.0617929	43
18	0.6730125	0.7396311	0.9099300	1.0989856	0.6858183	0.7277727	0.9423523	1.0611742	42
19	0.6732276	0.7394353	0.9104619	1.0983436	0.6860300	0.7275732	0.9429017	1.0605560	41
20	0.6734427	0.7392394	0.9109941	1.0977020	0.6862416	0.7273736	0.9434513	1.0599381	40
21	0.6736577	0.7390435	0.9115265	1.0970608	0.6864532	0.7271740	0.9440013	1.0593206	39
22	0.6738727	0.7388475	0.9120592	1.0964201	0.6866647	0.7269743	0.9445516	1.0587034	38
23	0.6740876	0.7386515	0.9125922	1.0957797	0.6868761	0.7267745	0.9451021	1.0580867	37
24	0.6743024	0.7384554	0.9131255	1.0951397	0.6870875	0.7265747	0.9456530	1.0574703	36
25	0.6745172	0.7382592	0.9136591	1.0945002	0.6872988	0.7263748	0.9462042	1.0568544	35
26	0.6747319	0.7380629	0.9141929	1.0938610	0.6875101	0.7261748	0.9467556	1.0562388	34
27	0.6749466	0.7378666	0.9147270	1.0932223	0.6877213	0.7259748	0.9473074	1.0556235	33
28	0.6751612	0.7376702	0.9152615	1.0925840	0.6879324	0.7257747	0.9478595	1.0550087	32
29	0.6753757	0.7374738	0.9157962	1.0919460	0.6881435	0.7255746	0.9484119	1.0543942	31
30	0.6755902	0.7372773	0.9163312	1.0913085	0.6883545	0.7253744	0.9489646	1.0537801	30
31	0.6758046	0.7370808	0.9168665	1.0906714	0.6885655	0.7251741	0.9495176	1.0531664	29
32	0.6760190	0.7368842	0.9174020	1.0900347	0.6887764	0.7249758	0.9500709	1.0525531	28
33	0.6762333	0.7366875	0.9179379	1.0893983	0.6889873	0.7247734	0.9506245	1.0519401	27
34	0.6764476	0.7364907	0.9184740	1.0887624	0.6891981	0.7245729	0.9511784	1.0513275	26
35	0.6760618	0.7362939	0.9190104	1.0881269	0.6894089	0.7243724	0.9517826	1.0507153	25
36	0.6768760	0.7360971	0.9195471	1.0874918	0.6896196	0.7241718	0.9522871	1.0501034	24
37	0.6770901	0.7359002	0.9200841	1.0868571	0.6898302	0.7239712	0.9528420	1.0494920	23
38	0.6773041	0.7357032	0.9206214	1.0862228	0.6900407	0.7237705	0.9533971	1.0488809	22
39	0.6775181	0.7355061	0.9211590	1.0855889	0.6902512	0.7235698	0.9539526	1.0482702	21
40	0.6777320	0.7353090	0.9216968	1.0849554	0.6904617	0.7233690	0.9545083	1.0476598	20
41	0.6779459	0.7351118	0.9222350	1.0843223	0.6906721	0.7231681	0.9550644	1.0470498	19
42	0.6781597	0.7349146	0.9227734	1.0836896	0.6908824	0.7229671	0.9556208	1.0464402	18
43	0.6783734	0.7347173	0.9233122	1.0830573	0.6910927	0.7227661	0.9561774	1.0458310	17
44	0.6785871	0.7345199	0.9238512	1.0824254	0.6913029	0.7225651	0.9567344	1.0452221	16
45	0.6788007	0.7343225	0.9243905	1.0817939	0.6915131	0.7223640	0.9572917	1.0446136	15
46	0.6790143	0.7341250	0.9249301	1.0811628	0.6917232	0.7221628	0.9578494	1.0440055	14
47	0.6792278	0.7339275	0.9254700	1.0805321	0.6919332	0.7219615	0.9584073	1.0433977	13
48	0.6794413	0.7337299	0.9260101	1.0799018	0.6921432	0.7217602	0.9589655	1.0427904	12
49	0.6796547	0.7335322	0.9265506	1.0792718	0.6923531	0.7215588	0.9595241	1.0421833	11
50	0.6798681	0.7333345	0.9270914	1.0786423	0.6925630	0.7213574	0.9600829	1.0415767	10
51	0.6800814	0.7331367	0.9276324	1.0780132	0.6927728	0.7211559	0.9606421	1.0409704	9
52	0.6802946	0.7329388	0.9281738	1.0773844	0.6929825	0.7209544	0.9612016	1.0403645	8
53	0.6805078	0.7327409	0.9287154	1.0767561	0.6931922	0.7207528	0.9617614	1.0397589	7
54	0.6807209	0.7325429	0.9292573	1.0761282	0.6934018	0.7205511	0.9623215	1.0391537	6
55	0.6809339	0.7323448	0.9297996	1.0755006	0.6936114	0.7203494	0.9628819	1.0385489	5
56	0.6811469	0.7321467	0.9303421	1.0748734	0.6938209	0.7201476	0.9634427	1.0379445	4
57	0.6813599	0.7319485	0.9308849	1.0742467	0.6940304	0.7199457	0.9640037	1.0373404	3
58	0.6815728	0.7317503	0.9314280	1.0736203	0.6942398	0.7197438	0.9645651	1.0367367	2
59	0.6817856	0.7315520	0.9319714	1.0729943	0.6944491	0.7195418	0.9651268	1.0361333	1
60	0.6819984	0.7313537	0.9325151	1.0723687	0.6946584	0.7193398	0.9656888	1.0355303	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente. 47 D.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente. 46 D.	M.

44 D.

M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotang.	M.
0	0.6946584	0.7193398	0.9656888	1.0355303	60
1	0.6948676	0.7191377	0.9662511	1.0349277	59
2	0.6950767	0.7189355	0.9668137	1.0343132	58
3	0.6952858	0.7187333	0.9673767	1.0337235	57
4	0.6954949	0.7185310	0.9679400	1.0331220	56
5	0.6957039	0.7183287	0.9685085	1.0325208	55
6	0.6959128	0.7181263	0.9690674	1.0319199	54
7	0.6961217	0.7179238	0.9696316	1.0313195	53
8	0.6963305	0.7177213	0.9701962	1.0307194	52
9	0.6965392	0.7175187	0.9707610	1.0301196	51
10	0.6967479	0.7173161	0.9713262	1.0295203	50
11	0.6969565	0.7171134	0.9718917	1.0289212	49
12	0.6971651	0.7169106	0.9724575	1.0283226	48
13	0.6973736	0.7167078	0.9730236	1.0277243	47
14	0.6975821	0.7165049	0.9735901	1.0271263	46
15	0.6977905	0.7163019	0.9741569	1.0265287	45
16	0.6979988	0.7160989	0.9747240	1.0259316	44
17	0.6982071	0.7158958	0.9752914	1.0253346	43
18	0.6984153	0.7156927	0.9758591	1.0247381	42
19	0.6986234	0.7154895	0.9764272	1.0241419	41
20	0.6988315	0.7152863	0.9769956	1.0235461	40
21	0.6990396	0.7150830	0.9775643	1.0229506	39
22	0.6992476	0.7148796	0.9781333	1.0223555	38
23	0.6994555	0.7146762	0.9787027	1.0217608	37
24	0.6996633	0.7144727	0 9792724	1.0211664	36
25	0.6998711	0.7142691	0.9798424	1.0205723	35
26	0.7000789	0.7140655	0.9804127	1.0199786	34
27	0.7002866	0.7138618	0.9809833	1.0193853	33
28	0.7004942	0.7136581	0.9815543	1.0187923	32
29	0.7007018	0.7134543	0.9821256	1.0181997	31
30	0.7009093	0.7132505	0.9826973	1.0176074	30
31	0.7011167	0.7130466	0 9832692	1.0170155	29
32	0.7013241	0.7128426	0.9838415	1.0164239	28
33	0.7015314	0.7126385	0.9844141	1.0158326	27
34	0.7017387	0.7124344	0.9849871	1.0152417	26
35	0.7019459	0.7122302	0.9855603	1.0146512	25
36	0.7021530	0.7120260	0.9861339	1.0140610	24
37	0.7023601	0.7118217	0.9867079	1.0134712	23
38	0.7025671	0.7116174	0.9872821	1.0128817	22
39	0.7027741	0.7114130	0.9878567	1.0122925	21
40	0.7029810	0.7112086	0.9884316	1.0117037	20
41	0.7031879	0.7110041	0.9890069	1.0111153	19
42	0.7033947	0.7107995	0.9895825	1.0105272	18
43	0.7036014	0.7105948	0.9901584	1.0099394	17
44	0.7038081	0.7103901	0.9907346	1.0093520	16
45	0.7040147	0.7101854	0.9913112	1.0087649	15
46	0.7042218	0.7099806	0.9918881	1.0081782	14
47	0.7044278	0.7097757	0.9924654	1.0075918	13
48	0.7046342	0.7095707	0.9930429	1.0070058	12
49	0.7048406	0.7093657	0.9936208	1.0064201	11
50	0.7050469	0.7091607	0.9941991	1 0058347	10
51	0.7052532	0.7089556	0.9947777	1.0052497	9
52	0.7054594	0.7087504	0.9953566	1.0046651	8
53	0.7056655	0.7085451	0.9959358	1.0040807	7
54	0.7058716	0.7083398	0.9965154	1.0034968	6
55	0.7060776	0.7081345	0.9970953	1.0029131	5
56	0.7062835	0.7079291	0.9976756	1.0023298	4
57	0.7064894	0.7077236	0.9982562	1.0017469	3
58	0.7066953	0.7075180	0.9988371	1.0011642	2
59	0.7069011	0.7073124	0.9994184	1.0005819	1
60	0.7071068	0.7071068	1.0000000	1.0000000	0
M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangent.	M.

45 D.

GLACE. Eau solidifiée par le froid ; sa densité est moindre qu'à l'état liquide, ce qui fait qu'elle surnage quand elle est libre. La glace pèse environ 930 kilog. le mètre cube. Puisque cette densité est moindre que celle de l'eau, ce liquide se dilate en passant à l'état solide, et l'expérience a appris que ses molécules en prenant un nouvel arrangement exerçaient alors un effort assez considérable pour briser les enveloppes les plus résistantes.

Quant aux efforts que la glace peut elle-même supporter sans se rompre, ils sont assez mal connus. On admet cependant que la glace d'une rivière, qui a atteint 0m.27 d'épaisseur, peut porter les voitures chargées en offrant une sécurité complète ; — qu'à l'épaisseur de 0m.10, elle peut donner passage à des hommes détachés, à des chevaux isolés et même à des voitures légères ; — mais quelle que soit cette épaisseur, il ne faut pas qu'il y ait de solutions de continuité dans sa surface, et l'on ne doit jamais se fier à celle qui laisse un vide entre l'eau et sa face inférieure.

La glace se forme à la *surface* des eaux tranquilles et stagnantes, et si la couche d'eau est épaisse, les eaux du fond ne sauraient s'abaisser au-dessous de + 4°, température qui correspond au *maximum* de densité du liquide. Les physiciens ont longtemps affirmé que la glace se formait de la même manière dans les eaux *courantes*. Les meuniers, les pêcheurs et les bateliers ont prouvé qu'en dépit de toute théorie, la glace se formait *au fond* des rivières. Voyez, sur ce mode de formation dans les eaux courantes, la notice de *M. Arago, Annuaire de* 1833.

GRANIT. Roche essentiellement formée de feldspath, de quartz et de mica à peu près également disséminés. Les géologues classent ces roches parmi celles qui ont une origine ignée ; il n'en faudrait pas conclure que les granits ne se rencontrent qu'à la base de la série *neptunienne*, car on les retrouve à diverses époques postérieures à la série *plutonique*.

Le granit et quelques-unes des roches de la formation granitique contiennent parfois plusieurs pierres précieuses, telles que l'émeraude, la topaze, le grenat ; mais les métaux y sont peu abondants, bien qu'on y rencontre des filons et des veines de différentes variétés de fer, d'argent, de cuivre, d'étain et même de l'or natif.

Comme pierre de construction, le granit et ses variétés ne sont point en général d'un bon emploi : leur adhésion aux mortiers est faible, l'extraction coûteuse, la taille coûteuse et difficile à la fois ; cependant, le granit dur, celui dans lequel le feldspath ne prédomine pas, convient assez bien aux constructions hydrauliques, aux parties des bâtiments qui doivent résister à de fortes pressions, à des frottements réitérés. Les anciens ont beaucoup employé le granit comme

pierre d'ornement, et les modernes l'ont souvent introduit dans les constructions monumentales.

C'est le granit porphyroïde d'*Algajola* (Corse) qui forme le soubassement de la colonne de la place Vendôme ; c'est le granit gris de *Laber* qui forme le piédestal de l'obélisque de Luxor, qui est lui-même le granit rose d'Egypte ou *syénite*, roche dans laquelle le mica du granit proprement dit est plus ou moins complétement remplacé par l'amphibole.

L'origine *ignée* des granits et des porphyres ne les met point à l'abri d'une désaggrégation complète lorsque ces roches sont exposées à un feu violent ou prolongé.

H

HACHE-PAILLE. Dans une expérience sur le hache-paille de *Dombasle* à un seul couteau convexe, j'ai, en $151^s.6$, haché $1^k.592$ paille sèche en brins de $0^m.01$ longueur, en exerçant sur une manivelle de 0.35 rayon, à laquelle j'ai fait décrire cent tours juste, des efforts périodiques qui ont varié pour chaque tour de $14^k.1$ à $2^k.5$, soit un effort moyen $= 8^k.3$. J'étais assez fatigué en dépit de la très-courte durée de l'expérience, et il me paraît certain qu'un homme exercé n'aurait pu longtemps supporter ce travail de 12 k. m. par seconde ; non pas que l'effort moyen dépassât sensiblement celui de 8^k qui convient dans le travail à la manivelle au maximum d'effet, mais parce que le chemin, $1^m.45$, parcouru par seconde, a atteint près du double de celui $0^m.75$ qui correspond à ce maximum. Je pense donc que, dans un travail prolongé, un manœuvre n'obtiendrait pas 1 kil. de brins de paille de $0^m.01$ en $95^s.22$, comme dans l'expérience précédente, et que chaque kilogramme réduit à cet état exigerait environ les 1147 k.m. que j'ai dépensés pour l'obtenir.

En prenant pour base le travail ordinaire d'un manœuvre à la manivelle, ou 172800 k. m. en 8 heures, on voit qu'il ne hacherait au plus, dans sa journée, que 150 kil. paille en brins de 0.01, soit 300 kil. en brins de 0.02, etc. ; encore faudrait-il un autre manœuvre pour alimenter le hache-paille.

En évaluant la journée de chaque manœuvre à 1 fr. 50, la réduction de 1 kil. paille en brins de $0^m.01$ coûterait 0 fr. 02, non compris l'intérêt du prix d'acquisition de la machine ni ses frais d'entretien et de réparation. Je doute que cette dépense soit compensée par les avantages assez mal constatés du *hachage* de la paille.

HAUTEUR. Ce mot a reçu de l'usage des acceptions assez différentes : tantôt il exprime l'*altitude* d'un point au-dessus d'un autre ou la différence de niveau de ces deux points ; tantôt il désigne la

valeur de l'*angle* vertical compris entre le plan de l'horizon et le rayon visuel dirigé de ce plan à un point, à un signal, à un astre. Ainsi, la *hauteur* d'une étoile, la *hauteur* du soleil est l'inclinaison sur le plan de l'horizon de l'observateur du rayon visuel dirigé au centre de l'astre. La *hauteur méridienne* est la valeur de ce même angle au moment même où le centre de l'astre traverse le méridien. La *hauteur du pôle* est l'inclinaison de l'axe terrestre sur l'horizon rationnel de l'observateur, ou la *latitude* de l'observateur (*Voyez* Coordonnées géographiques, pag. 380, et Astronomie, pag. 68). — La *hauteur de l'équateur* est le complément de cette latitude. Le mot *hauteur* a souvent encore le sens de *latitude* dans le langage du marin, lorsqu'il annonce, par exemple, avoir rencontré tel vaisseau par telle *hauteur*.

Nous avons rappelé, à l'article Coordonnées géographiques, un assez grand nombre de hauteurs ou altitudes, nous en donnons ici quelques autres moins connues ou qui peuvent avoir un intérêt historique :

	m.
Acropolis d'Athènes	174
Athos (mont)	1935
— d'après l'Annuaire	2066
Bains du Mont-d'Or (Auvergne)	1040
Baldeck (lac de)	465.7
Bethléhem	824
Bienne (lac de)	434.2
Blanez (cap) entre Boulogne et Calais, au-dessus des basses mers	162
Blumlis (Alpes), cime du milieu	3661.4
Breithorn	3784.2
Briens (lac de)	563.9
Bugiaki (Pinde)	2367
Caspienne (mer), au-dessous du niveau des mers	— 24 6
Chasseral (Jura)	1609.6
Chasseron (Jura)	1610.5
Colonne Vendôme au-dessus du pavé	43
Constance (lac de)	395.8
Cordoue (Espagne)	235
Cythéron (Grèce)	1411
Delphi, la plus haute montagne de l'Eubée	1745
Dôle (Jura)	1678.9
Doldenhorn	3647.2
Egeri (lac de)	726.4
Eiger	3976.1
Etna (Sicile)	3237
Faulhorn	2363.5
Feugari	1599
Finsteraarhorn	4275.1
— suivant l'Annuaire	4362
Galenstock	3028
Garde (lac de)	69
Genève (lac de)	374.6
— (observatoire de)	407
Glætschhorn	3307
Greiffensee (lac de)	439
Grinez (cap), au-dessus des basses mers de vive eau	65
Grosshorn	3762.8
Guiona (Grèce)	2511
Hallwyll (lac de)	450.8
Hangendhorn	3294
Hékla (Islande)	1013
Hélicon	1757
Hœrnli	1135.4
Hohenstollen (Underwald)	2484.2
Hospice du grand St-Bernard	2491
— du St-Gothard	2075
Hymète	1027
Invalides de Paris (la flèche) au-dessus du sol	105
Ipsario (île de Thasos)	1045
Jerakovouni (la plus haute cime de l'Othrys au nord des Thermopyles)	1697
Jéricho, au-dessous du niveau de la Méditerranée	—210
Jérusalem (couvent des Francs)	805
Joux (lac de)	1000
Jungfrau	4166.9
— d'après l'Annuaire	4180

	m.
Katavothron, sommet de l'OEta	2152
Klœn (lac de)	886
Kunchinginga, le plus élevé des pics de l'Himalaya	8588
Liban (mont), Asie	2906
Locarno (lac de)	208
Lowertz (lac de)	448.5
Lucerne (lac de)	435.5
Lugano (lac de)	286
Lungern (lac de)	657.6
Mer-Morte, dépression au-dessous du niveau de la Méditerranée	—427
— d'après le nivellement du lieutenant Symonds	—398 8
Moleson (Fribourg)	2004.7
Monch	3976.1
Mont-Blanc	4808.32
— d'après l'Annuaire	4810
Mont-Cassel	160
Monte-d'Oro (Corse)	2652
Monte-Rotondo (Corse)	2672
Monto (Jura)	1331.4
Morat (lac de)	435.2
Moron (Jura)	1338.8
Mulahacen (pic), point le plus élevé de l'Espagne	3556
Neufchâtel (lac de)	435.1
Niesen	2365
Notre-Dame de Paris (la balustrade), au-dessus du pavé	66
Observatoire de Paris, le premier étage	65
Olympe	2973
Panthéon de Paris, au-dessus du pavé	79
Parnasse (Grèce), point le plus élevé de la Hellade	2459
Passages du Mont-Cervin	3410
— du grand St.-Bernard	2491
— du petit St.-Bernard	2192
— du St.-Gothard	2075
— du Mont-Cenis	2066
— du Simplon	2005
— de Tourmalet	2177
Pentelique	1109
Pfæffikon (lac de)	540.6
Pilav-Tépeh	1872
Pilate	2044
Piz-Beverin	2999.7
Port d'Oo	3002
— Vieil-Estaubé	2561
— de Périède	2499
— de Gavarnie	2333
— de Cavarrère	2241
Pyramide d'Egypte, la plus haute, au-dessus du sol	146
Rauveux (Jura)	1305.1
Rizlihorn	3284
Rœthifluh	1398.1
Saint-Paul de Londres	110
Saint-Pierre de Rome, au-dessus de la place	132
Sarnen (lac de)	471.3
Sarragosse (Espagne)	274
Schreckhorn { cime orientale	4082.5
Schreckhorn { cime occident.	4014.8
Sempach (lac de)	505.5
Sentis	2504.2
Sils (lac de)	1818
Spitzliberg	3418
Strasbourg (la tour de) dite le Munster, au-dessus du pavé	142
Suchet (Jura)	1590.7
Sustenhorn	3513.5
Table (montagne de la), cap de Bonne-Espérance	1163
Tambo	3276
Tendre (Jura)	1680.5
Ténériffe (pic de), Afrique	3710
Thoune (lac de)	556.4
Tibérias (lac) ou Tibériade, au-dessous du niveau de la Méditerranée	—203
—— d'après le nivellement du lieutenant Symonds	— 99.7
Titlis	3235
Tœdi (Glaris)	3623
Tschingelhorn	3580.5
Vaisseau français de 120 canons au-dessus de la quille	73
Vardoussia (Grèce)	2492
Vésuve (Naples)	1198
Wallenstadt (lac de)	424.4
Wetterhorn	3707.2
Zoug (lac de)	415
Zurich (lac de)	408.8

HEURE. Nous avons reconnu, pag. 90, trois espèces d'*heures* : l'heure *sidérale*, l'heure solaire *vraie* et l'heure *moyenne*. La première et la dernière ont seules une durée constante, mais l'heure sidérale est plus courte que l'heure moyenne. Une même durée a

donc une expression différente suivant qu'elle est donnée en temps sidéral ou en temps moyen.

En général, lorsqu'une durée sera exprimée en temps moyen $=$ j jours $+$ h heures $+$ m minutes $+$ s secondes, elle se trouvera traduite en durée sidérale, lorsqu'on aura *ajouté* à $j+h+m+s$, savoir :

$3^m,56^s.555348$ pour chaque j,
$9^s.8565$ pour chaque h,
$0^s.16427$ pour chaque m,
$0^s.002738$ pour chaque s.

Le nombre $3^m,56^s.555$ est en temps sidéral la valeur de l'arc d'équateur décrit chaque jour moyen, par le soleil moyen ou la quantité dont s'accroît son ASCENSION DROITE en un jour moyen.

Réciproquement une durée sidérale

$=j'$ jours $+$ h' heures $+$ m' minutes $+$ s' secondes

sera traduite en temps moyen lorsque de $j'+h'+m'+s'$ on aura *retranché*, savoir :

$3^m,55^s.90945$ pour chaque j',
$9^s.8295$ pour chaque h',
$0^s.163836$ pour chaque m',
$0^s.002731$ pour chaque s'.

le nombre $3^m,55^s.90945$ est la durée en temps moyen que l'astre fictif appelé soleil moyen emploie à parcourir l'arc de $0^\circ.985647283$ $=1^\circ-51''.67$, dont il s'avance chaque jour sur l'équateur vers l'orient. C'est encore la durée moyenne que cet astre emploie, chaque jour, de plus qu'une étoile pour revenir au méridien.

En d'autres termes, S étant l'expression d'une durée quelconque en temps sidéral, et M celle de cette même durée en temps moyen, on a, entre M et S, les relations

$$M = 0.997269566.S = S - 0.002730434.S$$
$$S = 1.00273790912.M = M + 0.00273790912.M$$

on trouverait ainsi que

$$8^h,43^m,51^s.42 \text{ temps sid.} = 8^h,42^m,25^s.60 \text{ temps moyen.}$$

Lorsque, au lieu d'une durée quelconque, c'est l'instant précis ou l'*heure* d'un phénomène qui est indiquée pour un jour donné, il est souvent nécessaire de passer de cette heure *vraie* à l'heure *moyenne* ou à l'heure *sidérale*, et réciproquement; ces transformations s'opèrent par les relations suivantes, dont les éléments sont fournis par les *Éphémérides*, la *Connaissance des temps* par exemple; on a, en général :

heure moyenne $=$ heure vraie $+$ équation du temps. . . . . (1)

heure vraie $=$ heure moyenne — équation du temps. . . . . (2)

heure sidérale $=$ heure solaire $\left\{\begin{matrix}\text{vraie}\\ \text{moyenne}\end{matrix}\right\}$ $+$ ascension droite soleil $\left\{\begin{matrix}\text{vrai}\\ \text{moyen}\end{matrix}\right\}$ (3)

heure solaire $\left\{\begin{matrix}\text{vraie}\\ \text{moyenne}\end{matrix}\right\}$ $=$ heure sidérale — ascension droite soleil $\left\{\begin{matrix}\text{vrai}\\ \text{moyen}\end{matrix}\right\}$ (4).

$\left.\begin{matrix}\text{ascension droite}\\ \text{du soleil vrai}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{ascension droite}\\ \text{du soleil moyen}\end{matrix}\right\} +$ équation du temps. . . . . . (5)

L'*équation du temps* et l'*ascension droite* doivent être prises (*voyez* ces mots) pour l'heure même qui fait l'objet du problème.

Observons encore, 1° que le jour sidéral commence à l'instant où le point équinoxial du printemps passe au méridien, et que ses heures se comptent à partir de cet instant de 0 à 24^h; 2° que le jour *astronomique* vrai ou moyen commence à midi *vrai* ou *moyen*, et que ses heures se comptent aussi de 0 à 24, mais à partir de ce midi, tandis que le jour *civil* ou usuel commence à *minuit*, et se divise en deux périodes de 12 heures chacune.

Il en résulte que le 15 novembre, à 9 heures du matin, l'astronome compte 14 novembre 21 heures.

Procédés pour déterminer l'heure ou pour régler un chronomètre.

1er *Procédé*. Fixez invariablement une bonne lunette vers un point du ciel où vous savez que doit passer pendant la nuit une étoile de première grandeur; observez l'heure exacte donnée par la montre à l'instant précis où l'étoile traverse le fil du réticule, ce qui exigera que vous éclairiez un peu ce fil; surveillez le lendemain et plusieurs jours de suite le passage de la même étoile sous le fil de la lunette, qui aura dû conserver rigoureusement sa première position. — L'intervalle de deux passages consécutifs donné par la montre (pag. 91), devra être exactement la durée du jour sidéral; donc la montre devra marquer au passage de l'étoile $3^m,55^s.9$ *de moins* qu'au passage de la veille. S'il n'en est pas ainsi, on note la différence ou mieux les différences après plusieurs jours sidéraux, on connaît alors les variations du chronomètre; si elles sont constantes, on en tient compte, et l'instrument peut servir comme s'il était exact.

t étant par exemple la durée en secondes indiquée par le chronomètre entre deux phénomènes, $+a$ l'avance constante du chronomètre pendant $A = 86400^s$ (ou 24 heures), on a cette proportion :

Si $A + a$ équivaut à A, t équivaut à $\frac{At}{A+a}$,

valeur qu'on peut égaler à $t - \frac{at}{A} = t - 0.000011\ at$,

vu que l'avance $+a$ est toujours d'un petit nombre de secondes.

On obtiendra donc la vraie durée x en retranchant de la durée indiquée par le chronomètre, le nombre de secondes marqué par $0.000011\,at$. — Cette dernière quantité deviendrait additive si $-a$ était un retard.

2e *Procédé*. Observez le passage du centre du soleil au méridien. Notez l'heure du chronomètre au même instant. Il est évident qu'il doit marquer à cet instant le temps moyen au midi vrai. S'il n'en est pas ainsi, on connaîtra l'avance ou le retard.

Le temps moyen au midi vrai est donné tous les jours dans l'*Annuaire* ou dans la *Connaissance des temps*, pour le midi vrai de Paris; si l'observation se faisait sous un autre méridien dont la longitude serait connue, on chercherait l'heure de Paris contemporaine au midi vrai du lieu de l'observation, et l'on calculerait le temps moyen au midi vrai pour ce lieu, comme il est dit au mot *Equation du temps*, pag. 692.

En outre, comme il est difficile d'évaluer l'instant du passage du centre du soleil, on observe le passage du bord, et l'on ajoute la durée du passage du demi-diamètre donnée de cinq en cinq jours dans la *Connaissance des temps*; cette durée est d'ailleurs comprise entre $1^m,11^s$ et $1^m,5^s$, moyenne $1^m,8^s$. Enfin, l'on peut encore prendre pour l'instant du passage du centre une moyenne entre les passages du bord occidental et du bord oriental.

3e *Procédé*. Observez l'instant précis du passage au méridien du lieu de l'une des 115 étoiles dont la position apparente est donnée dans la *Connaissance des temps*. — L'ascension droite en temps de cette étoile est l'heure sidérale de son passage à tous les méridiens. Donc, en retranchant de cette ascension droite celle du soleil moyen prise pour le lieu de l'observation, pour l'heure qu'on cherche, et exprimée en temps sidéral, la différence traduite en durée moyenne sera l'heure moyenne cherchée. La soustraction exige souvent que l'on ajoute 24 à l'ascension droite de l'étoile.

L'ascension droite du soleil moyen est donnée tous les jours pour le midi moyen *de Paris* dans la *Connaissance des temps*, sous le titre *Temps sidéral à midi moyen*. Il faut bien remarquer que si l'ascension droite en temps de l'étoile ne change pas avec les méridiens, il n'en est pas de même de l'ascension droite du soleil moyen, et que dès lors, pour tout autre méridien que celui de Paris, il faudra, si l'on fait usage de la *Connaissance des temps*, calculer cette ascension droite d'après les données de ces éphémérides pour l'heure du méridien sous lequel on observe, en regardant sa longitude comme négative, si elle est orientale.

$\pm l$ étant la longitude de ce lieu exprimée en temps sidéral, à raison de 60^m pour 15°, longitude positive si le lieu est à l'ouest, négative s'il est à l'est de Paris, et t étant l'heure moyenne astronomique

du lieu, on obtiendra l'ascension droite du soleil moyen pour ce lieu et cette heure moyenne, en ajoutant

$$0.0027379\,(t \pm l)$$

à l'ascension droite du soleil moyen prise pour le midi moyen de Paris dans la *Connaissance des temps*. On trouverait ainsi que, pour un lieu dont la longitude occidentale serait en temps sidéral $27^m,18^s$, il faudrait ajouter $4^s.48$ à toutes les ascensions droites moyennes à midi moyen données dans la *Connaissance des temps*, pour avoir celles qui correspondent à son midi moyen ou au moment où l'on y compte $0^h,0^m,0^s$. Il faudrait au contraire retrancher $7^s.25$, si la longitude du lieu était orientale et $= -44^m,8^s$.

Le troisième procédé suppose que l'axe optique de la lunette d'observation est rigoureusement situé dans le plan du méridien du lieu. Mais, comme une étoile ne peut être à la même hauteur vers l'est et vers l'ouest qu'autant qu'elle est à des distances égales du méridien, on peut, au lieu d'observer son passage dans ce plan, prendre pour l'instant de ce passage le milieu de la durée qui se sera écoulée entre les deux instants où elle a été vue à la même hauteur de part et d'autre du méridien. Il est convenable que ces *hauteurs correspondantes* de l'étoile soient observées lorsque l'astre est à 2 heures au moins du méridien de l'observateur.

Cette méthode, pour obtenir l'instant du passage d'un astre au méridien, ne s'appliquerait point au soleil (deuxième procédé) sans exiger une petite correction due à ce que l'astre changerait sa déclinaison entre les deux observations, et n'est point dès lors rigoureusement à la même hauteur pour des intervalles de temps égaux pris avant et après midi vrai. *Voyez* pour ce cas l'*Astronomie pratique de Francœur*.

4e *Procédé*. On peut encore trouver l'heure par la connaissance de la hauteur absolue d'une étoile ou du centre du soleil à un instant quelconque. Ce problème se trouve résolu, pag. 41, au mot *Angle horaire*.

C'est peut-être ici le lieu de donner les règles pratiques et simples à l'aide desquelles on convertit une durée sidérale en arc, et réciproquement. *Pour convertir une durée en arc*, divisez par 4, changez les *m* en *o*, les *s* en ', les tierces *t* en '', ainsi :

$$1^h,51^m,54^s = 111^m,54^s$$

donnent, en divisant par 4, $27^m,58^s,30^t$,

soit en arc $27^o,58',30''$,

réciproquement, pour réduire les arcs en temps sidéral, multipliez par 4, changez les *o* en *m*, les ' en *s*, etc.; ainsi $27^o,58',30''$ multipliés par 4, donnent $111^o,54',0''$,

soit en temps $111^m,54^s,0^t = 1^h,51^m,54^s,0^t$.

HOMME-*moteur*. De tous les agents mécaniques que nous puissions employer pour produire un travail continu, l'homme est celui qui, *à poids égal*, donne jusqu'ici le plus grand effet. Ce travail augmente considérablement avec la quantité et la qualité des aliments solides et liquides dont les manœuvres se nourrissent. Il diminue au contraire en même temps que la température du milieu augmente. J'ai eu l'occasion de me convaincre que des manœuvres anglais (porteurs à dos), qui vivent de substances animales et de liqueurs fermentées, étaient capables d'un travail presque double de celui que j'ai obtenu de montagnards basques d'apparence robuste, mais vivant d'eau, de maïs et de fromage; et Coulomb a observé lui-même que, à La Martinique, où le thermomètre est rarement au-dessous de 25°, et où les hommes sont presque toujours inondés de leur transpiration, ils ne sont pas capables de faire la *moitié* du travail journalier qu'ils peuvent fournir dans nos climats. Cette observation résulte de la comparaison de grands travaux faits par les troupes sous l'une et l'autre latitude. La continuité et l'uniformité absolues du travail nuisent aussi à la quantité, et les hommes de peine préfèrent, en général, un petit excès de travail de quelques instants, suivi d'un intervalle de repos, à un travail continu moindre, mais d'une plus longue durée.

Limites. Sous une charge de 150 à 200 kilog., un homme ordinaire pourrait à peine se mouvoir; à la plus grande vitesse qu'il puisse prendre, et qui est de 7m.70 d'après M. Bouvard, il ne peut exercer aucun effort. — L'homme n'est donc capable d'aucun *travail* dans le sens mécanique du mot, ni sous cette charge extrême, ni à cette vitesse extrême.

Homme sans charge. Coulomb estime qu'un homme éprouve la même fatigue à s'élever sans charge à 0m.135, qu'à parcourir sans charge et horizontalement une distance seize à dix-sept fois aussi grande = 2m.275.

Il résulte d'autres observations que l'homme dont le poids moyen en France = 65 kil., peut s'élever dans une journée de marche à 4320 mèt. de hauteur, ou parcourir horizontalement 54000 mèt. Il semblerait dès lors que l'homme éprouve la même fatigue, soit qu'il s'élève de 1 mèt., soit qu'il progresse horizontalement de 12m.50, ce qui altérerait notablement le rapport 1 à 17 donné par Coulomb. — Il est vrai que Coulomb, d'après les renseignements que lui avait fournis Borda, évaluait à 2923 mèt. seulement la hauteur maximum à laquelle des hommes sans charge et *habitués à monter* pouvaient journellement s'élever; il affirme même n'avoir point trouvé d'homme qui, pour le prix d'une journée, voulût monter dix-huit fois sans charge à la hauteur de 150 mèt. par un escalier assez commode taillé dans le roc; ce qui eût exigé que l'homme

s'élevât dans la journée à 2700 mèt., et descendît de la même hauteur. Toutefois, les observations prolongées, faites en 1831 et 1832 à Vincennes par M. le capitaine du génie *Coignet*, ont clairement démontré non-seulement que l'homme pouvait s'élever dans une journée à des hauteurs plus grandes que ne le pensaient Coulomb et Borda, mais encore qu'après qu'il s'était élevé sans charge, on pouvait utiliser sa descente et son poids pour remonter des matériaux en obtenant un effet utile très-considérable. A l'aide de la machine très-simple et très-ingénieuse de M. Coignet, les manœuvres montaient, à l'échelle, à une hauteur verticale $=$ 13 mèt.; ils entraient alors dans une sorte de plateau de balance attaché à une corde passant sur une poulie fixe, et portant à son autre extrémité un plateau semblable au premier, dans lequel se trouvaient les matériaux à élever verticalement, et auxquels le manœuvre faisait ainsi contre-poids (voyez *Mémorial du Génie*, t. 12); toutes les précautions avaient été prises d'ailleurs pour modérer la vitesse du mouvement et la réduire à 1 mèt. Chaque homme, dans une journée de dix heures, faisait trois cent dix ascensions à 13 mèt. à l'aide d'une *échelle* inclinée à un de base sur trois de hauteur, et dont les échelons avaient $0^{m}.25$ d'écartement d'axe en axe. Son poids moyen étant évalué par M. Coignet à 70 kil., il dépensait dans la journée un travail $= 70^{k} \times 310 \times 13 = 70^{k} \times 4030^{m} = 282100^{km}$. Les 0.946 de ce travail, grâce à l'extrême simplicité de la machine, ont effectivement représenté le travail dû à l'élévation des matériaux, ou l'effet utile du système.

Enfin, il résulte d'observations du docteur *Forbes* que h étant la hauteur verticale en mètres dont un homme non chargé peut s'élever en une *heure*, α l'angle de la rampe, on a

$$h^{\text{mèt.}} = \left\{ \frac{580}{\sin.(\alpha + 5^{\circ})} - 245 \sin.\alpha \right\} \sin.\alpha \text{ par heure,}$$

et ce travail peut durer huit heures chaque jour *au moins*, et se renouveler tous les jours.

Quand l'angle α est nul, h devient une distance horizontale qui correspond à 6500 mèt.; si, au contraire, l'homme monte une échelle verticale $\alpha = 90^{\circ}$, $\sin.(\alpha + 5^{\circ}) = \sin.95^{\circ} = \cos.5^{\circ}$; $\sin.\alpha = 1$ et $h = 330$; de sorte que, d'après ces observations, l'homme éprouverait une même fatigue pour s'élever de 1 mèt. verticalement, et pour progresser horizontalement de $19^{m}.7$ ou 20 mèt. en nombre rond, rapport qui diffère encore des deux évaluations précédentes.

Les plus grandes valeurs de h correspondent d'ailleurs à des rampes comprises entre 20° et 30°, on a alors $h =$ environ 450 mèt. par heure, de sorte que, en élevant la durée du travail à 9 heures, l'homme pourrait sur de telles rampes monter tous les jours à

4050 mèt.; résultat qui concorde assez bien avec celui qui a été obtenu par M. *Coignet*.

Vitesse sans charge ou avec faible charge. La vitesse d'un homme qui *se promène* en plaine, sans charge, est de $1^m.30$ à $1^m.60$. Dans une forte journée de marche, il peut parcourir facilement 50000 et, au besoin, 54000 mèt. tous les jours.

Le soldat de l'Empire portait habituellement, savoir : son habillement, y compris la capote, $7^k.13$ + fusil, baïonnette et bretelle, 4^k 814 + giberne garnie, $1^k.233$ + sac garni, $5^k.503$, total $18^k.680$; souvent, en outre, deux paquets de cartouches dans le sac, $1^k.323$ + pain pour quatre jours et viande pour deux jours, $4^k.169$. La giberne garnie pèse quelquefois $2^k.556$, et le grenadier portait en outre deux épaulettes, un sabre et un baudrier pesant ensemble $1^k.706$.

En troupe, il parcourait

au pas ordinaire,	50 mèt. par minute, soit vitesse	$0^m.8$
au pas accéléré,	66.	$1^m.10$
au pas de course,	130.	$2^m.10$

La longueur du pas ordinaire et du pas accéléré est sensiblement la même et $= 0^m.66$.

Portage à dos, horizontal et vertical. Dans le transport horizontal, l'effet utile maximum paraît correspondre à des charges de 60 kil. et le produit de la distance, horizontalement parcourue par la charge, est alors de 692400 $k'm'$. (J'accentue les initiales de kilogrammemètre, afin que ces résultats ne soient pas confondus avec le travail d'élévation *verticale* des charges.)

D'après Coulomb, des portefaix ne pourraient, deux jours de suite, faire six voyages par jour à 2000 mèt., chargés en allant d'un poids de 58 kil., et revenant à vide.

De forts colporteurs lui ont affirmé que tout le chemin qu'ils pourraient parcourir en une journée, sous une charge de 44 kil., était de 18000 à 20000 mèt., soit effet utile de la journée 792000 $k'm'$ à 880000 $k'm'$

D'après M. l'ingénieur *Gervoy*, dans certaines mines de houille, les porteurs à dos transportent le combustible dans des sacs qu'ils tiennent d'une main, tandis qu'ils s'appuient de l'autre sur un bâton. Ils portent ainsi de 50 à 75 kil. dans les parties de niveau, 40 seulement dans les montées de 45 à 50 degrés d'inclinaison, disposées en escaliers. Le produit de la charge par la distance utile journellement parcourue varie de 192000 à 304000.

Une pente descendante en deçà de 13° favorise le transport; mais au delà, elle est moins avantageuse qu'un terrain de niveau, et, quand elle dépasse 20°, le transport à la descente est aussi pénible, au moins, que s'il fallait remonter la pente.

Dans la mine du Breuil, exploitée à ciel ouvert, chaque porteur

fait quarante voyages par jour sous une charge de 60 kil. qu'il élève à $24^m.27$ par une pente assez roide. — Il reçoit 2 fr. par jour, et fait un travail utile = 58248 *km*, résultat qui dépasse celui 56160 *km* admis dans les tables.

Dans la mine de Roche-Molière, chaque porteur se charge de 51 kil. parcourt 14 mèt. horizontalement, puis 22 mèt. sur une rampe de 20°. — Il fait cent trente-cinq voyages par jour, et gagne 2 fr. 30 c. travail utile =(61499.8 *km* + 238771.8 *k'm'*). Ce résultat dépasse considérablement celui que donnent les tables.

D'après M. *Guenyveau*, au contraire, l'effet utile journalier d'un manœuvre qui monte de la houille par un escalier très-roide, ne doit être évalué que de 42000 à 50000 *km*, et la charge par voyage ne dépasserait pas 35 à 40 kil.

Portage à dos sur crochets. On estime que le travail utile maximum d'un crocheteur, correspond à des charges d'environ 55 kil.

Coulomb ayant demandé aux crocheteurs qui montaient son bois quel était le plus grand travail journalier de ce genre dont ils étaient capables, le plus fort d'entre eux répondit que *une fois*, il avait monté dans un jour dix sept voies de bois à un premier étage, dont il estimait la hauteur à 5 mèt., et qu'il avait été ensuite deux jours sans pouvoir travailler. On ne pourrait, à ce compte, obtenir d'un fort crocheteur un travail *utile* journalier = 66640 kil. mèt.

Coulomb n'a pu parvenir à faire monter par le même homme plus de 4404 kil. à 12 mèt. de hauteur dans la journée.

Ce crocheteur montait chaque voie, ou 734 kil., en onze voyages moyennement, savoir en dix voyages les premières, et en douze voyages les dernières. Il élevait à chaque voyage, en $1^m.1$, $66^k.7$, ou mieux, à cause du poids des crochets, 68 kil. à 12 mèt., et faisait ainsi soixante-six voyages dans sa journée. — Il mettait à descendre l'escalier et à charger les crochets à chaque voyage, $4^m.8$; d'où travail utile journalier $= 66 \times 12 \times 68 = 53856$ *km*.

On admet qu'en moyenne un manœuvre qui élève des matériaux sur son dos et qui revient à vide chercher de nouvelles charges est capable d'un travail utile journalier = 56160 *km*. En prenant 702000 *k'm'* pour le travail utile journalier du porteur à dos en chemin *horizontal*, lorsqu'il revient à vide chercher de nouvelles charges, on trouve que l'homme *chargé* éprouve encore la même fatigue pour s'élever à 1 mèt. de hauteur que pour parcourir horizontalement avec sa charge $12^m.50$; c'est l'un des rapports déjà trouvé pour l'homme *non chargé*.

Traîneur sur le sol. Sur un sol assez inégal et argileux, un homme peut, à l'aide d'un traîneau chargé de 90 kil., transporter vingt-quatre fois ce poids dans sa journée à 290 mèt. et ramener le traî-

neau vide; ce qui donne pour l'effet utile journalier de ce mode de transport, d'après M. Guenyveau, 626000 *k'm'*.

Rouleur sur le sol. Un traîneur attelé à une benne à l'aide de bricoles, aidé d'un enfant qui pousse par derrière, font un travail utile jornalier qui varie de 400000 à 800000 kil. transportés horizontalement à 1 mèt, suivant l'état du chemin. — La charge ordinaire correspondante à de bons chemins à peu près de niveau est de 120 kil. indépendamment du poids de la benne.

Charrette à bras et à bricole. L'effet utile journalier de ce mode de transport en terrain horizontal s'élève, d'après M. Guenyveau, à 2300000 *k'm'*.

Rouleurs sur chemins de bois. Avec des chariots bien construits et roulant sur des plateaux de bois dont la pente est de 0.03 à 0.04, un homme peut pousser en descendant 4 à 500 kil. de minerai et remonter le chariot vide.

A l'aide d'un petit chariot porté sur quatre roues très-petites roulant sur des planches en terrain de niveau, l'effet utile journalier, d'après M. Guenyveau, serait de 900000 *k'm'* à un million de *k'm'*. — Lorsqu'il y a des inégalités sur le sol supposé d'ailleurs horizontal, l'effet utile se réduit à 600000 *k'm'*.

En faisant usage de chariots du poids de 120 kil. montés sur quatre roues en bois cerclées de fer feuillard ayant diamètre à l'avant $0^m.22$ et à l'arrière $0^m.28$, circulant sur deux lignes de madriers en pin de $0^m.06$ épaisseur et $0^m.35$ largeur, chevillés sur d'autres madriers semblables et transversaux, la pente du chemin étant 0.035 en faveur de la charge, les essieux de $0^m.0026$ diamètre, étant graissés d'huile d'olive, quatre rouleurs transportent tous les jours à 190 mèt. de distance 171 fois la charge de 400 kil.; d'où, distance totale parcourue dans sa journée par chaque rouleur = 16245 mèt. et effet utile journalier d'un rouleur aidé par cette pente 3249000 *k'm'*.

Rouleurs sur chemins de fer. On peut admettre que, sur une voie de fer formée simplement de bandes clouées sur deux lignes de solives en chêne reposant sur des traverses, on obtient d'un rouleur un effet utile journalier = 5705700 *k'm'*.

M. l'ingénieur *Gervoy* a trouvé qu'à la mine de Roche-la-Molière, un homme, aidé par une pente de 0.002, traînait *aisément* sur un tel chemin de fer 600 kil. de houille à 232 mèt. et faisait 40 voyages par jour; ce qui donne pour l'effet utile journalier 5568000 *k'm'*.

Un homme peut charger un wagon vide d'une capacité $0^{mmm}.357$ de 600 kil. de minerai en 18 à 24 minutes, le rouler plein et pesant alors 1000 kil. sur un chemin de fer de niveau à la distance de 1050 mèt. en 17^m, le vider en 7 à 8 minutes, le ramener vide en 12^m, faire ainsi six voyages complets dans sa journée de 8 heures, et, en outre, graisser ses essieux, charger ses outils. Il parcourt ainsi

12593 mèt.; transporte 3600 kil. et donne en 7 heures de travail effectif = 3 777 840 kil. transportés horizontalement à 1 mèt., non compris le travail accessoire.

Brouetteur. D'après les données de *Vauban*, un brouetteur peut journellement transporter $14^{mmm}.79$ de terres à $29^{m}.226$ de distance en cinq cents voyages. Ainsi, il parcourt chargé 14613 mèt. et autant en ramenant la brouette vide. *Coulomb* a trouvé qu'au point où les hommes saisissent les bras de la brouette chargée et qui est situé à $1^{m}.50$ environ de l'essieu, l'effort est de 18 à 20 kil., et qu'il se réduit 5 à ou 6 kil. lorsqu'elle est vide. La charge des brouettes est d'ailleurs de 70 kil. et leur poids propre = 30 kil. Le produit des poids transportés par la distance horizontale qu'ils parcourent donne 1022700 $k^{l}m^{t}$. Ce résultat est un peu plus faible que celui 1080000 qui est indiqué dans les tables.

En rapprochant cet effet utile de celui qu'il a obtenu pour les portefaix, Coulomb conclut que, en chemin horizontal, cent hommes avec des brouettes font, à peu de chose près, le travail de cent cinquante hommes avec des hottes.

Il paraît, du reste, d'après les observations de M. *Combes*, que l'effet utile journalier du transport à la brouette peut être notablement augmenté en chargeant la brouette de cent kilogrammes.

Cependant, je trouve dans une de mes notes, et sans pouvoir me rappeler où je l'ai prise, que, un brouetteur, dans la mine de..., mène une charge précisément de *cent* kil. à 200 mèt. de distance moyenne, et qu'il ne fait ainsi que trente-six voyages par jour sans relais et en roulant sur le sol même. — Son effet utile journalier n'atteint donc à ce compte que 720000 $k^{l}m^{t}$.

Il semblerait, néanmoins, que le brouettage serait en général préférable au traînage dans les mines, si le déchargement des brouettes n'entraînait point des déchets de matières quelquefois importants.

Extraction des puits. En puisant de l'eau dans un puits de 37 mèt. profondeur au moyen d'un double seau, un homme a pu élever, deux jours de suite, cent vingt seaux chaque jour. L'effort qu'il exerçait sur la corde était = 16 kil. d'où travail dépensé = $16 \times 120 \times 37 = 71000$ *km*. On compte, cependant, dans les tables, qu'un manœuvre, qui élève ainsi des poids à l'aide d'une corde et d'une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide, exerce un effort moyen = 18 kil., donne à la corde une vitesse $= 0^{m}20$, et fait, dans une journée de 6 heures, un travail utile = 77760 *km*.

Cabestan. L'effort exercé par un homme sur la barre d'un cabestan est moyennement de 12 kil. et peut être porté à 20 kil. pendant un temps assez long, la vitesse qu'il prend, si le rayon n'a pas moins de $2^{m}.25$ à $2^{m}.50$, est d'environ 0.90. L'effet utile journalier, évalué dans quelques tables à plus de 200000 $k^{l}\ m^{t}$, est réellement inconnu.

Une observation de *Hachette* donne 100000 *km* seulement, le travail journalier étant d'ailleurs partagé en quatre relais de $1^h.20^m$ chaque. Mais cette observation, faite à Bicêtre, a porté sur des hommes infirmes, mal nourris, *la plupart épileptiques*.

Halage à la bricole. Suivant Perronet, un seul homme tire à la bricole sur un canal un bateau chargé de 50000 kil. et lui fait parcourir en dix jours 110000 mèt. L'effet utile journalier serait ainsi = 550 000 000 *k' m'*.

Travail à la manivelle. D'après Coulomb, on évalue à 12 ou à 13 kil. l'effort exercé par un homme sur une manivelle ; toutefois, dans un travail continu, il réduit cet effort à 7 kil. et estime que, alors, les travailleurs ne font guère que vingt tours par minute, la circonférence décrite n'ayant que $2^m.30$ et le nombre d'heures de travail effectif étant réduit à six. Il en résulte, travail dépensé

$$= 7 \times 2.3 \times 20 \times 360 = 116000\ km.$$

Les tables admettent un effort moyen = 8 kil.; vitesse du bouton de la manivelle = $0^m.75$; durée du travail journalier = 8 heures, ; effet utile journalier = 172800 *km*.

On a encore observé dans l'extraction du minerai par des puits souterrains, que le travail utile journalier de l'homme appliqué à la manivelle d'un treuil s'était élevé moyennement à 149750 *km*. Le travail absorbé par les résistances passives a été $\frac{1}{8}$ du travail total.

Emerson affirme que le travail utile d'*un* homme à la manivelle étant trois, celui de *deux* hommes s'élève facilement à sept, lorsque les deux manivelles sont disposées à angle droit sur le même arbre.

Battage des pilots. Les moutons ordinaires pesant de 350 à 450 kil., les hommes élèvent le mouton d'à peu près $1^m.10$, et l'on bat à peu près vingt coups par minute; après quoi les hommes se reposent autant de temps qu'ils ont travaillé. — Malgré ce repos, on est obligé de les relever le plus souvent d'heure en heure. Coulomb n'a jamais vu de travailleur pouvant résister à plus de trois heures de travail effectif dans la journée. On met ordinairement sur la sonnette un nombre d'hommes tel que chacun d'eux élève 19 kil. du mouton. Il en résulte pour l'effet utile journalier 75200 *km*.

A la Monnaie de Paris, où l'on frappait autrefois les pièces avec un mouton, Coulomb avait trouvé : poids du mouton élevé par deux hommes, 38 kil.; poids élevé par chacun, 19 kil.; élévation du mouton à chaque coup, $0^m.40$; nombre de coups par journée, 5200 : d'où effet utile journalier par homme = 39500 *k m*, quantité qui dépasse peu la moitié de la précédente.

Batteur au fléau. D'après M. *Gosselin*, le poids moyen d'un fléau est 1 kil.; le batteur élève le fléau à chaque coup à $2^m.50$ environ et il lui imprime, en outre, de haut en bas, une vitesse qui peut être

regardée comme due à la même hauteur, d'où travail par coup $= 1^k(2.5 + 2.5) = 5^{km}$, le nombre de coups est quarante par minute, la durée journalière du travail 10 heures, y compris le temps consacré à étendre les gerbes et à les retourner, temps qui appartient au travail.

Les cultivateurs, qui ne comptent point en kilogrammes-mètres, s'accordent sur ce résultat d'expérience : un ouvrier dont le fléau marche à quarante coups par minute, bat trente-trois gerbes dans sa journée de 10 heures.

Travail à la bêche. D'après Coulomb, qui ne donne d'ailleurs ce résultat que, à titre d'approximation, un travailleur à la bêche fait pour l'enfoncer de $0^m.25$ un effort moyen = 15 kil. et répète le même travail 14316 fois par journée; en outre, il élève autant de fois 6 kil. de terre, plus $1^k.7$ = poids de la bêche à $0^m.40$, d'où

travail dépensé pour enfoncer la bêche.	53600
travail pour retourner la terre.	43000
travail journalier, total.	96600 *km*

il s'agit ici d'un excellent laboureur.

Terrassier. On compte qu'un manœuvre, qui élève des terres à la pelle à la hauteur de $1^m.60$, produit en une journée de 10 heures un travail utile = 38880 *km*, je n'ai pas même obtenu la moitié de ce résultat, d'ouvriers lucquois constamment surveillés, mais très-mal nourris et sous le climat de la plaine orientale de la Corse.

Rameur. D'après D. Bernouilli, un homme qui rame développerait en 8 heures sur 24, un travail de 275000 *km*.

Roues à marche. Ces roues offrent sur leur contour extérieur des planchettes saillantes comme les aubes planes des roues hydrauliques. Les travailleurs s'élèvent sur ces palettes comme sur les marches d'un escalier en se tenant avec les mains à des tringles horizontales. Leur poids fait alors tourner la roue. La hauteur du pas est d'environ $0^m.20$, le nombre de pas par minute a varié dans les divers établissements de 35 à 87, les chemins parcourus dans la journée de 2229^m à 5352^m, et l'effet utile journalier par homme, de 143643 à 342528 *km*, d'après M. Ch. Dupin.

HOUILLE. (*Voyez* COMBUSTION et COMBUSTIBLES, pag. 356 à 374.)

HUNTSMAN (BENJAMIN), né dans le Yorkshire en 1704, mort en 1776. — Huntsman est le créateur de la méthode par laquelle on obtient encore aujourd'hui l'*acier fondu*.

HYDROGÈNE. Corps simple, gazeux, sans couleur, sans odeur lorsqu'il est parfaitement pur, mais qui acquiert une odeur désagréable par son mélange avec de faibles quantités de matières étrangères. Le poids de l'air étant pris pour unité, celui du gaz

hydrogène pur est au plus = 0.0688. C'est donc le plus léger de tous les corps connus, qualité qui le rend très-propre à remplir les aérostats.

Bien qu'il éteigne les corps en combustion, il est lui-même éminemment combustible, ce qui lui valut, de la part des anciens chimistes, le nom d'*air inflammable*. Sa combustion reproduirait de l'eau ; elle n'est guère déterminée qu'à la chaleur rouge et elle produit une température extrêmement élevée. Suivant M. *Despretz*, la quantité de chaleur dégagée pour chaque gramme d'oxygène absorbé par l'hydrogène, lorsqu'il brûle, est capable d'élever 2578 grammes d'eau de 1 degré du thermomètre centigrade.

MM. *Silberman* et *Fabre*, dans des expériences plus récentes, sont parvenus à un résultat bien supérieur. D'après ces habiles expérimentateurs, la combustion de 1 gramme d'*hydrogène* dégagerait assez de chaleur pour élever 34462 grammes d'eau de 1°, ce qui revient à 4307.7 grammes d'eau élevés de 1° pour chaque gramme d'*oxygène* absorbé par la combustion.

Préparation. On obtient le gaz hydrogène des laboratoires par le procédé suivant : à un flacon d'un litre à deux tubulures adaptez sur l'une d'elles un tube recourbé qui permette de recueillir le gaz sur l'eau bouillie, et sur l'autre, un tube droit de 0m.003 de diamètre qui plonge jusqu'au fond du flacon et s'élève au dehors jusqu'à 0m.12 à 0m.15 ; — mettez dans le flacon 40 à 50 grammes de zinc et une quantité d'eau qui ne le remplisse qu'aux deux tiers ; — versez alors par le tube droit, et peu à peu, de l'acide sulfurique concentré ; — une vive effervescence se manifestera ; — l'eau se décomposera, son hydrogène deviendra libre, son oxygène transformera le zinc en protoxyde qui formera avec l'acide du sulfate de protoxyde de zinc en dissolution ; — il y aura un grand dégagement de chaleur ; — il convient de laisser perdre les premières parties de gaz qui auront passé par le tube recourbé. — Enfin, on ne doit guère préparer l'hydrogène qu'au moment du besoin.

HYDROGÈNE SULFURÉ, *acide hydrosulfurique*, *acide sulfhydrique* ou même *sulfide hydrique*, réactif très-important que l'ANALYSE emploie surtout pour reconnaître les oxydes métalliques. Il est formé de soufre 94.176 + hydrogène 5.824 = 100 acide hydrosulfurique.

Préparation. On l'obtient pour l'usage des laboratoires en attaquant le sulfure de calcium par l'ACIDE chlorhydrique (p. 2). Mis en contact avec le sulfure, l'acide dégage l'hydrogène sulfuré, même sans application de la chaleur, et le résidu est du chlorure de calcium. 100 de sulfure peuvent donner jusqu'à 46 d'hydrogène sulfuré.

Quant à la *préparation du sulfure de calcium*, elle est assez simple : il suffit de mélanger dans un creuset 100 de plâtre cuit (sulfate de

chaux) réduit en poudre impalpable avec 20 de charbon de bois sec et en poudre, puis de chauffer le tout pendant 2 heures dans un fourneau à vent ou dans un four. Le sulfate de chaux réduit par le charbon passe à l'état de sulfure de calcium.

Précautions. Il faut, lorsqu'on dégage de l'hydrogène sulfuré, prendre les plus grands soins pour se soustraire à l'action excessivement délétère qu'il exerce, et l'un des meilleurs moyens consiste à dégager lentement du chlore dans le laboratoire.

Les réactions, tout à fait caractéristiques de l'hydrogène sulfuré, sur les dissolutions métalliques, jouent un rôle si important dans les analyses que nous ne pouvons nous dispenser d'en reproduire ici le résumé, d'après *Rose*. Elles sont basées sur l'insolubilité de la plupart des sulfures métalliques dans l'eau et dans les dissolutions des sels, et sur la transformation des oxydes en sulfures par l'acide hydrosulfurique qui opère ainsi la précipitation complète des métaux en dissolution suivant, toutefois, que cette dissolution est acide, neutre ou alcaline.

1. *Oxydes métalliques que l'acide hydrosulfurique* ne précipite pas de leurs dissolutions acides et *précipite de leurs dissolutions alcalines*, à l'état de sulfures.

Tous les oxydes du manganèse ;
L'oxyde ferreux et l'oxyde ferrique;
—— zincique;
—— cobaltique;
—— niccolique;
Les oxydes uraneux et uranique.

2. Les *dissolutions neutres* des *alcalis* purs et des *terres alcalines* sont converties en sulfures métalliques par le gaz sulfhydrique, mais la nouvelle combinaison reste dissoute, soit à l'état de sulfure, soit à l'état de sulfhydrate.

3. Les *dissolutions neutres des sels* produits par les alcalis et par les terres alcalines n'éprouvent aucune altération de la part du gaz sulfhydrique.

4. Les *oxydes métalliques* qui suivent sont précipitables à l'état de sulfures métalliques de leurs dissolutions *étendues* et rendues *acides* par le gaz sulfide hydrique;

Oxyde cadmique;
—— plombique;
—— bismuthique;
—— cuivreux et cuivrique;
—— argentique;
Oxydes mercureux et mercurique;
Oxyde palladeux;

Oxyde rhodique;

—— osmique.

5. Les suivants ne sont souvent précipités de la même manière et au même état qu'après un assez long espace de temps :

Oxydes platineux et platinique;

Oxyde iridique;

—— aurique;

Oxydes stanneux et stannique;

—— de l'antimoine;

—— du molybdène,

Oxyde tungstique;

—— tellurique;

Acide sélénieux;

—— arsénieux et arsénique;

Quant au gaz sulfhydrique lui-même, il est toujours facile à reconnaître à son odeur d'œufs pourris; on s'assurerait encore plus sûrement de sa présence dans une dissolution par le précipité qui s'y formerait en y versant celle d'un oxyde métallique; on devra préférer à toute autre celle de l'oxyde plombique qui formera un précipité noir.

HYPERBOLE. (*Planche* LXXXI, *fig.* 1.) Courbe telle que la différence ($Mf - MF$) des distances d'un point quelconque M de son périmètre à deux points fixes fF soit constante et égale à une droite donnée $BA = 2a$.

Définitions et notations. Les points fixes fF sont les *foyers* de l'hyperbole; — $AB = 2a = (Mf - MF) = (v - v')$ est son *axe principal* ou son *premier axe*, — C son centre, — A, B les *sommets* de l'axe principal, — $KK' = p =$ son *paramètre* ou la double ordonnée qui passe par un foyer f ou F; — $FA = fB = z =$ la distance d'un foyer au sommet le plus voisin; — z' la distance de ce foyer au sommet le plus éloigné $= fA = FB$; — $FC = fC = c =$ la distance $(a + z)$ d'un foyer au centre; — $fM = v$, $FM = v'$ les *rayons vecteurs* du point quelconque M du périmètre ou les distances respectives de ce point aux foyers f et F. — Enfin, on appelle *second axe* de l'hyperbole la perpendiculaire DD' au milieu C de l'axe principal, et dont la moitié $CD = b$ est telle que l'on ait $b = \sqrt{2az + z^2}$, c'est-à-dire que, par définition, le demi-second axe est une moyenne proportionnelle entre les distances z et $2a + z$ d'un même sommet aux deux foyers f et F.

On nomme encore *diamètre* toute droite qui, passant par le centre C, est terminée de part et d'autre aux hyperboles.

Equations. L'origine des coordonnées étant au sommet A, on a facilement pour l'équation de la courbe

$$a^2y^2 = (2az + z^2)(2ax' + x'^2) = b^2(2ax' + x'^2). \quad (1)$$

c'est au signe près de x'^2 la même équation que celle de l'ELLIPSE, pag. 607.

En transportant l'origine au centre C, l'équation de l'hyperbole devient

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots \ldots \quad (2)$$

car il y a évidemment, entre les abscisses x' comptées du sommet A et les abscisses x prises à partir du centre C, la relation

$$x = a + x' \ldots \ldots \quad x' = x - a \ldots \ldots \quad (3)$$

La *distance* $c = a + z$ *d'un foyer au centre*, ou ce que, par analogie avec l'ellipse, on appelle l'*excentricité* de l'hyperbole, est en fonction des demi-axes

$$c = \text{CF} = \text{C}f = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \ldots \ldots \quad (4)$$

d'où l'on voit que le carré de la distance fF des foyers égale la somme des carrés des axes

$$\overline{f\text{F}}^2 = (2a)^2 + (2b)^2 = (2c)^2 \ldots \ldots \quad (5)$$

Les distances v v' des foyers fF à un point M quelconque dont l'abscisse est x ou les *rayons vecteurs* fM FM de ce point sont respectivement

$$v' = \frac{cx}{a} - a; \ldots \quad v = \frac{cx}{a} + a \ldots \quad v' - v = 2a$$

$$vv' = \frac{c^2x^2}{a^2} - a^2 \ldots \ldots \quad (6)$$

Si l'on désigne par z z' les distances respectives FA FB d'un même foyer F aux sommets A et B de l'axe principal, on a

$$\text{FA} = z = c - a \ldots \quad \text{FB} = z' = c + a$$

et comme $(c - a)(c + a) = c^2 - a^2$, on retrouve pour la valeur du demi-second axe (4), conformément à sa définition

$$b^2 = zz' \ldots \ldots \quad b = \sqrt{zz'} \ldots \ldots \quad (7)$$

le triangle rectangle DAC donnant

$$\overline{\text{DA}}^2 = b^2 + a^2 = c^2 - a^2 + a^2 = c^2 \ldots \ldots \quad (8)$$

il en résulte que la distance c d'un foyer au centre égale la distance AD d'un sommet A à l'extrémité du second axe ; cette relation permet de trouver les foyers quand on a les axes, ou bien le second axe quand on a le premier et les foyers.

Paramètre. Si l'on fait $x' = z$ dans l'équation (1) au sommet,

on trouve pour la valeur correspondante de $y=\frac{b^2}{a}$; doublant cette ordonnée, on obtient pour la valeur p du *paramètre* KK'

$$p=\frac{2b^2}{a}=\frac{2b.2b}{2a}=4z+\frac{2z^2}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

le paramètre du premier axe est donc plus grand que quatre fois la distance z du foyer au sommet voisin; il est troisième proportionnelle au second axe et au premier.

On a encore évidemment

$$\frac{p}{a}=2\frac{b^2}{a^2}$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1) au sommet et dans l'équation (2) au centre, donne pour les équations *au paramètre*

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'+x'^2)=\frac{p}{2a}(x^2-a^2)\ldots\ldots (10)$$

Si l'on voulait l'équation de l'hyperbole en prenant le second axe pour celui des x_1, l'origine étant à l'extrémité D de cet axe, on aurait $CP'=y=b-x_1$ $P'm=y_1=a+x'$ et dès lors $x'=y_1-a$; substituant ces valeurs dans l'équation (1); il viendrait

$$y_1^2=\frac{a^2}{b^2}(x_1^2-2bx_1+2b^2)\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Lorsque les deux axes de l'hyperbole sont égaux, l'hyperbole est dite *équilatère*, son équation devient alors

$$y^2=2ax'+x'^2=x^2-a^2\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

et son paramètre = l'un des axes; $p=2a$.

Equation polaire. v' étant le rayon vecteur mené d'un point quelconque M au foyer le plus voisin F, et θ l'angle CFM compris entre l'axe des x et la direction de v', e le rapport de l'excentricité c au demi-grand axe, on a

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a};\quad c=ae\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

et pour l'équation polaire de l'hyperbole

$$v'=\frac{c^2-a^2}{a+c\cos.\theta}=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos.\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Normales, tangentes, etc. L'emploi de la méthode générale exposée au mot *Courbes*, donne facilement les valeurs suivantes de la sous-normale PI, de la normale MI, de la sous-tangente PT, et de la tangente MT à un point quelconque M dont l'abscisse est désignée

par x' ou x, suivant que l'on porte l'origine au sommet A ou au centre C

$$\text{sous-normale} = \frac{b^2}{a^2}(a+x') = \frac{b^2}{a^2}x \text{ . . . . } (15)$$

$$\text{normale} \left\{ \begin{aligned} &= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax'+x'^2)+\frac{b^4}{a^4}(a+x')^2} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+x^2-a^2\right)} \text{ . . . . .} \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\text{sous-tangente} = \frac{2ax'+x'^2}{a+x'} = \frac{x^2-a^2}{x} \text{ . . . . . . } (17)$$

$$\text{tangente} \left\{ \begin{aligned} &= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax'+x'^2)+\left(\frac{2ax'+x'^2}{a+x'}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2}+x^2-a^2\right)} \text{ . . .} \end{aligned} \right\} (18)$$

Si de l'abscisse $CP = x$ on retranche la sous tangente, on a pour la distance CT du centre au point où la tangente rencontre l'axe des abscisses

$$CT = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{a+x'} \text{ . . . . } (19$$

et si l'on prolonge la tangente MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le second axe en T', on a de même

$$CT' = \frac{b^2}{y} \text{ . . . . } (20)$$

Rayon de courbure. Comme dans les autres sections coniques, on a pour le rayon ρ de courbure au point M dont l'abscisse est x, N étant la valeur de la normale MI à ce point

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{(\text{normale})^3}{(\text{demi-paramètre})^2} = \frac{N^3}{\frac{1}{4}p^2} \text{ . . . .} \\ \rho &= \frac{\sqrt{\left(\frac{x^2c^2}{a^2}-a^2\right)^3}}{ab} = \frac{\sqrt{(vv')^3}}{ab} \text{ . . . .} \end{aligned} \right\} (21)$$

En faisant $x = a$, on trouverait $\rho = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire que le rayon de courbure au sommet de l'hyperbole est égal au demi-paramètre.

L'*aire de l'hyperbole* comprise entre le sommet A et une double

ordonnée quelconque $2y$ dont l'abscisse au sommet est x', est, d'après l'équation et ce qu'on a vu au mot *Courbes*

$$2\frac{b}{a}\int dx'(2ax'+x'^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\sqrt{px'}\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{10}\frac{x'^2}{a}-\frac{x'^3}{112a^2}+\frac{x'^4}{576a^3}-\ldots\right)\text{(22)}$$

De l'hyperbole entre ses asymptotes. Il résulte évidemment de la valeur (19) de CT que plus l'abscisse x augmente, plus le pied T de la tangente TM se rapproche du centre C, sans pouvoir toutefois jamais l'atteindre, puisque la fraction $\frac{a^2}{x}$ ne peut être absolument nulle tant que son numérateur ne s'anéantit pas.

Dans les mêmes circonstances, la tangente $\frac{\text{MP}}{\text{PT}}$ de l'angle formé par la tangente en M avec l'axe des abscisses ou

$$\frac{\text{MP}}{\text{PT}}=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\ldots\ldots\ldots\text{(23)}$$

se rapproche sans jamais l'atteindre de la limite $\frac{b}{a}$ à mesure que x augmente ou à mesure que le point M s'avance sur la courbe en s'éloignant du sommet A.

Donc, si par le point A on élève une perpendiculaire $\text{AL}=\text{AL}'=b$, et si l'on mène par L, L' et par le centre C des droites indéfinies, ces droites formant chacune avec l'axe des x un angle dont la tangente $=\frac{b}{a}$, comprendront entre elles toutes les tangentes qu'on pourrait mener à l'hyperbole, et cette courbe ne parviendra jamais à toucher la droite CL, quelque prolongement qu'on donne à l'une et à l'autre de ces lignes. Les droites CL CL' ainsi menées sont dites les *asymptotes* de l'hyperbole.

Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Soit M un point quelconque de la courbe dont $\text{CP}=x$ et $\text{PM}=y$ soient les coordonnées; par ce point M menons OMPo' parallèle au second axe, puis MQ parallèle à l'asymptote Co' ; désignons la nouvelle abscisse CQ par α, et la nouvelle ordonnée QM par ω; les triangles OQM, LCL' ayant leurs côtés parallèles, on a

$$\text{QO}=\text{QM}=\omega;\quad \text{OM}=\frac{2b\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}\ldots\ldots\text{(24)}$$

$$\cos.\text{OCP} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad \sin.\text{OCP} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x = \frac{(\alpha+\omega)\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad y = \frac{(\alpha-\omega)\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} \ldots \quad (25)$$

mettant ces valeurs de x et y dans l'équation au centre de la courbe, il vient pour l'équation aux asymptotes

$$\alpha\,\omega = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

$$\omega = \frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{\alpha} \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ainsi, le produit des coordonnées d'un point quelconque est une quantité constante, et l'ordonnée ω ne peut jamais devenir nulle.

Si du sommet A de la courbe, on mène les parallèles AG, AG′ aux asymptotes, on formera évidemment un losange dont les côtés AG, AG′ étant, par rapport aux asymptotes, les coordonnées du sommet A, donneront la relation remarquable

$$\text{AG} \times \text{AG}' = \overline{\text{GC}}^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2) \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

de sorte que l'on a pour un point quelconque M de la courbe

$$\text{CQ} \times \text{QM} = \overline{\text{CG}}^2 = \overline{\text{AG}}^2 = m^2 \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

en faisant $\text{AG} = m$. Ce carré constant $\overline{\text{AG}}^2 = m^2$, auquel le produit $\alpha\,\omega$ est toujours égal, était appelé par les anciens géomètres la *puissance de l'hyperbole*.

Les relations ci-dessus conduisent aux propriétés suivantes :

Si l'on tire par un point quelconque N de l'hyperbole une droite quelconque RNr terminée aux asymptotes, les parties NR, Nr interceptées entre les asymptotes et la courbe sont égales entre elles.

Toute tangente à l'hyperbole terminée aux asymptotes est divisée en deux parties égales au point de contact.

Les parties OM, MO′ d'une parallèle au second axe comprise entre les asymptotes, et passant par un point quelconque M forment un produit constant $\text{OM} \times \text{MO}' = b^2$.

Tous les parallélogrammes construits sur les coordonnées parallèles aux asymptotes sont équivalents entre eux et égaux à $\frac{ab}{2}$ moitié du rectangle des demi-axes.

Si les abscisses CG′, CL′, CO′ comptées sur l'asymptote d'une hyperbole quelconque, sont en progression géométrique croissante, les ordonnées G′A, L′l, O′o parallèles à l'autre asymptote sont en progression géométrique décroissante ayant même raison.

Si l'on prend les distances CL', CO' . . . en progression géométrique, les espaces asymptotiques G'L'lA, G'O'oA sont en progression arithmétique, et sont dès lors analogues aux *logarithmes* de ces distances. La nature du système de logarithmes dépendra de la valeur de l'angle formé par les deux asymptotes; l'angle correspondant aux logarithmes usuels ou vulgaires est celui

de 25°.44'.27".28"'.

Si l'hyperbole est équilatère, l'angle C est droit, son équation aux asymptotes (26) en y faisant $m = 1$, devient

$$\alpha\omega = m^2 = 1 \ldots\ldots\ \omega = \frac{1}{\alpha} \ldots\ldots \quad (29)$$

dès lors $\omega d\alpha = \frac{d\alpha}{\alpha}$ devient l'élément de l'aire asymptotique, ce qui explique comment on a

$$\int \omega d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha} = \text{logarithme hyperbolique de } \alpha. \quad (30)$$

Voyez *Intégrales* et *Logarithmes*.

Tracés et propriétés. Les demi-axes ab étant connus, les équations (1) et (2) fourniront autant de couples de valeurs de y, que l'on se donnera de valeurs de x; ce qui permettra de tracer l'hyperbole *par points*. Ces équations

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x'(2a + x')} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

montrent que, pour une même abscisse x, on a toujours deux ordonnées égales, l'une au-dessus, l'autre au-dessous du premier axe; — que la courbe a dès lors des branches symétriques par rapport à cet axe; — que ces branches sont infinies, puisque $+x$ croissant les $\pm y$ croissent en même temps; — qu'à des valeurs négatives de x' répondent des valeurs imaginaires de y, qui toutefois deviennent réelles dès que $-x'$ atteint la valeur $2a$ de l'axe principal; — qu'il part dès lors du point B une nouvelle portion de courbe en tout semblable à la première MAM' —.

On peut encore décrire la courbe par points en prenant arbitrairement une partie $Bq > BF$, et décrivant du point f comme centre et du rayon Bq un arc que l'on coupera en quelque point par un autre arc décrit de l'autre foyer F comme centre et du rayon Aq.

Ce dernier procédé suppose que l'on connaît la position des *foyers* fF; elle se trouve déterminée en fonction des demi-axes par l'équation (8) qui enseigne que la distance $c = FC$ d'un foyer au centre = celle AD du sommet à l'extrémité du second axe.

Si l'on ne donnait pour décrire l'hyperbole que le grand axe

$2a$ et le paramètre p, on ramènerait la question aux cas précédents, en tirant $2b = \sqrt{2ap}$ de l'équation (9).

Tangentes, normales, etc. Pour conduire une tangente à la courbe en un point donné M, menez de ce point les deux rayons vecteurs Mf, MF, la bisectrice MT de l'angle formé entre eux au point M, est tangente à la courbe en ce point; la perpendiculaire en M à la tangente est la *normale* MI à la courbe en ce point.

Rayon de courbure. Le rayon de courbure s'obtiendrait comme pour l'ellipse par le procédé de *Keil*, pag. 615.

I

IMAGINAIRES. On nomme ainsi les racines paires des quantités négatives telles que $\sqrt{-b}$, $a\sqrt{-b}$, $\sqrt[4]{-(a^2+b^2)}$, $\sqrt[2n]{-a}$. Ce sont de purs symboles qui, généralement, indiquent une absurdité dans la question qui les a donnés pour résultats définitifs, mais qu'on ne doit cependant pas négliger dans le cours des calculs, parce qu'en les combinant entre eux, on retombe souvent sur des résultats *réels*.

L'*addition* et la *soustraction* des radicaux imaginaires s'opèrent comme celles des autres RADICAUX. Lorsqu'ils sont semblables, on applique les règles données pour l'addition et la soustraction des quantités de même espèce. Lorsqu'ils sont différents, on ne peut qu'indiquer l'opération à faire. Ainsi

$\sqrt{-a} + \sqrt{-b}$ ne peut se simplifier; au contraire, on a

$$\sqrt[4]{-a} + 2\sqrt[4]{-a} = 3\sqrt[4]{-a}; \quad a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 2a;$$
$$6 + \sqrt{-4} + 6 - \sqrt{-4} = 12.$$

Multiplication. Tout radical imaginaire de la forme $\sqrt{-A}$ pouvant être mis sous celle $\sqrt{A} \times \sqrt{-1}$, il suffit, pour multiplier des radicaux imaginaires, de connaître le produit de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ Or, faire le carré de $\sqrt{-1}$, c'est ôter le signe $\sqrt{}$; on a donc

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

Si l'on avait à multiplier ce résultat de nouveau par $\sqrt{-1}$, il viendrait $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$, et ainsi de suite, *voyez* plus bas.

On trouverait ainsi :

$\sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b} = \sqrt{-ab}$ quantité imaginaire;

$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$ quantité réelle;

$(+\sqrt{-a})(-\sqrt{-b}) = -(\sqrt{-a}\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}$

$$(6+\sqrt{-4})(6-\sqrt{-4})=40$$
$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2$$
$$(a\pm\sqrt{-b})^2=a^2-b\pm 2a\sqrt{-b}$$

Division. La division s'opère à l'aide de la même décomposition. Ainsi

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{-1}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{a}{b}}$ que l'on peut mettre sous la forme $-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{a}{b}}$ en multipliant les deux termes de $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ par $\sqrt{-1}$

On a de même :

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}}=-\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} \text{ et } \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Si l'on avait à diviser $1+\sqrt{-1}$ par $1-\sqrt{-1}$, on pourrait multiplier les deux termes de $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ par $1+\sqrt{-1}$, et l'on trouverait $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$.

Puissances. Pour élever l'imaginaire $\sqrt{-A}$ à la puissance quelconque m, il suffit de savoir élever $\sqrt{-1}$ à la même puissance, puisque l'on a en général $(\sqrt{-A})^m=(\sqrt{A})^m(\sqrt{-1})^m$; or, un nombre quelconque divisé par 4 ne pouvant donner pour reste que 0, 1, 2 ou 3, n étant un nombre entier positif quelconque, tous les nombres seront représentés par $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, et toutes les puissances de $\sqrt{-1}$ seront données par le tableau suivant :

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1} \qquad (\sqrt{-1})^{4n}=+1$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad (\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1} \qquad (\sqrt{-1})^{4n+2}=-1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}$$

On trouverait ainsi

$$(1+\sqrt{-1})^2=2\sqrt{-1}$$
$$(a\pm\sqrt{-b})^2=a^2-b\pm 2a\sqrt{-b}$$

$$(a \pm \sqrt{-b})^3 = a^3 - 3ab \pm (3a^2 \mp b)\sqrt{-b}$$

$$(\sqrt{-3}-1)^3 = +8$$

$$(\sqrt[6]{-a})^2 = -\sqrt[3]{a}$$

On trouverait encore

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}; \qquad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = \frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

$$(a+b\sqrt{-1})^n(a-b\sqrt{-1})^n = (a^2+b^2)^n.$$

IMPULSION. Expression longtemps employée dans le langage de la mécanique dans divers sens peu nettement définis.

Les géomètres du dernier siècle, qui admettaient des FORCES instantanées (pag. 777), appelaient *impulsion* la *force* d'un corps agissant sur un autre avec une vitesse finie, pendant un temps infiniment petit ou au moins inappréciable. — Un coup de marteau, par exemple, était pour eux un choc instantané, et dès lors une impulsion et même une force d'impulsion.

Poisson, dans ses derniers ouvrages, reproduit et accepte cette définition du mot *impulsion*, avec cette restriction toutefois qu'il n'admet point l'instantanéité de la transmission. — Le CHOC d'un corps solide en mouvement contre un corps solide en repos, dit-il, imprime à celui-ci dans un temps très-court, mais *non pas infiniment petit*, une vitesse qui peut être quelquefois très-grande, et pendant cet intervalle de temps, les deux corps ne se déplacent pas sensiblement. « Cette communication rapide de la vitesse sans déplacement sensible des masses, est ce qu'on appelle une *percussion* ou « une *impulsion*. Elle équivaut à une force motrice agissant, pendant « un temps très-court avec une très-grande intensité. »

F étant une force constante, dt la durée infiniment petite de son action supposée instantanée, ou τ la durée très-courte, mais non pas infiniment petite de cette action, la *force d'impulsion* des anciens géomètres serait donc $= F\,dt$, et, suivant M. Poisson, l'*impulsion* serait $F\tau$.

Beaucoup plus récemment, M. *Belanger* a proposé, le premier je crois, d'étendre le sens du mot *impulsion* au produit de l'intensité d'une FORCE par la durée de son action, quelle que soit cette durée. Supprimant le mot *force* devant celui d'*impulsion*, cette expression *impulsion* ne signifie plus rien autre chose que le produit Ft, si la force est constante en intensité et direction, ou l'intégrale $\int F\,dt$, si

la force est variable d'intensité entre les limites de la durée de son action. En ce sens, l'équation (23) du mot *Force*, pag. 785, ou

$$\frac{P}{g}\,dv = F\,dt$$

intégrée entre deux vitesses et les temps correspondants montrerait que :

*La variation de la quantité de mouvement est numériquement et algébriquement égale à l'*IMPULSION *dans le même temps.*

Cette définition de l'*impulsion* paraissant devoir être définitivement admise dans le langage de la science, nous nous y conformerons dans tout le cours de cet *Aide-mémoire.*

INDÉTERMINATION, *valeurs des expressions qui deviennent*

$$\frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty.$$

On a vu (*Equations*) que lorsque le calcul d'une inconnue y conduisait à un résultat de la forme $y=\frac{0}{0}$; ce symbole était un *symptôme* d'indétermination. Toutefois, avant de conclure que y a, en effet, une valeur indéterminée, il faudra examiner avec soin comment on est parvenu à cette valeur $\frac{0}{0}$, et en particulier rechercher si cette forme n'est point le résultat de la disparition d'un facteur commun aux deux termes d'une fraction par suite d'une ou de plusieurs hypothèses faites sur les valeurs des lettres qui y entrent. Voici quelques règles qui dirigeront dans ces recherches, et qui feront connaître la vraie valeur de y. Soit en général

$$y=\frac{f(x,a,b\,..\,z)}{F(x,a,b\,..\,z)}$$

la valeur de y; le numérateur et le dénominateur désignant des FONCTIONS ou des combinaisons quelconques f, F, des quantités x, a, $b\,..\,z$, on démontre que :

Si deux ou plusieurs hypothèses *différentes*, telles, par exemple, que $a=x$ et $b=z$ réduisent le numérateur et le dénominateur à zéro, la valeur de y est réellement indéterminée;

Que, au contraire, si c'est une seule hypothèse ($x=a$, par exemple) qui réduit la fraction à la forme $\frac{0}{0}$, y a toujours une valeur déterminée qui peut d'ailleurs être nulle, finie ou infinie.

Soit, pour exemple, la fraction

$$y=\frac{P\,(x-a)^m}{Q\,(x-a)^n}$$

P et Q étant des expressions en x qu'on admet n'être pas nulles pour une même valeur de x. Si l'on suppose $x=a$, il vient

$$y=\frac{P\times 0}{Q\times 0}=\frac{0}{0}$$

mais cette indétermination n'est qu'apparente, car, si antérieurement à l'hypothèse, $x=a$, on divise les deux termes de la fraction par le facteur commun qui porte le plus petit exposant, l'on trouvera suivant que

$$m>n \qquad\qquad m=n \qquad\qquad m<n$$

$$y=\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q} \qquad y=\frac{P(x-a)^{0}}{Q} \qquad y=\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$$

valeurs qui, pour l'hypothèse $x=a$, deviennent déterminées, et respectivement celles-ci :

$$y=\frac{0}{Q}=\text{zéro} \qquad y=\frac{P\times 1}{Q} \qquad y=\frac{P}{0}=\infty=\text{l'infini}$$

Cela posé, pour trouver la vraie valeur des expressions qui, pour l'hypothèse $x=a$ par exemple, se présenteraient immédiatement sous la forme $\frac{0}{0}$, supposez un instant que $x=a+k$, ce qui revient à transformer le binôme $x-a$ en un monôme k qui le met en évidence. Substituez dans l'expression donnée, à la place de x, sa valeur hypothétique $a+k$. Développez (voyez *Séries*) suivant les puissances ascendantes de k le numérateur et le dénominateur. Réduisez la fraction résultante à sa plus simple expression, et pour revenir à l'hypothèse $x=a$, faites alors $k=o$ dans le résultat, et il exprimera la vraie valeur de la fraction proposée, lorsque $x=a$.

Exemples. Soit $y=\frac{1-x^n}{1-x}$. On demande quelle serait la valeur de y si x devenait $=1$.

On poserait $x=1+k$, il viendrait $y=\frac{1-(1+k)^n}{1-(1+k)}$, développant, il vient

$$y=\frac{1-\left\{1+nk+\frac{n(n-1)}{1.2}k^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}k^3+\ldots\right\}}{1-1-k}$$

réduisant, divisant ensuite haut et bas par k, puis faisant $k=0$, il vient

$$y=\frac{1-x^n}{1-x}=n \text{ lorsque } x=1$$

2° Il est évident que la même hypothèse $x = 1$ conduirait au même résultat si l'on avait $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

3° Soit à trouver la vraie valeur de $d = e + \frac{(af^t - m)(f-1)}{f^t - 1}$ dans l'hypothèse particulière où l'on veut faire $f = 1$ (pag. 562).

Supposons $f = 1 + k$, quitte à faire plus tard $k = o$. Il viendra

$$\frac{f-1}{f^t-1} = \frac{1+k-1}{(1+k)^t-1} = \frac{k}{-1+(1+k)^t}$$

développant $(1+k)^t$ d'après la formule du binôme (voyez *Séries*), il vient

$$\frac{k}{-1+(1+k)^t} = \frac{k}{-1+1+tk+\frac{t(t-1)}{1.2}k^2+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}k^3+..+k^t}$$

$-1+1$ se détruisent; divisant haut et bas par k, il vient

$$\frac{1}{t+\frac{t(t-1)}{1.2}k+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}k^2+...k^{t-1}}$$

faisant $k = o$ pour rentrer dans l'hypothèse $f = 1$, la dernière expression devient $\frac{1}{t}$, et, par suite, on a la vraie valeur

$$d = e + (af^t - m)\frac{(f-1)}{f^t-1} = e + \frac{a-m}{t} \text{ lorsque } f = 1$$

4° Soit encore $y = \frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ si l'on y suppose $x = c$, on trouve en suivant la règle ci-dessus $y = \frac{ak^2}{bk^2}$; si l'on faisait alors $k = o$, il viendrait $y = \frac{0}{0}$; mais on ne se serait point conformé au procédé ci-dessus qui prescrit de réduire la fraction à sa plus simple expression *avant* de faire $k = o$. En s'y conformant strictement, on trouve $y = \frac{a}{b}$, et c'est la vraie valeur de l'expression ci-dessus dans l'hypothèse $x = c$, on voit que k a disparu de lui-même.

De même $y = \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ devient pour $x = a$

$$y = \frac{0}{2a+0} \text{ ou zéro}$$

Et dans la même hypothèse $x = a$, on a pour

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a x^2 - a^2 x + a^3} \qquad y = \infty$$

On trouverait encore

$y = \infty$ si l'on supposait $x = a$ dans $y = \dfrac{a x - x^2}{a^4 - 2 a^3 x + 2 a x^3 - x^4}$

$y = \dfrac{b}{2}$; si l'on suppose $c = d$ dans $y = \dfrac{b(c - \sqrt{c d})}{c - d}$

car faisant $c = d + k$, le radical devient $\sqrt{d^2 + d k} = d + \frac{1}{2} k + k^2 S$
S étant une série donnée par l'extraction continuée de la racine.

$y = \dfrac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$ devient $y = \sqrt{8 a^3}$ dans l'hypothèse $x = a$

$\dfrac{(1 + x)^m - (1 + y)^m}{(1 + x) \;\; - (1 + y)}$ devient $m\,(1 + x)^{m-1}$ dans l'hypothèse $x = y$

Si l'on demandait ce que devient $y = \dfrac{a^x - b^x}{x}$ dans l'hypothèse de $x = o$, on pourrait être embarrassé pour appliquer la règle.

Il suffirait ici de développer a^x et b^x en *séries*, il viendrait

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{x(\log. a)}{1} + \dfrac{x^2 (\log. a)^2}{1 \,.\, 2} + \dfrac{x^3 (\log. a)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \\ - 1 - \dfrac{x (\log. b)}{1} - \dfrac{x^2 (\log. b)^2}{1 \,.\, 2} - \dfrac{x^3 (\log. b)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - \end{array} \right\}}{x}$$

réduisant, divisant haut et bas par x, puis faisant $x = o$, il vient

$$y = \frac{\log. a - \log. b}{1} = \log. \left(\frac{a}{b}\right)$$

le logarithme est naperien ou *hyperbolique*.

Enfin, on trouverait encore

$y = 1$ lorsqu'on fait $x = 1^q$ dans $y = \dfrac{1 - \sin. x + \cos. x}{\sin. x + \cos. x - 1}$

$y = \frac{16}{9}\, a$ quand on fait $x = a$ dans $y = \dfrac{\sqrt{(2 a^3 x - x^4)} - a \sqrt[3]{a^2 x}}{a - \sqrt[4]{(a x)^3}}$

$y = -\, 1$ lorsqu'on fait $x = 1$ dans $y = \dfrac{1 - x + \log. x}{1 - \sqrt{2 x - x^2}}$

$y = -2$ si l'on fait $x = 1$ dans $y = \dfrac{x^2 - x}{1 - x + \log. x}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ si l'on fait $x = a$ dans $y = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$y = -1$ si l'on fait $x = a$ dans $y = \dfrac{a - x - a \log. a + a \log. x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$

$y = 1$ si l'on fait $x = c$ dans $y = \dfrac{(x - c)\sqrt{x - b} + \sqrt{x - c}}{\sqrt{2c} - \sqrt{x + c} + \sqrt{x - c}}$

$y = \frac{1}{3}$ si l'on fait $x = a$ dans $y = \dfrac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3} + x - a}{(1 + x - a)^3 - 1}$

$y = -5a$ si l'on fait $x = a$ dans $y = \dfrac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$

Il y a des expressions qui semblent au premier examen prendre, en vertu d'une hypothèse, une forme différente de $\frac{0}{0}$, mais qui se traitent cependant de la même manière que les précédentes, parce qu'en effet elles n'en diffèrent point au fond.

Ainsi P et Q étant des expressions qui renferment x et a, il peut arriver que l'hypothèse $x = \omega$, par exemple, rende $P = o$ et $Q = \infty$. Si P et Q étaient multipliés entre eux, on aurait donc $P \times Q = o \times \infty$. Mais si l'on remarque que le facteur $Q = \infty$ peut être mis sous la forme $\frac{1}{0}$, on alors $P \times Q = \frac{0}{0}$. On cherchera donc à ramener de semblables expressions $P \times Q = 0 \times \infty$ à la forme $\frac{0}{0}$, en faisant $Q = \frac{1}{R}$, R étant nul lorsque $x = a$.

Ainsi, si l'on demandait la valeur de

$$(1 - x) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} \pi x$$

lorsque $x = 1$, le premier facteur deviendrait 0 dans cette hypothèse, et le second ∞ puisque la tangente de $\frac{1}{2}\pi$ est infinie, mais remarquant que, en général, $\text{tang.} = \dfrac{1}{\text{cotang.}}$, on pourra écrire l'expression ci-dessus sous la forme

$$(1 - x) \frac{1}{\text{cot. } \frac{1}{2} \pi x}$$

qui traitée comme ci-dessus deviendra $= \frac{2}{\pi}$ dans l'hypothèse $x = 1$.

Si l'on était conduit à $\frac{P}{Q}=\frac{\infty}{\infty}$; cette expression équivaut à $\frac{P}{Q}=\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=\frac{0}{0}$; on donnerait à P et à Q la forme $\frac{1}{R}$, R devenant nul pour l'hypothèse en question, et l'on traiterait le résultat comme ci-dessus.

Soit, par exemple,

$$\frac{\text{tang.}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) a(x^2-a^2)}{x^2} \text{ qui revient à } \frac{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a}\right)}{\frac{x^2}{a(x^2-a^2)}}=\frac{P}{Q}$$

l'hypothèse $x=a$ semble donner $\frac{P}{Q}=\frac{\infty}{\infty}$, mais si l'on met $\frac{1}{\text{cot.}}$ au lieu de tang., on a $\frac{a(x^2-a^2)}{x^2\text{ cot.}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$ qui, traitée comme ci-dessus, donne $\frac{P}{Q}=-\frac{4a}{\pi}$ pour $x=a$.

Enfin, si l'on tombait sur $P-Q=\infty-\infty$ en vertu d'une hypothèse sur une valeur de x, on remarquerait que cette expression peut provenir de $P-Q=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$, c'est-à-dire que P et Q sont originairement des fractions dont les dénominateurs sont devenus zéro par suite de l'hypothèse. On les réduirait donc d'abord au même dénominateur, et le résultat qui, pour la même valeur de x aurait la forme $\frac{0}{0}$ serait traité comme ci-dessus.

Ainsi $x\,\text{tang.}\,x-\frac{1}{2}\pi\,\text{séc.}\,x$ devient, pour l'hypothèse $x=1^q$,

$$\frac{x\sin.x-\frac{1}{2}\pi}{\cos.x}=\frac{0}{0} \text{ qui traitée donne } \frac{x\cos.x+\sin.x}{-\sin.x}=-1.$$

On remarque que lorsque le symbole $\frac{1}{0}$ ou ∞ = l'infini entre dans une expression, on néglige vis-à-vis de lui tous les termes finis avec lesquels il se trouve combiné par addition ou soustraction, l'infini ne pouvant logiquement être augmenté ni diminué par la présence de termes finis. On peut aussi diviser par ∞ le numérateur et le dénominateur d'une fraction, mais il ne faut pas oublier

que la différence de deux infinis peut être une quantité finie. Soit supposé $a'' = 90°$ dans

$$y = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,a''}{1 - \text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,a''}$$

à cause de $\text{tang.}\,a'' = \infty = \frac{1}{0}$, il viendra $y = \frac{1}{-1\ \text{tang.}\,a}$.

INDUCTION. L'*induction* conduit parfois à la découverte de la loi qui régit un phénomène, ou qui lie une série d'expériences, mais ce moyen d'investigation égare le plus souvent, et les résultats auxquels il conduit doivent toujours être contrôlés et vérifiés.

Fermat, dirigé par l'*induction,* avait conclu que deux, élevé à une puissance qui était elle-même une puissance de deux, formait avec l'unité un nombre nécessairement *premier*. Ainsi $2^2 + 1 = 5$ nombre premier — $2^{2^2} + 1 = 17$ nombre premier. — Il trouva encore que la loi était vraie pour la huitième et la seizième puissance de deux augmentée de l'unité, et cette induction, appuyée de plusieurs considérations arithmétiques, lui fit regarder ce résultat comme général. Cependant la loi cesse d'avoir lieu pour la 32[e] puissance de 2 qui, augmentée de 1, donne 4294967297, nombre divisible par 641.

L'induction avait également conduit l'illustre Bacon à une démonstration de *l'immobilité* de la terre.

Voici un autre exemple numérique bien propre à montrer qu'une loi, qui se manifeste dans les premiers termes d'un résultat, peut changer un peu plus tard. Que l'on réduise $\frac{531251}{3093750}$ en fraction décimale, on trouve 0. 17 17 17 49 49, etc., dont la véritable *période* est 49 et non 17, comme on aurait pu le croire *par induction*.

Encore un exemple tiré de la théorie des *séries*

$$\frac{1 + 3x + 7x^2 + 15x^3}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 \ldots$$

ces quatre premiers termes semblent bien annoncer une progression par quotient dont la raison est $2x$. Cependant il n'en est rien, et les termes suivants, à partir du 5[e], deviennent

$$-15x^4 + x^5 + 2x^6 + 4x^7 + \ldots$$

Si l'induction égare le plus souvent, il n'est pas sans exemple qu'elle ait conduit à d'heureux rapprochements.

Bode ayant cherché si les distances des planètes au soleil ne se succédaient pas suivant quelque loi régulière, imagina de porter sur une droite, à partir d'un point 0 pris pour origine, les distances ou abscisses x exprimées par la progression géométrique

3 6 12 24 48 96 192

puis, ajoutant le nombre constant 4 à la valeur de chaque abscisse, il en tira la série du rapport des distances des planètes au soleil, savoir :

4	7	10	16	28	52	100	196
Mercure.	Vénus.	Terre.	Mars.		Jupiter.	Saturne.	Uranus.

De ce qu'une *lacune* existait pour la distance relative 28, on en conclut, par *induction*, qu'une ou plusieurs planètes inconnues existaient vers ce point. On y découvrit en effet *Cérès, Pallas, Junon* et *Vesta.*

INÉGALITÉS. Les expressions dans lesquelles figurent les signes $>$ ou $<$, c'est-à-dire *plus grand que* ou *plus petit que,* sont des *inégalités.*

Beaucoup de questions dépendent de ce genre de rapports, et il importe de connaître les modifications que l'on peut leur faire subir sans qu'une *inégalité* cesse d'avoir lieu.

1° On peut, sans troubler une inégalité, ajouter aux deux membres ou en ôter des quantités égales, on peut en multiplier ou en diviser tous les termes par une quantité *positive,* transposer un terme d'un membre dans l'autre, en changeant son signe ;

2° On peut ajouter, multiplier membre à membre deux inégalités, dont le signe est dans le même sens ; former les puissances, extraire les racines en conservant les mêmes signes d'inégalité ;

3° On peut soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités dont les signes sont *inverses,* en conservant le signe qui a fourni les dividendes.

Soient les deux inégalités $a<b$ et $a'<b'$ on en peut conclure $a+a'<b+b'$ $aa'<bb'$ $a^n<b^n$ $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$
et comme elles reviennent à $a<b$ et $b'>a'$,
on en conclura aussi $a-b'<b-a'$ et $\frac{a}{b'}<\frac{b}{a'}$

4° On ne peut changer à la fois le signe de tous les termes d'une inégalité qu'en renversant en même temps le signe de l'inégalité, c'est-à-dire en changeant $<$ en $>$ et réciproquement. On ne peut donc multiplier tous les termes d'une inégalité par une quantité négative sans faire le même changement.

Application. On propose au directeur d'un haut-fourneau d'utiliser la flamme qui s'échappe du gueulard pour carboniser le bois, et obtenir ainsi le charbon qui alimente le fourneau. Des expériences en grand ont montré que, par le nouveau procédé, on obtient 1 kil. de charbon avec $2^k.97$ de bois, tandis que, par le procédé ordinaire, il faut $5^k.555$ de bois pour obtenir 1 kil. de charbon.

En outre, les frais d'appareils et de carbonisation par le nouveau

procédé s'élèvent à 0f. 004 par kilogramme de charbon, tandis que, pour la carbonisation ordinaire, on paie 0f. 012 pour le même poids de charbon.

Ce double avantage suffit-il pour le déterminer à adopter le nouveau procédé ?

Soit p le prix de 1 kil. de bois à la forêt, t le prix du transport de ce kilogramme jusqu'au gueulard ; $5.555\,p + t + 0\text{f}.012$ est la dépense totale actuelle pour obtenir 1 kil. de charbon au gueulard.

$2.97\,p + 2.97\,t + 0.004$ sera là dépense correspondante par la méthode nouvelle. Il y aura avantage à l'adopter si cette dernière dépense est plus faible que l'ancienne, c'est-à-dire si l'on a

$$2.97\,p + 2.97\,t + 0.004 < 5.555\,p + t + 0.012$$

ou

$$1.97\,t < 2.585\,p + 0^{\text{f}}.008$$

ou enfin

$$t < 1.3\,p + 0.0041$$

Le nouveau procédé n'est préférable qu'autant que, par la situation relative du fourneau et des forêts qui l'alimentent, le prix du transport d'un quintal de la forêt au gueulard, est plus petit qu'une fois et trois dixièmes le prix d'un quintal de bois augmenté de quarante et un centimes. Il s'en faut bien que cela ait toujours lieu.

INFILTRATIONS. Elles ont une énorme inflence sur les pertes d'eau dans tous les bassins de réserves, dans les canaux de navigation, etc., etc.

Les pertes par infiltration dans les terrains homogènes doivent être en raison de la surface des parois mouillées, de la charge d'eau, de la profondeur des couches susceptibles d'être imbibées ; enfin de leur degré de saturation.

On évaluait autrefois cette cause de perte tantôt à $\frac{1}{2}$, tantôt à $1\frac{1}{2}$ ou 2 fois celle des ÉVAPORATIONS.

Toutefois, d'après *Sganzin*, sur les canaux de Briare et de Loing, les pertes par les infiltrations dépassent le double de celles qui ont lieu par évaporation.

Le canal de l'Ourcq perd encore, en 24 heures, une tranche d'eau de $0^{\text{m}}.06$ à $0^{\text{m}}.10$ d'épaisseur.

Au canal du Midi, les pertes par évaporation, infiltrations et autres causes, forment en tout une tranche de $0^{\text{m}}.03$ à $0^{\text{m}}.04$ de hauteur.

Le canal de Narbonne dont les berges sont en graviers, perdent, après quinze ans, 12 mètres cubes par mètre courant en 24 heures, ou une hauteur d'eau de $0^{\text{m}}.80$.

Au canal du Centre, construit par *Gauthey* dans une zône en rem-

blais qui passait sur d'anciennes carrières, l'eau se perdait toute entière en 24 heures.

Au canal de Saint-Quentin, où le bief de partage était établi sur un sol crayeux rempli de fissures d'une profondeur indéfinie, la navigation chômait pendant les deux tiers de l'année.

Dans les terrains argileux qui prennent beaucoup de retrait, les alternatives de sécheresse et d'humidité, tantôt font perdre beaucoup d'eau, tantôt la retiennent toute entière.

Pour les cas ordinaires, et surtout dans les premiers temps de la mise en service, on devra compter sur une perte journalière d'une tranche de $0^m.05$ au moins de hauteur.

Voici un enduit proposé par M. Polonceau très-propre à rendre étanches les parois d'un bassin ou d'un canal creusé dans le sol naturel, et qu'il indique comme imperméable et résistant à l'action du frottement et des corps durs.

Cet enduit se compose en volume de 1 partie de chaux éteinte, 20 à 25 parties d'argile délayée en bouillie claire, 80 à 100 parties de sable ou de gravier, selon que l'argile est plus ou moins grasse et le sable plus ou moins fin. Ainsi, quand l'argile est grasse et le sable fin, on met 25 parties d'argile et 100 de sable; quand le sable est gros on n'en met que 80 parties et 20 d'argile si elle est grasse, ou 25 si elle est maigre.

On commence par délayer l'argile, puis on y ajoute la chaux également délayée à l'état de lait épais; ce mélange devient gras et onctueux. On verse ensuite cette pâte dans un bassin de sable ou de gravier, comme lorsque l'on fait du mortier, et on mêle ces matières. Il faut absolument que le mélange soit bien intime.

On peut, à défaut d'argile, la remplacer par le double de son volume de terre franche; ainsi, il en faudrait 40 parties avec 100 de sable fin, et 50 parties avec 80 de gros sable.

L'épaisseur de l'enduit doit être de $0^m.15$ à $0^m.20$ pour les petits bassins et les rigoles, et de $0^m.30$ à 0.40 pour les grandes surfaces.

Si on le posait sur de la terre végétale à peu de profondeur, il faudrait commencer par recouvrir celle-ci d'une couche de suie ou d'une légère couche de mortier hydraulique.

Dans les terrains de roc ou de pierrailles, qui présentent des veines et des fissures, il faut commencer par introduire dans les failles du roc et dans toutes les fissures des pierres pilonnées avec force qui ne laissent plus entre elles que de très-faibles interstices, et faire ensuite usage de l'enduit précédent.

Le prix du mètre cube de cet enduit peut être évalué à 5 fr.

INSTRUMENTS *de l'ingénieur*. 1. J'ai dû supposer généralement dans cet article que l'ingénieur possédait les *instruments* dont il chercherait ici l'emploi, la théorie ou les modes de vérification. Des dessins faisant connaître leur forme exacte, m'ont donc paru inutiles, et je me suis contenté le plus souvent de simples *figures de principe* et d'une description sommaire des formes. Toutefois, la *boussole Maissiat*, dite aussi *boussole-niveau*, *tranche-montagne*, *boussole à éclimètre*, a été complétement décrite (*planche* LXXXIII), et dessinée en entier d'après M. *Maissiat* qui, le premier je crois, a eu l'idée de cet instrument multiple. Le grand nombre des pièces qui le constituent rendaient peut-être nécessaire cette description détaillée pour ceux-là mêmes qui ont cet instrument dans les mains.

Quant à l'ordre que j'ai adopté dans cette exposition, c'est uniquement celui qui m'a semblé le plus propre à m'épargner les redites. J'ai successivement étudié la *loupe*, le *vernier*, les *lunettes*, le *limbe gradué*, les *niveaux*, comme organes principaux de tous les instruments ordinaires de la topographie, et dont la combinaison les reproduit presque tous. En y ajoutant le *miroir*, on obtient les *instruments à réflexion*. Leur emploi se combine d'ailleurs avec celui des instruments qui donnent directement certaines dimensions linéaires, tels sont la *chaîne*, la *mire*, la *stadia*.

2. Le *vernier*. Quel que soit le nombre de divisions que porte le limbe d'un instrument destiné à la mesure des angles, on ne pourrait obtenir directement la valeur d'un angle qu'à *une* division près, si l'on n'avait pas un moyen d'estimer exactement les fractions de l'intervalle compris entre deux divisions consécutives du limbe. Ce moyen est fourni aujourd'hui par le *vernier*, ainsi nommé du nom de l'inventeur.

La méthode de *Vernier* consiste à prendre sur le limbe de l'instrument un arc de m divisions, puis à porter cet arc sur l'extrémité de l'alidade qui parcourt le limbe, et à l'y diviser en $(m+1)$ parties égales.

Il en résulte que l étant la valeur angulaire d'*une* division du limbe, et v celle d'*une* division du vernier ou de l'alidade, on a évidemment, entre ces valeurs respectives, la relation

$$ml = (m+1)\,v$$

d'où $$v = \frac{m}{m+1}\,l \qquad \text{et} \qquad l - v = \frac{l}{m+1}$$

c'est-à-dire que l'excès de 1 division du limbe sur 1 division du vernier est la fraction $\frac{1}{m+1}$ de la première.

Cela posé, faisons marcher l'extrémité divisée de l'alidade ou proprement dit le *vernier*, dans le sens où la graduation du limbe

augmente, ce que je suppose avoir lieu de la gauche vers la droite; amenons ainsi, en coïncidence exacte, un trait intermédiaire quelconque t du vernier avec un trait du limbe, il arrivera que, vers la gauche de t, le premier trait du limbe qu'on rencontrera, dépassera le premier trait du vernier d'*une* différence $\frac{l}{m+1}$ — que le second trait du limbe dépassera le second trait du vernier de *deux* différences ou de $\frac{2l}{m+1}$ — que le troisième trait du limbe dépassera le troisième trait du vernier de trois différences, ou $\frac{3l}{m+1}$. . . . que, enfin le $n^{ème}$ trait du limbe sera distant du $n^{ème}$ ou dernier trait du vernier de $\frac{nl}{m+1}$. Ce dernier trait du vernier, dans le sens où nous raisonnons, est celui qui porte un zéro sur les instruments, c'est la *ligne de foi* du vernier. Si donc le $n^{ème}$ trait du limbe est, à partir du zéro du limbe, celui qui correspond à A divisions principales, l'angle formé par le zéro de l'alidade avec le zéro du limbe, aura évidemment pour valeur

$$Al+\frac{nl}{m+1}$$

et, à l'aide du vernier, on obtient cette valeur, non plus à l près, mais à $\frac{l}{m+1}$ près. On voit donc que, pour avoir le nombre de degrés et de fractions de degré qui mesure la valeur d'un angle sur un instrument à vernier, il faut d'abord compter le nombre A de divisions complètes comprises entre le zéro du limbe et le trait du limbe qui précède immédiatement le zéro ou la *ligne de foi* du vernier, puis multiplier A par la valeur angulaire l d'*une* division du limbe. On a ainsi ainsi un premier résultat approché. On comptera ensuite, à l'aide de la *loupe* (3), combien il y a de divisions du vernier depuis son propre zéro jusqu'à celui de ces traits qui coïncide, ou est le plus près de coïncider avec l'un de ceux du limbe, et l'on multipliera ce nombre n par l'excès $\frac{l}{m+1}$ d'une division du limbe sur une division du vernier. On ajoutera ce second résultat au premier.

Dans les *pantomètres* (28), on a ordinairement $l=1^\circ$, $m=14^\circ$, d'où $m+1=15$; $v=\frac{14^\circ}{15}=0^\circ.56'$; $l-v=\frac{60'}{15}=4'$, ils donnent donc les angles à 4 minutes près.

Les *cercles*, les *théodolites* sont habituellement divisés en demi-degrés ou arcs de $30'=l$. Si l'on porte 29 de ces divisions sur l'alidade, et qu'on y divise cet arc en 30 parties, on obtient les angles à 1 minute près : on n'aurait les angles qu'à 2 minutes près comme

dans les *graphomètres,* si l'on avait divisé 14 demi-degrés en 15 parties.

3. La *loupe* (*fig.* 12, *planche* LXXXII), LENTILLE convergente dont la distance focale principale est très-petite, et qui rend ainsi distincts les très-petits objets. Les cercles divisés sont souvent armés de *loupes*, à l'aide desquelles on lit les plus petites divisions, et l'on apprécie la coïncidence des traits du limbe et du *vernier* (2). L'objet ab que l'on regarde à la loupe doit être placé à une distance moindre que la distance focale principale f, et la loupe produit alors l'effet suivant : l'objet ab placé à la distance $\frac{1}{m} f$ de la LENTILLE, envoie des rayons lumineux compris entre ar et br' ; ces rayons arrivent à l'œil O après la réfraction, et l'objet ab est vu comme en AB, c'est-à-dire que son image virtuelle est vue à la distance $\frac{f}{m-1}$ (*voyez* LENTILLE), de sorte que l'œil étant presque sur la loupe, le grossissement linéaire est sensiblement comme $\frac{m}{m-1}$.

$\frac{f}{m-1}$ doit être pris égal à la distance d variable pour chaque individu, où il voit nettement l'objet ab; la distance focale de la lentille est donc déterminée par la condition $\frac{f}{m-1} = d$.

Ainsi, la vision nette de ab ayant lieu, je suppose, à 8 pouces anciens, $d = 8$, et la loupe qui grandirait 20 fois les lignes, devrait avoir pour distance focale principale $f = (m - 1)\, d = \frac{8}{19}$ de pouce ancien (l'optique compte toujours en pouces).

En général, pour qu'une loupe grossisse n fois linéairement ou n^2 fois les surfaces, il faut que sa distance focale principale soit le quotient de la distance propre à la vision nette divisée par $(n - 1)$.

Les *bisloupes* (*fig.* 14, *planche* LXXXII), les *triloupes* sont deux ou trois loupes placées sur un même axe à des distances convenables. Leur grossissement est *à peu près* la somme des grossissements de chaque loupe simple, pourvu que le verre le moins convexe soit tourné du côté de l'œil.

4. *Loupe provisoire.* L'ingénieur peut, au besoin, se fabriquer une loupe par l'un des moyens suivants :

Percer un petit trou dans une feuille métallique mince, y introduire une goutte d'eau claire, qui y prendra naturellement une forme convexe, et donnera ainsi une excellente loupe aussi longtemps que l'évaporation ne l'altèrera pas ;

Fondre au CHALUMEAU sur le charbon creusé un petit morceau de

verre. Si la gouttelette est très-petite, elle ne sera pas sensiblement aplatie par son poids, et le grossissement sera considérable.

5. Les *lunettes* des instruments de géodésie, tels que niveaux, boussoles, cercles, sextants, se réduisent en principe à un tube de laiton ou de cuivre rouge T (*fig.* 13, *planche* LXXXII), dans lequel on dispose, savoir :

1° A l'extrémité que l'on dirige vers les objets qu'on observe, une LENTILLE biconvexe O fixe ; c'est l'*objectif ;*

2° En arrière de l'objectif un *réticule* R concentrique à un tube *t'* qui glisse dans le premier T à frottement, et qui porte lui-même 3° derrière le réticule R, un tube court *t* mobile à frottement dans *t'* et muni du côté du réticule d'une lentille biconvexe L, et enfin, à son autre extrémité, d'une seconde lentille biconvexe *o* à laquelle on applique l'œil ; c'est l'*oculaire.*

L'objectif O, d'une très-petite courbure, a son foyer principal situé pendant les observations très-près de l'intersection même des fils du réticule R. Il en résulte que les rayons MO, AO émanés d'un objet éloigné MA, et qui passent par le centre optique, continuant leur route en ligne droite, il se forme au réticule R une petite image *m a* de l'objet MA ; toutefois, cette image est renversée, le haut a passé en bas, la droite a passé aussi à la gauche et réciproquement, par l'effet de l'intersection en O des rayons AO*a*, VO*v*, MO*m*.

Jusqu'ici donc, l'effet produit est exactement le même que celui qu'on obtiendrait d'une rondelle de bois ou de carton percée d'un petit trou à son centre O et mise à la place de la lentille. Mais celle-ci recevant de chaque point M, V, A, etc., de l'objet des faisceaux lumineux qui, à cause de la grande distance du signal, sont sensiblement parallèles aux axes MO, VO, AO secondaires et principal, ces faisceaux se condensent, en convergeant après les réfractions, en *m*, *v*, *a*, et la petite image est fortement éclairée ; elle le sera d'autant plus que l'objectif sera plus grand.

Quant aux deux verres convexes L, *o*, ils produisent l'effet d'une bisloupe (3), ils agrandissent l'objet *a v m* (*fig.* 14), sans le redresser. Leur distance mutuelle est réglée à cet effet.

On aurait pu se contenter d'un seul oculaire *o*, mais l'emploi des deux en augmentant la grandeur de l'image contribue à l'*achromatisme.*

6. La figure 14 (*planche* LXXXII) montre au reste la marche des rayons lumineux de l'image à l'œil à travers le système du dernier tirage *t*. La distance de L à R étant égale à la distance focale de la lentille L, ou à fort peu près, les rayons émanés de *m v a* sont réfractés parallèlement. Ils rencontrent alors la lentille *o* qui les fait converger vers l'œil, lequel placé très-près de *o*, voit l'objet *a v m* très-agrandi AVM.

7. *Pour se servir de la lunette*, on commence par tirer ou enfoncer le corps *t* seul, jusqu'à ce qu'on distingue parfaitement les fils du réticule R. Cela fait, on vise à l'objet, en même temps que l'on fait mouvoir le corps *t'* (lequel emporte le corps *t*), jusqu'à ce que l'on aperçoive avec la plus grande netteté l'objet ou signal MVA.

8. *Le grossissement* dans ces sortes de lunettes est assez exactement mesuré par le rapport des distances focales ou celui des distances des verres O et *o* au réticule R.

9. *Déterminer par l'observation le foyer d'une lunette.* Oter l'oculaire; introduire dans le canon un verre dépoli R; l'y enfoncer jusqu'à ce que la petite image *a v m* d'un objet extérieur fort éloigné MVA s'y distingue parfaitement.

10. *Rectification de la lunette.* L'équidistance des fils du réticule, si elle en porte, s'obtiendra, comme nous le dirons plus bas (23), au paragraphe de la *stadia*. On pourra même, par cette méthode, vérifier la perpendicularité des fils du milieu, mais on s'assurera en général de cette condition par les opérations suivantes, qui servent en même temps à régler l'axe optique au moins à très-peu près.

On fera placer une mire (15) bien verticale à 2 ou 300 mètres de la lunette, et l'on amènera l'horizontale VV' du *voyant* de la mire (*fig.* 15, *planche* LXXXII) en parfaite coïncidence avec le fil horizontal du milieu du réticule R. On fera faire alors une demi-révolution à la lunette autour de son axe, et l'on visera la même horizontale VV' du voyant. Si elle se trouve recouverte par le fil du milieu, tout est bien réglé jusqu'ici; mais si ce fil horizontal se trouve au-dessus ou au-dessous, c'est qu'il a tourné pendant la demi-révolution autour d'un centre *o* situé (*fig.* 15) entre sa nouvelle position *ff'* et l'horizontale VV' du voyant qui n'a pas bougé. Alors, à l'aide des vis spéciales qui agissent sur le réticule, on fera parcourir au fil horizontal la *moitié mo* de l'intervalle, et l'on fera les signes convenables au porte-mire pour qu'il fasse parcourir à VV' l'autre moitié M*o* de l'intervalle. Cela fait, on recommencera exactement de la même manière jusqu'à ce que la demi-révolution de la lunette autour de son axe laisse l'horizontale du voyant et le fil horizontal, milieu du réticule, rigoureusement dans le même plan. Alors, on procèdera encore d'une manière analogue pour le fil *vertical* du réticule, et en visant cette fois à la verticale du voyant et faisant, s'il est nécessaire, changer la mire de place pour lui faire parcourir la moitié de la déviation que la demi-révolution aura pu déceler.

Enfin, on s'assurera que la lunette est complétement bien centrée ou que son axe optique se confond avec la droite qui passe par la croisée des fils et le centre de l'oculaire. Pour cela, on visera un *point fixe* quelconque, fort éloigné, à travers l'intersection des fils,

puis, on fera tourner la lunette dans ses collets autour de son axe. Dans toutes les positions qu'elle pourra prendre ainsi, l'intersection des fils du réticule devra se projeter exactement sur le *point* de mire qu'on avait choisi. S'il n'en est pas ainsi, on fera la correction en faisant parcourir par la croisée des fils et dans le sens convenable, la *moitié* de l'erreur; quelques tâtonnements suffiront. Les premières rectifications dispenseront d'ailleurs le plus souvent de celle-ci.

11. *Lunette terrestre (fig. 16, planche* LXXXII). Les lunettes terrestres ou longues-vues que l'on construit aujourd'hui, sont à *cinq* verres, et l'on s'en formera une idée assez nette en ajoutant par la pensée un nouveau tirage muni de deux verres convexes L′ o′ à la lunette (*fig.* 13) des instruments, ce qui donnera en tout cinq verres disposés comme suit :

1° L'objectif O, d'un très-long foyer;

2° En arrière de l'objectif, un tirage portant deux verres convexes L, *o*. Leur tirage a été réglé par l'artiste de telle sorte que la lentille L, lorsque la lunette est tirée, se trouve à une distance égale ou à très-peu près à sa distance focale, du foyer de l'objectif O, foyer où est peinte une image *a m* renversée de l'objet A M V qu'on regarde;

3° En arrière de ce corps ou tirage qui porte les lentilles L, *o*, un dernier corps mobile portant aussi deux lentilles L′, *o*′ dont la dernière est l'oculaire.

12. Pour concevoir la marche des rayons lumineux dans la lunette terrestre, il suffit donc de les reprendre en *am* (*fig.* 13) dans la lunette géodésique. La figure 16 montre comment, à partir de *o* d'où ils sortent convergents, ils se croisent en *i*, foyer commun de *o* et de L′, — comment de L′ ils se dirigent parallèlement vers l'oculaire *o*′, d'où ils sortent en convergeant vers l'œil de l'observateur, à qui l'image *am* paraît alors redressée et agrandie. Tout ceci dérive directement de la théorie des LENTILLES (*voy.* ce mot).

13. *Boussole-niveau, boussole à éclimètre (planche* LXXXIII). L'instrument dont il s'agit ici n'est que la réunion de plusieurs autres qu'on employait autrefois séparément. C'est M. *Maissiat,* chef d'escadron au Corps royal des ingénieurs géographes, qui a eu le premier, je crois, l'idée de faire exécuter cet instrument, qui donne à la fois les angles horizontaux, les angles verticaux, et sert en outre au nivellement, de sorte que, seul, il suffit aux travaux les plus usuels de l'ingénieur.

La *planche* LXXXIII, copiée sur celle de M. *Maissiat,* en donne la description assez complète (voyez *Mémoire sur quelques changements faits à la boussole, par M. Maissiat*).

A B C D (*fig.* 1), parallélipipède rectangle d'un seul morceau en bois parfaitement sec ;

E F G, cadre en bois qui entoure le parallélipipède, et dont les bords s'élèvent sur trois côtés seulement au-dessus de celui-ci (*fig.* 1 *et* 5) ;
f'' (*fig.* 2), feuillure par laquelle le fond entre dans la rainure du cadre;
c e b d, évidement cylindrique (*fig.* 1 *et* 2), ménagé dans l'épaisseur du bois, et au-dessous duquel se trouve
ff', autre évidement cylindrique inférieur, concentrique au premier, mais d'un rayon un peu plus petit;
e f, *d f'* saillie formée par ce double évidement, et sur laquelle porte par son fond
c b d e bassin en cuivre de la boussole.
Au moyen du second évidement *ff'*, on obtient un vide de 0m.003 environ entre le fond inférieur du bassin de la boussole et le fond intérieur de la botte. Ce vide reçoit un ressort;
f g, épaisseur du fond de la botte, dans lequel on incruste les platines qui réunissent la boussole à son support (support dont on a souvent changé la forme), et qui porte sur le pied à branches de l'instrument;
h i, cercle en cuivre dans lequel se fait le mouvement du
L L', limbe, lorsqu'on corrige la déclinaison de l'aiguille aimantée;
V V V, trois vis (*fig.* 1 *et* 2) traversant les milieux de trois côtés du cadre, et qui servent à arrêter le limbe dans la position convenable.
Le cercle *h i* a intérieurement deux entailles, qui laissent au milieu une saillie dont la partie supérieure porte le verre et la partie inférieure presse sur le limbe L L';
K K' arête du limbe L L';
m m', cylindre en cuivre fixé au centre du fond par trois vis, et taraudé suivant son axe pour recevoir un pivot, dont la partie commune avec ce cylindre est à vis, et l'autre partie qui passe au-dessus porte l'aiguille de la boussole ;
V', vis sans fin (*fig.* 1 *et* 7), tangente à un arc denté servant à faire tourner de quelques degrés le limbe de la boussole;
S S', supports arrêtés dans le bois, et qui portent la vis V';
O, clef qui sert à tourner la vis V';
P (*fig.* 1, 3, 5), lame de cuivre à queue d'aronde qui masque l'entrée de la tête de vis, elle porte en
T, un petit bouton saillant sur sa face intérieure et qui se meut dans une entaille arrêtée à une petite distance du bord supérieur de la botte; ce qui l'empêche de s'en détacher;
P' (*fig.* 5), autre lame de cuivre encastrée à fleur de bois, et qui recouvre le logement de la vis V';
R (*fig.* 1), levier qui sert à arrêter l'aiguille aimantée et à l'empêcher de porter sur son pivot, lorsqu'on n'emploie pas la boussole ;
n, tête de la petite broche de laiton qui traverse le bois verticalement, et va presser l'extrémité du levier qui, basculant, soulève ainsi l'aiguille et la presse contre le verre, lorsque
Q, tournant autour de U vient agir convenablement sur sa tête biseautée.
T (*fig.* 11), trépied percé d'un trou par lequel passe le pivot de l'aiguille, et qui sert à la soulever;
a, *b*, *c* (*fig.* 11), trois pointes à vis qui forment les supports de ce trépied, passent dans autant de trous pratiqués au fond en cuivre, et portent sur le levier par leurs têtes qui les empêchent de quitter ce fond;
R' R' (*fig.* 4 *et* 5), règle en cuivre terminée par deux arcs de même rayon et divisés, l'un pour mesurer les angles de hauteur, l'autre les angles de *dépression* (on remplace aujourd'hui ces deux arcs par un demi-cercle entier). Deux lignes droites parallèles entre elles limitent la largeur de cette règle, et doivent coïncider avec les arêtes inférieure et supérieure du côté *est* de la botte sur lequel on l'applique. Elle est percée au milieu de sa

longueur d'une ouverture circulaire qui reçoit l'axe V (*fig.* 1 *et* 8), autour duquel on peut la faire tourner ;

A′ (*fig.* 1 *et* 6), agrafe à deux pans d'équerre entre eux, dont l'un s'arrête sur le bois de la boîte au moyen de deux vis, et dont l'autre terminé en arc de cercle entre dans une rainure pratiquée dans l'épaisseur de la règle R R′ à son extrémité nord. Ce système maintient le mouvement de la règle, lorsqu'il a lieu, dans un plan parfaitement coïncident avec celui de la surface de la boîte sur laquelle elle s'appuie.

N (*fig.* 1, 2, 4, 5), niveau à bulle d'air dont les extrémités sont fixées à l'ouest de la règle par

g′ g″, petites allonges dissemblables de forme, dont l'une

g″ arrête le niveau en un seul point, autour duquel, comme charnière, on peut le faire tourner, et dont l'autre

g′ permet d'imprimer ce mouvement de rotation à l'aide de

V″, vis destinée spécialement à cet usage (*fig.* 1, 2, 4, 5). Cette vis a son point d'appui sur la règle R′ au moyen de

o′, piton mobile autour de son axe ;

o″, autre piton également mobile sur son axe, tenant à l'allonge g′, et servant d'écrou à la vis pour mouvoir le niveau ;

p p, petites pinnules fixées aux extrémités du niveau, et construites de manière que le rayon visuel qui passe par la croisée des fils soit parfaitement horizontal, quand la bulle du niveau est au milieu du tube ;

Pour faire mouvoir la règle R′ *qui porte le niveau*, on a placé à l'angle sud-est de la boîte et à l'aide de deux vis, un support

A B (*fig.* 10), garni de deux pattes

P″, P‴. La partie supérieure de ce support est évidée pour recevoir

c c′, petit cylindre de même dimension, percé dans son milieu pour le passage de la partie supérieure d'une vis de rappel. Ce cylindre est mobile dans ce vide autour de son axe, par l'effet de la suspension qui se fait sur les extrémités de

V V (*fig.* 10), deux vis diamétralement opposées. Le filet de la vis de rappel portée par le cylindre c c′ s'engage ensuite dans

E″ (*fig.* 3), piton à écrou qui tient à la règle R′ et tourne autour de son axe. Pour cela, cet axe, qui entre dans la règle, est taraudé pour recevoir une vis qui l'y retient, et dont la tête fraisée se noie dans l'épaisseur du cuivre pour laisser passer la règle des verniers ou alidades. Alors cet écrou, comme le cylindre qui sert de support à la vis de rappel, cède aux changements de direction que cette dernière vis lui communique lorsqu'on la fait agir, et la règle R′ obéit en même temps. De cette manière, la règle R′ peut être ou contenue dans la position convenable, ou rappelée à cette position si elle l'avait perdue ;

Sur la règle R′ qui est en contact avec la boîte de la boussole, on applique une alidade terminée par des *verniers ;* et qui porte elle-même deux

X X, pièces rectangulaires en cuivre servant de supports à la lunette, et parfaitement égales entre elles. Au milieu de ces supports existent des ouvertures circulaires de même diamètre que la lunette, et parfaitement calibrées ;

y y, sont des pinnules pratiquées dans ces pièces, et qui permettent de viser à des objets trop rapprochés pour qu'ils se voient distinctement à la lunette ;

y′ (*fig.* 5, 9 *et* 12), est une branche en cuivre fixée au support de la lunette du côté de l'oculaire à l'extrémité de laquelle il y a un

N′, piton à écrou dans lequel passe la vis de rappel, qui permet de donner à la lunette de *très petits* mouvements. Ce piton est mobile autour de son axe au moyen de

v et *r* (*fig.* 9), qui sont une vis et une rondelle; la vis de rappel est ensuite tenue dans sa partie inférieure par

π, autre piton (*fig.* 3, 5 *et* 12), mobile autour de son axe, qui entre dans

z, support en forme de pince, que

z', vis de pression fixe le long de la règle R'.

Cette pince se déplace à volonté pour faciliter le mouvement de l'alidade, et on la replace ensuite pour rappeler la lunette sur le point de mire de l'objet qu'on observe ;

A (*fig.* 2), axe conique incrusté au centre du côté *est* de la boussole au point d'intersection des deux diagonales tirées de chaque angle ;

R, dans la même figure, rondelle qui se fixe à l'extrémité de l'axe carré dans cette partie. Cette rondelle, qui a un trou au centre pour entrer dans le carré de l'axe, maintient les deux règles au moyen de

V_1 (*fig.* 1, 2, 8), vis qui s'introduit dans un trou taraudé à l'extrémité extérieure de l'axe;

a b (*fig.* 8), trous pour introduire les deux pointes de la clef (*fig.* 13) qui fait fonction de tournevis ;

c d e (*fig.* 8), autres trous sur le côté de la tête de vis V_1, et qui servent à presser ou à rendre plus libre l'alidade, lorsque la lunette étant en place couvre la tête de vis.

14. Le *niveau à bulle d'air*. Après la description détaillée que nous venons de faire de la *boussole-niveau*, il suffira sans doute de dire ici que le niveau, dit à bulle d'air, se compose :

1° D'un niveau proprement dit, que l'on peut mouvoir seul dans un plan vertical, en le faisant tourner dans ce plan autour d'une charnière placée à l'une de ses extrémités, et ce, à l'aide d'une petite vis adaptée à l'autre extrémité;

2° D'une lunette (5), posant sur deux collets dans lesquels elle peut tourner autour de son axe, qui peut en outre, comme le niveau, subir *seule* de légers déplacements verticaux, et que l'on peut enfin enlever de ses collets et retourner bout pour bout. Ces deux pièces, qui se prêtent ainsi à des mouvements verticaux indépendants l'un de l'autre, font ensemble partie d'un système qui tourne lui-même tout entier dans un plan que l'on rend horizontal à l'aide de trois vis à caler, par lesquelles il repose sur le pied de l'instrument. On verra plus bas (37) comment on le rectifie. L'emploi du niveau implique celui d'une

15. *Mire*, grande règle, en bois sec, de 2 mèt. de hauteur, divisée en centimètres, portant dans son épaisseur une seconde règle de même hauteur, divisée de la même manière. Cette seconde règle glisse dans la première à l'aide d'une coulisse. Elle porte en outre une feuille de tôle rectangulaire ou une planchette en bois que, à l'aide de deux perpendiculaires, on a divisée en quatre rectangles peints deux à deux de couleurs différentes (rouge et blanc) ; c'est le *voyant*. L'intersection des deux perpendiculaires est le point sur lequel on vise habituellement. Ce voyant, serré sur la règle glissante par une forte vis, peut s'en détacher en desserrant celle-ci, être promené le long de la première règle et enfin arrêté à la hauteur conve-

nable par l'action de la vis. On conçoit que, en faisant glisser le voyant le long de la première règle, on amènera ainsi son horizontale à des hauteurs qui ne dépasseront pas deux mètres, et que fixant, au contraire, le voyant par sa vis au sommet de la règle glissante, et tirant celle-ci de la longueur convenable, on pourra ainsi le porter jusqu'à près de quatre mètres au-dessus du pied de la mire. Deux petites réglettes en cuivre de $0^m.01$ chacune, divisées en millimètres et placées l'une au-dessous de la vis du voyant, l'autre au bout de la règle fixe, permettent d'évaluer les hauteurs du voyant à un millimètre près.

16. Le *niveau d'eau* est préférable au niveau à bulle d'air dans les nivellements où l'on ne procède que par distances inférieures à 40 mèt., parce qu'il est immédiatement réglé de lui-même ; il ne doit jamais être employé dans les autres cas. Le niveau d'eau est un tube cylindrique de fer-blanc ou de cuivre, d'environ un mètre de longueur, recourbé verticalement à angle droit à chacune de ses extrémités, où il reçoit deux fioles de verre de diamètres *parfaitement* égaux. L'instrument se monte sur un pied à trois branches, autour de l'axe duquel il peut faire un tour d'horizon. On verse de l'eau colorée par l'une des fioles et en assez grande quantité pour qu'elle apparaisse dans la fiole opposée. On bouche l'une des fioles avec le pouce, et l'on élève l'autre pour faire sortir du tube les bulles d'air. On bouche de même l'une des fioles toutes les fois que l'on transporte le niveau d'une station à la station suivante, et lorsqu'on le remet en place on n'ouvre que lentement la fiole bouchée pour éviter que l'eau jaillisse au dehors.

On doit aussi empêcher, par tous les moyens possibles, que l'eau ne fuie par les jointures du tube pendant les observations.

17. *L'usage de l'instrument* consiste à faire amener le milieu du voyant de la mire (15) dans la direction du rayon visuel, qui rase en même temps les surfaces liquides des deux fioles, lorsque le liquide a cessé d'osciller. On doit se placer le plus loin possible de l'instrument, et il convient, pour plus d'exactitude, de viser chaque fois des quatre manières indiquées par la *figure* 2, *planche* LXXXI, et de prendre la moyenne des quatre résultats.

18. On fera remarquer qu'une demi-révolution de l'instrument autour d'un axe qui ne serait pas exactement vertical, ne causerait d'erreur qu'autant que les diamètres des fioles seraient inégaux.

Soit en effet nN (*fig.* 3, *planche* LXXXI), le plan de niveau du liquide dans une situation quelconque de l'instrument. Supposez un moment que le liquide s'y soit congelé. Faites faire une demi-révolution à l'instrument autour de l'axe AC ; N passera en N' et n en n' — le plan nN prendra la position $N'n'$ — rendez à l'eau sa liquidité — elle remontera d'abord dans la fiole Nfn' à son ancien niveau N,

et ce, aux dépens de la portion de liquide contenue dans $N'f'n$. Si $N'f'n$ est un cylindre de même diamètre que celui Nfn', les choses en resteront là, et le retournement de l'instrument n'aura point changé la position du plan de niveau nN. Mais, si le cylindre $N'f'n$ est plus grand que celui Nfn', l'emprunt fait au premier pour remplir le second n'aura pas épuisé $N'f'n$, il y restera donc, pendant un instant, un certain volume de liquide au-dessus du plan de niveau nN, mais la tendance des liquides à se mettre de niveau partagera bientôt ce volume excédant entre les deux fioles, et il en résultera *un autre* plan de niveau $N''n''$ plus élevé que le premier d'une petite hauteur qui serait précisément l'erreur commise par l'effet de l'inégalité des fioles.

On emploie souvent encore, dans le tracé des routes ou des canaux d'amenée ou de fuite des usines, une sorte de niveau qu'on appelle

19. *Niveau de pente.* Si je n'en parle point ici, c'est que l'ingénieur doit autant que possible réduire le nombre des instruments qu'il emploie, et que, comme il le verra à l'article Nivellement, la boussole à éclimètre (13) peut toujours remplacer le niveau de pente.

20. Le *baromètre* est encore recommandé dans les livres pour les cas où il s'agit d'obtenir approximativement des différences de niveau très-considérables. Cet instrument, connu de tout le monde, n'exige aucune description. Celui dont on fait usage pour la mesure des hauteurs ne diffère, en principe, du baromètre fixe, qu'en ce qu'il porte dans sa monture un thermomètre qui est censé donner la température de la colonne de mercure. Ces baromètres destinés à la mesure des hauteurs n'ont point encore acquis les qualités qui les rendraient transportables; il n'y a pas d'instruments plus embarrassants et plus fragiles, et je n'en conseillerai pas l'emploi aux ingénieurs exposés à voyager en diligences ou sur des véhicules encore moins bien suspendus. *Cinq* baromètres m'ont été successivement envoyés de Paris aux Pyrénées, le cinquième seul m'est parvenu en bon état, mais il s'est brisé au retour. *Deux* autres baromètres d'un artiste en renom m'ont été expédiés en Corse, et des précautions extrêmes ont été prises pour leur transport, je les ai reçus tous deux brisés.

21. La *chaîne* et les *fiches*. Pour mesurer une ligne droite sur le terrain, il est utile d'en tracer d'abord la direction à l'aide de jalons. La distance de ses points extrêmes se mesure ensuite à l'aide d'une *chaîne*, formée de petites tiges de fer ou mieux de cuivre de $0^m.20$ de long réunies par des anneaux, et terminée par deux poignées que les *chaîneurs* saisissent. Cette chaîne, y compris les poignées, a ordinairement *dix* mètres, ou plus exactement $10^m.005$, afin de compenser les défauts de tension. Le *chaîneur d'avant* porte dix *fiches*

de fer ou de laiton qu'il plante successivement en terre, chaque fois que le chaîneur d'arrière s'aperçoit, à la rencontre d'une fiche déjà posée, qu'ils ont parcouru dix mètres; et ce dernier enlève et garde les fiches à mesure qu'il les rencontre. Lorsque le chaîneur d'arrière a dans les mains les dix fiches, il a parcouru cent mètres ou *une portée,* il rend alors les dix fiches au chaîneur d'avant qui en prend note, et ils continuent à marcher dans la direction indiquée par les jalons. Avant de poser et de relever les fiches, les chaîneurs se faisant face doivent se voir mutuellement dans la direction des jalons, et s'ils en dévient, ils s'en avertissent mutuellement et s'y replacent. Ils doivent d'ailleurs s'assurer que la chaîne est bien complétement développée dans toute sa longueur, et elle doit toujours être placée *horizontalement*, ce qui exige le plus souvent qu'elle ne touche le sol que par une de ses extrémités. Toutefois, quand la pente est très-forte et régulière, il est préférable de la mesurer directement et d'évaluer ensuite sa *projection* horizontale, après avoir mesuré l'angle de son inclinaison.

M. *Moynet* a reconnu que, en terrain horizontal, la chaîne bien employée ne donnait guère que $\frac{1}{10000}$ d'erreur ($0^{m}.56$ sur une longueur de $5165^{m}.82$).

Si le terrain est très-accidenté, ou si ne l'étant pas on n'a à mesurer que des distances assez faibles (les bases d'opération exceptées) on emploiera avec de grands avantages la stadia.

22. La *stadia* (*planche* LXXXI, *fig.* 4 *et* 5) est un des instruments les plus commodes qui aient été imaginés; il est fondé sur les principes suivants :

Si au foyer F d'une lunette (*fig.* 4) on place un réticule R (*fig.* 5), les rayons visuels passant par l'intersection des fils horizontaux *a* et *b* avec le fil vertical, formeront un angle constant dont le sommet sera sur le centre optique de l'objectif O. Dès lors, si, à travers cette lunette, on vise une mire graduée AB ou CD, les rayons visuels passant par les fils horizontaux intercepteront sur cette mire des nombres de divisions d'autant plus grands que la distance de la mire sera plus grande, et l'on aura

$$AB : CD :: gO : hO$$

Il suffirait donc, pour conclure toutes les distances comprises entre O et *h*, de diviser CD en autant de parties égales qu'il y a de mètres de O en *h*, et de lire sur la mire le nombre de divisions intercepté pour chaque station entre les fils du réticule R. Une mire ainsi divisée est une *stadia*.

Le réticule (*fig.* 5) peut s'adapter à la lunette d'une boussole (13), d'un niveau (14) ou de tout autre instrument. Il est plus commode de disposer les fils horizontaux mesureurs à égales distances du fil horizontal du milieu qui passe par l'axe optique; cette égalité de

distance s'obtient facilement, mais elle n'est pas d'une nécessité absolue.

23. *Pour régler l'équidistance des fils mesureurs*, on tracera en grand sur le papier la figure du réticule, qu'on placera ensuite à dix mètres en avant du réticule lui-même. Visant ensuite à cette figure à travers le réticule, on parviendra bientôt, en faisant mouvoir ses fils, à les amener en coïncidence exacte avec les fils homologues de son image. On les fixe alors dans cette position avec un peu de cire. Les fils d'araignée sont préférables à tous les autres.

24. *Diviser ou étalonner la stadia.* Les fils du réticule étant réglés comme nous venons de le dire, et distants l'un de l'autre d'environ 0^m.006, on fera placer bien verticalement, en terrain horizontal, et successivement aux distances 100, 200, 300 mètres de la lunette, une règle en sapin d'environ 3 mèt. de longueur, 0^m.12 largeur et 0^m.03 épaisseur, sur la face de laquelle on marquera chaque fois au crayon les deux extrémités de l'intervalle sous-tendu par les fils mesureurs, l'un d'eux affleurant l'extrémité supérieure de la règle, tandis que l'axe optique est bien horizontal. On divisera ensuite en vingt parties égales chacun des intervalles, lesquels doivent être égaux, et ces petites parties, qui correspondront à 5 mèt. de distance horizontale, pourront être encore sous-divisées. Enfin, l'on peint sur un fond blanc les divisions tracées en couleur et à l'huile par des traits diversifiés et un peu larges, afin de les bien distinguer à la plus grande distance ou 300 mèt.

Lorsque, en terrain horizontal, un obstacle s'oppose à ce qu'on voie toute la partie de la stadia comprise entre les fils extrêmes du réticule, on remarque combien il y a de divisions entre le premier fil et celui du milieu, et on double ce nombre, ce qui ramène les choses au cas précédent.

25. *Corrections pour les terrains en pente.* Si entre la position de la lunette et celle qu'occupe la *stadia* il y a une différence de niveau sensible, la stadia ne sera aperçue qu'en raccourci et sous un angle α qu'on lira sur l'instrument qui porte la lunette. h' étant l'intervalle sous-tendu sous cet angle α par les fils du réticule, et h celui qui serait sous-tendu en terrain horizontal, on a clairement $h = h' \cos.\alpha$, et l'on conclura de cette relation la plus courte distance de la lunette à la stadia. Mais cette distance d' n'est évidemment pas leur distance horizontale d, qui est cependant celle qu'on doit porter sur le plan. On passera de l'une à l'autre par la relation

$$d = d' \cos.\alpha = mh' \cos.^2\alpha$$

en faisant le rapport constant connu $\frac{d}{h} = m$. Au-dessous de $5° = \alpha$, la correction est peu importante, et l'erreur que l'on commettrait en la négligeant, ne s'élèverait guère qu'à $\frac{1}{100}$. On néglige toujours

d'ailleurs, parce qu'elles se compensent le plus souvent, les erreurs dues à la position du réticule qui ne se confond pas avec celle de l'axe de rotation vertical de la lunette.

Les résultats suivants ont été obtenus par une commission d'ingénieurs géographes, avec la chaîne et avec la stadia :

Distances données par

La stadia. . . .	14^m 6	$44^m.8$	$95^m.0$	$169^m.0$	$221^m.5$	$291^m.0$
La chaîne. . . .	$14^m.5$	$44^m.7$	$94^m.0$	$169^m.0$	$221^m.1$	$291^m.2$

Voyez *Rapport sur la stadia par le chevalier de Lostende; Puissant, Figuré du terrain.*

26. *Emploi de la mire comme stadia.* A défaut de stadia, on peut employer au même usage une mire ordinaire (15), après avoir, par divers essais, déterminé à quelles distances horizontales correspondent les cordes de l'angle visuel des fils de la lunette d'un instrument. La mesure des distances avec la mire simple est un peu plus longue qu'avec la stadia, mais elle plus exacte, et, lorsqu'on fait des NIVELLEMENTS, la distance des stations s'obtient ainsi fort rapidement en même temps que les cotes de niveau. Je choisis ce dernier cas pour exemple :

Le voyant de la mire étant placé comme pour prendre une cote de niveau, et cette cote inscrite par le porte-mire, on lui fait élever le voyant jusqu'à ce que son horizontale soit couverte par l'un des fils du réticule ; puis il inscrit cette hauteur dans une colonne disposée à cet effet sur son registre. On lui fait alors abaisser le voyant jusqu'à ce que l'autre fil recouvre la même horizontale. La différence de ces deux cotes donne, à un millimètre près, l'espace embrassé sur la mire par les deux fils du réticule, et on en conclut la distance comme avec la stadia.

J'avais trouvé par exemple que, pour l'instrument que j'employais, chaque mètre embrassé sur la mire entre les deux fils extrêmes du réticule correspondait à 55 mèt. de distance horizontale. Je n'avais donc qu'à multiplier les différences des cotes inférieures et supérieures de chaque station par le coefficient constant 55, pour avoir les distances à quelques centimètres près.

Lorsque l'on ne pourra apercevoir que la partie supérieure de la mire, on se contentera de faire relever l'espace embrassé par le fil du milieu et le fil extrême. Il est clair que, pour avoir alors la distance, on doublera le multiplicateur constant qui, pour le cas ci-dessus, deviendrait 110. Ainsi, avec la boussole-niveau (13) et une mire ordinaire (15), on obtient, à chaque station, la déviation d'un signal par rapport au méridien, sa distance, sa cote de nivellement, c'est-à-dire toutes les données d'un LEVÉ ordinaire, mais peu étendu.

27. Si les LEVÉS dont l'ingénieur se trouve chargé, avaient au

contraire une étendue considérable, et s'ils exigeaient dès lors une *triangulation* assez exacte, la boussole (13) ne pourrait plus lui en fournir les éléments. On ne peut guère, en effet, obtenir de cet instrument la valeur d'un angle horizontal à plus $\frac{1}{2}$ degré près, puisque le limbe ne porte pas de plus petite division, et qu'il n'y a point de *vernier* (2). De plus, si l'on transporte la boussole sous deux méridiens successifs distants, les directions de l'AIGUILLE AIMANTÉE ne sont plus sensiblement parallèles; enfin, tant d'influences perturbatrices peuvent agir sur elle, sans compter les variations diurnes, qu'il faut absolument en limiter l'emploi aux levés de détail. Une triangulation exigera donc généralement l'emploi d'instruments plus rigoureux, et dont la précision devra être porportionnée à l'étendue que le plan embrasse. Pour les levés d'une étendue assez faible, on pourra quelquefois (pourvu qu'on l'emploie avec sagacité) se contenter du *pantomètre*.

28. *Pantomètre*. Cet instrument, tout à fait portatif, donne les angles à 4 minutes près (2); c'est un cylindre en laiton de 0m.09 hauteur et 0m.07 diamètre, recoupé suivant un plan perpendiculaire à son axe, qui le partage en deux cylindres, l'un supérieur, l'autre inférieur. Ce dernier, qui est fixe, reçoit inférieurement une douille par laquelle on le dispose sur un pied ordinaire à trois branches, ou même sur un simple piquet dressé. Son bord supérieur est divisé en 360°; au-dessous de sa division 0 est une fente longitudinale, et au-dessous de sa division 180°, une fenêtre au milieu de laquelle on a tendu un fil de soie verticalement. Le cylindre supérieur tourne sur l'inférieur à l'aide d'une vis et d'un petit engrenage. Il porte un petit arc de 14° divisé en 15 parties, et il est percé d'une fente et d'une fenêtre placées sur les mêmes génératrices qu'au cylindre inférieur; mais il a, de plus que celui-ci, une seconde fente au-dessus de la division 90°, et une seconde fenêtre au-dessus de 270° —; ce qui lui permet de donner immédiatement les directions perpendiculaires, et fait que le pantomètre remplace aujourd'hui avec avantage

29. L'*équerre d'arpenteur*, que les arpenteurs eux-mêmes n'emploient plus.

Pour rendre le pantomètre plus portatif, la douille conique se dévisse à volonté, et on l'introduit par sa petite base dans l'ouverture laissée au-dessus du cylindre supérieur où elle se loge, et se fixe par son extrémité dans un écrou intérieur.

30. On conçoit immédiatement l'usage de cet instrument; en le faisant tourner tout entier sur sa douille, on vise par la fente *o* à travers la soie 180 dans la direction de droite, puis faisant tourner le cylindre supérieur *seul*, à l'aide de la vis, on amène sa *ligne de foi*, et par conséquent la soie de la fenêtre qui lui fait face dans la di-

rection de gauche. On vise de nouveau dans la direction de droite à travers le cylindre inférieur, pour s'assurer que le mouvement du cylindre supérieur n'a pas fait tourner l'instrument sur sa douille, et, s'il n'a pas tourné, il n'y a plus qu'à lire l'angle des deux directions.

Il faut en visant que les soies coupent, autant que possible par le milieu, *le pied* des jalons, et l'instrument doit être placé bien verticalement, ce dont on peut s'assurer à l'aide d'un fil à plomb ou d'un petit niveau, qu'il est bon de porter sur soi.

Les perpendiculaires à une direction quelconque, sont immédiatement données par la fente 90° et la fenêtre 270°, lorsque la fente *o* et la fenêtre 180° ont été placées suivant cette direction primitive. Le pantomètre ne suffirait plus s'il s'agissait d'une triangulation comprenant une étendue de quelques lieues, ou même moins encore, si l'on était forcé, par les accidents locaux, de former un assez grand nombre de triangles s'appuyant les uns sur les autres. Il faudrait recourir alors, soit au *sextant,* dont nous nous occuperons plus bas (42), soit au

31. *Cercle répétiteur*, ou mieux au *théodolite*, qui a sur celui-ci l'avantage de réduire immédiatement les angles à l'horizon. Ces instruments munis de lunettes, qui permettent de distinguer nettement les signaux à de grandes distances, de limbes d'un assez grand rayon pour recevoir des divisions extrêmement rapprochées, de *verniers* (2) qui fractionnent encore ces divisions, exigent en général un temps considérable pour être vérifiés, réglés, et solidement disposés à chaque station.— Uniquement composés d'organes que nous avons déjà étudiés séparément, nous n'avons point à entrer ici dans leur description particulière; et, quant à leur vérification, elle se déduit directement des modes généraux exposés ci-dessous (37).

32. Le *graphomètre.* Je n'ai rien à dire dans cette petite revue de ce vieil instrument, que le *sextant* (42) remplacera toujours avec beaucoup d'avantages. Mais, avant de passer aux *instruments à réflexion*, il me reste un mot à dire sur

33. La *planchette*, dont l'emploi est, dans certaines circonstances, plus commode que celui de la boussole, et que d'ailleurs nul autre instrument ne peut remplacer convenablement lorsqu'il s'agit de tracer un *projet* sur le terrain.

La planchette est, ce que son nom indique, une petite planche, une tablette sur laquelle on fixe une feuille de papier. Elle est liée à un pied à trois branches qui la supporte à hauteur convenable, par un système qui ne lui permet de tourner que dans un plan horizontal, lorsqu'à la manière de la boussole (13) on l'a une fois disposée dans ce plan. On s'arrange ordinairement pour que ce système de support puisse s'adapter sur le même pied que la boussole, ces deux instruments n'étant point employés à la fois.

34. *L'usage de la planchette* exige celui d'une *alidade*, qu'on remplace quelquefois par une lunette à réticule (5), dont on peut le plus souvent se passer. L'*alidade* de la planchette est une règle en laiton de 0m.40 longueur, terminée par deux *pinnules* perpendiculaires à son plan, et portant des fentes et des fenêtres munies de soies ou de crins.

La planchette étant disposée horizontalement, et l'alidade passant par un point *a* du papier placé sur la verticale du point A du terrain qu'il représente, si l'on vise par les pinnules à un signal éloigné S et qu'on trace au crayon, en suivant le bord de la règle la direction *as*, on obtiendra évidemment sur la planchette la trace du plan vertical passant par les points A et S du terrain.

Une seconde direction *as'* vers un autre signal éloigné S', tracée de la même manière, donnerait sur la planchette la projection horizontale de l'angle SAS' formé au point A du terrain par les deux signaux. Prenant alors sur la planchette dans les directions *as*, *as'* les distances AS AS' à l'échelle du plan, on voit que l'on aurait ainsi sur le papier tous les éléments *sas'* de la projection horizontale du triangle SAS' du terrain.

Il convient toujours de tracer les directions sur la planchette, suivant toute la longueur de la règle.

Quelques auteurs recommandent l'emploi d'un compas d'épaisseur et d'un fil à plomb pour disposer *exactement* le point *a* de la planchette dans la verticale de A du terrain. Cette rigueur ne serait indispensable que s'il s'agissait de tracer sur le terrain un projet de peu d'étendue porté par la planchette; mais, dans les levés, à moins que l'échelle du plan ne soit pas très-grande, on n'établit jamais exactement cette superposition des points *a* et A. La plus grande distance de leurs projections étant au plus égale à la demi-diagonale de la planchette, cette erreur est à peine sensible par rapport aux distances et aux directions qu'on y trace dans les levés à l'échelle habituelle. On emploie quelquefois, conjointement avec la planchette, un instrument qui rend l'usage de celle-ci plus rapide et plus étendu, c'est le *déclinatoire*.

35. *Le déclinatoire* se réduit à une AIGUILLE AIMANTÉE placée dans une boîte rectangulaire un peu longue, et dont les longs côtés servent de règles. Deux petits arcs de 30 à 40 degrés forment des parties de limbe. Le milieu de l'un des arcs porte un N (nord), l'autre un S (sud). Ces points et le centre de l'aiguille sont placés dans un plan rigoureusement parallèle aux longs côtés de l'instrument.

36. *L'emploi du déclinatoire* permet de donner à la planchette, à une station quelconque, une position parallèle à celle qu'elle occupait à la station précédente. En effet, placez le déclinatoire sur la planchette, de manière que les extrémités de l'aiguille coïncident

avec la ligne NS (nord-sud), l'aiguille étant parvenue au repos. Tirez une droite le long d'un des grands côtés de la boîte, et marquez les extrémités de cette droite des lettres correspondantes *ns*. Supposez maintenant que la planchette est transportée à une autre station. Placez le grand côté du déclinatoire le long de la ligne *ns* du plan. Faites tourner la planchette sur son genou jusqu'à ce que les extrémités de l'aiguille reviennent en NS, et la planchette aura évidemment repris une position parallèle à celle qu'elle avait d'abord, car les directions de l'aiguille aimantée dans les deux positions successives ne se rencontrant que sur l'axe de rotation de la terre, peuvent être regardées comme formant des angles égaux avec la droite que l'on mènerait de la première à la seconde station.

37. *Rectification des instruments en général.* La rectification de presque tous les instruments repose sur le principe suivant (*planche* LXXXI, *fig.* 6) :

Soient : un plan dont la trace est XY ; *l*L une droite formant avec ce plan un angle α ; AC un axe perpendiculaire au plan XY, et autour duquel celui-ci peut tourner dans son propre plan ; enfin *lm*, LM des liens quelconques qui lient indissolublement la droite *l*L au plan XY.

Si l'on fait décrire au plan une demi-révolution autour de l'axe, X passera en Y, LM en L'M', *lm* en *l'm'*, et le prolongement YQ de L'*l'* formera *au-dessous* du plan un angle ZYQ $= \alpha =$ celui qu'elle formait *au-dessus* du plan dans la première position ; enfin l'angle LO*l'*, qui a son ouverture dans le même sens que les deux angles α et qui est l'angle compris entre les deux positions de la droite, sera égal à 2α.

Il en résulte que, soit que dans sa première position on fasse décrire à OL un angle LOV $= \alpha$, soit que, dans la seconde, on fasse décrire à O*l'*, en remontant, un angle *l'*OV $= \alpha$, on ramènera la droite au parallélisme avec le plan. Ce simple lemme bien compris, on saisira, je crois, facilement le principe de toutes les méthodes de vérification. Nous allons en faire l'application à un instrument quelconque, composé d'un limbe gradué *m*M d'une lunette et d'un niveau à bulle d'air N*m* (*fig.* 7, *planche* LXXXI); tel serait, par exemple, le *niveau* employé dans les plus grands nivellements (14).

38. *La vérification de la lunette,* quant à l'axe optique et aux fils du réticule, étant faite comme il est dit au paragraphe (10), on règlera le niveau comme suit :

39. *Régler le niveau* et mettre l'axe de l'instrument dans la verticale (*fig.* 7, *planche* LXXXI). On placera tout l'instrument dans une position qui disposera le limbe aussi horizontalement que possible. On tournera l'instrument sur son support jusqu'à ce que l'axe du niveau se trouve dans une direction perpendiculaire au plan

vertical qui passerait par les axes de deux des vis à caler. Cela fait, on tournera la troisième vis à caler jusqu'à ce que le milieu de la bulle d'air se maintienne juste au milieu du tube. Alors on fera décrire à tout l'instrument 180° autour de son axe. Si cet axe de rotation AC (*fig.* 7) n'était point vertical, le niveau *n*N prendra la position N'*n'*, et la bulle d'air quittant le milieu du tube parcourra une certaine distance *bb'*. A l'aide de la petite vis de rappel du tube, on fera parcourir à l'extrémité de celui-ci un petit arc tel, que la bulle revienne (non au milieu du tube) mais au milieu de l'intervalle *bb'*, qu'elle a parcouru en s'en éloignant; cela fait, le niveau aura pris une position parallèle à R'R, c'est-à-dire parallèle au plan du limbe *m*M. Dans cet état, ramener la bulle d'air au milieu du tube, rendre celui-ci horizontal ou rendre l'axe AC vertical A'C, sont évidemment une seule et même opération, qui se fera à l'aide de la troisième vis à caler.

Après avoir, par le retournement, replacé le niveau dans sa première position, on recommencera l'opération, s'il y a lieu; ce qui ne deviendra nécessaire qu'autant que l'on n'aurait pas bien saisi le milieu de l'intervalle *bb'* où l'on a cherché à ramener la bulle.

Cela fait, le niveau sera réglé par rapport au plan *n*NM*m'*, il faut alors le régler par rapport à tous les autres. Pour cela, on fera tourner l'instrument entier autour de A'C (AC devenu perpendiculaire à *n*N), jusqu'à ce que le plan *n*NM ait décrit 90° seulement. Si la bulle d'air occupe encore le milieu du tube dans cette position, le niveau tourne réellement dans un plan horizontal, et l'axe A'C est vertical, puisqu'il est perpendiculaire à deux horizontales qui se coupent (*Géométrie*. F. 12).

Si la bulle du niveau, au contraire, a quitté le milieu du tube, c'est que les choses sont dans la situation indiquée *fig.* 8, *pl.* LXXXI, qui montre qu'il faut ramener la bulle d'air au milieu du tube cette fois, et par le seul emploi de la vis à caler V.

On fera alors tourner l'instrument sur son axe AC, rendu vertical par l'effet de la vis V, et si, dans toutes les positions qu'il pourra prendre, la bulle d'air ne reste pas au milieu du tube, on l'y ramènera à l'aide des vis à caler; il convient toujours, dans ces tâtonnements, de placer successivement l'instrument dans deux positions perpendiculaires, l'une d'elle étant parallèle à la droite qui joint deux des vis, et l'autre perpendiculaire à cette droite. On emploie ainsi les trois vis. Cette rectification ne doit d'ailleurs jamais se faire sur un plancher.

40. *Accorder la lunette avec le niveau* (*fig.* 9, *planche* LXXXI). Cette opération ne doit jamais se faire qu'après celle qui vient d'être exposée. Elle suppose, en outre, que la lunette considérée isolément a été rectifiée comme il est dit (10).

On disposera l'instrument de manière que la bulle d'air du niveau reste toujours au milieu du tube, puis on visera, à travers la croisée des fils de la lunette, un point éloigné, et, par exemple, l'intersection V du voyant de la mire. On fera décrire 180° à tout l'instrument sur son support AC, le niveau *n*N (*fig.* 9) se trouvera retourné en N'*n*', la lunette *o*O prendra la position O' *o*', et, comme ce sera l'objectif O qui se trouvera du côté de l'observateur, il enlèvera la lunette de ses collets CC'; — il la retournera *seule* bout pour bout, ramenant ainsi l'oculaire de son côté et l'objectif du côté de la mire; — il visera alors de nouveau le point V. S'il le rencontre à l'intersection des fils du réticule, l'instrument est réglé, et l'axe optique de la lunette est parallèle au niveau. — S'il ne rencontre pas V, il fera signe au porte-mire pour qu'il amène le voyant dans la nouvelle direction de l'axe optique. — Puis, il lui fera partager en deux parties égales l'intervalle VV', et amener le voyant au milieu de cet intervalle.

Cela fait, à l'aide de la vis Z, qui sert à soulever le montant C au-dessus de MQ, ou à le rapprocher de ce plan, il fera basculer doucement la lunette autour de C', jusqu'à ce qu'il apperçoive le voyant sous la croisée des fils. Dans ce mouvement, la lunette aura pris *sensiblement*, mais non rigoureusement, la position RR' parallèle au niveau. On devra donc recommencer l'opération jusqu'à ce qu'après comme avant le retournement de l'instrument et le retournement de la lunette bout pour bout, l'intersection des fils du réticule se projette rigoureusement sur un même point de l'espace, la bulle d'air restant au milieu du tube.

41. *Accorder la lunette et le zéro des verniers avec le niveau dans la boussole (planche* LXXXIII). L'opération précédente suppose que l'on peut enlever la lunette de ses collets; cela n'a pas lieu dans la boussole. Enfin, il ne suffit pas que l'axe du niveau et l'axe optique de la lunette soient rigoureusement parallèles, il faut, en outre, que ce parallélisme ait lieu lorsque les verniers marquent zéro.

Avant d'indiquer comment on devra opérer avec cet instrument, remarquons que, dans la disposition des nombres correspondant aux divisions tracées sur la règle, on ne trouvera presque jamais la ligne des zéros sur le diamètre qui passe par le centre des arcs gradués. Il en résulte qu'en faisant faire à l'alidade autour de son axe une demi-révolution, les zéros des verniers ne viendront pas se placer sur les zéros de l'alidade, mais bien sur d'autres divisions. On ne sera donc assuré que le retournement a été de 180° qu'autant que deux lignes homologues prises sur les deux verniers seront en coïncidence avec deux divisions du limbe d'égale graduation.

Cela posé, on rendra vertical l'axe de rotation de la boussole, la bulle d'air étant au milieu du tube; — on amènera les verniers à zéro; — on visera avec la lunette rectifiée (10) un point éloigné V

(40); — on retournera la lunette en lui faisant décrire un plan vertical; — l'on s'assurera, comme il est dit ci-dessus, qu'elle a décrit 180°; — on fera faire à la boussole une demi-révolution horizontale sur son axe, ce qui ramènera l'oculaire de la lunette du côté de l'observateur; — on visera de nouveau au point V. Si l'intersection des fils du réticule le recouvre, tout est réglé; si elle ne le recouvre pas, elle se projette sur un autre point V′ (*fig.* 9, *planche* LXXXI). — On fera alors placer le milieu du voyant de la mire au milieu de la distance VV′, et l'on ramènera l'intersection des fils sur ce milieu à l'aide de la vis E″ (*fig.* 3, *planche* LXXXIII), c'est-à-dire qu'on fera mouvoir *ensemble* autour de l'axe A, *fig.* 2, la règle R′ et l'alidade qui porte la lunette jusqu'à ce que la croisée des fils couvre le milieu de la distance VV′. Dans cette situation, l'axe optique de la lunette, ainsi que la corde des zéros du limbe seront deux horizontales parallèles, mais le niveau, qui était horizontal avant ce mouvement, ne le sera plus. On ramènera la bulle d'air au milieu du tube, en agissant sur le niveau seulement, c'est-à-dire en le faisant tourner seul autour de sa charnière *g*″.

L'instrument est complétement réglé, si l'on a opéré convenablement. Pour s'en assurer, on ramènera le zéro des verniers sur les zéros du limbe, on fera faire une demi-révolution à la boussole, on ramènera la bulle au milieu du tube si elle s'est un peu dérangée, mais cette fois à l'aide des seules vis à caler, et on recommencera jusqu'à parfait réglement.

Passons aux *instruments à réflexion*.

42. *Le sextant* (*planche* LXXX, *fig.* 9). Soit NN′ un miroir dont la position est invariable, — MM′ un autre miroir mobile autour d'un axe O perpendiculaire au plan de la figure. Supposons que ce dernier miroir ait pris une position MOM′ rigoureusement parallèle à NN′. Dans cette situation, tout rayon incident GO (*voyez* LUMIÈRE) se réfléchira sur le miroir O, suivant OR, et après avoir subi une seconde réflexion en R, il pénétrera dans l'œil L suivant une direction RL parallèle à GO.

Si le miroir NN′ est étamé sur la moitié de sa surface seulement, l'œil L verra deux images G, G′ du même objet, l'une directe G, l'autre réfléchie, et ces images, à cause de la distance GO que l'on suppose très-considérable par rapport à celle des miroirs, paraîtront en coïncidence.

Si l'on suppose maintenant que le miroir MM′ est lié par une tige rigide M′A, dont l'extrémité A munie d'un *vernier* (2) puisse glisser sur un limbe gradué PQ de 60° environ, faisant corps avec NN′ et avec l'axe O, on aura une idée nette d'un *sextant*.

Donnons maintenant au miroir MM′ une position quelconque *mm*′B en promenant le vernier de A en B, les miroirs d'abord pa-

rallèles formeront entre eux un angle x donné en degrés minutes par les divisions de l'arc A B et le vernier.

Dans cette situation des miroirs, si l'œil aperçoit à travers NN' l'image d'un point quelconque X, et directement, par la partie non étamée, un autre point lumineux Z, l'angle y compris dans le plan XLZ de l'œil et de ces points sera le *double* de l'angle x des miroirs (*voyez* Lumière)

$$y = 2x$$

Pour éviter d'avoir à doubler la graduation de l'arc AB qui mesure x, on écrit sur le limbe des sextants le *double* de la graduation des arcs.

43. *Relever un angle avec le sextant.* Disposez l'instrument dans le plan de l'angle à relever. Mettez l'alidade sur le zéro ; — visez à l'objet de droite que vous verrez alors directement et par réflexion ; — tournez peu à peu l'alidade en dirigeant graduellement la vision directe vers tous les objets situés vers la gauche, mais en conservant toujours la vue de l'image réfléchie de l'objet de droite. Cette image semblera ainsi marcher de la droite vers la gauche, et se superposer à tous les corps qui sont sur son passage et qu'on voit directement à travers la partie non étamée du petit miroir NN'.

Continuez à faire mouvoir l'alidade dans le même sens, jusqu'à ce que la superposition de l'image réfléchie de l'objet de droite et de l'objet de gauche soit exacte ; — lisez l'angle sur le limbe.

44. *Relever un angle de hauteur,* la hauteur d'un astre au dessus de l'horizon, par exemple (p. 216).

Placez devant vous une surface polie parfaitement horizontale qu'on appelle *horizon artificiel.* Cette pièce se vend ordinairement avec le sextant ; on peut, au reste, la remplacer avec avantage par un miroir bien plan, nageant dans un bain de mercure. Tournez-vous de manière à y voir l'astre par réflexion à l'œil nu ; — disposez alors le sextant dans le plan vertical ; — puis, visant par la partie non étamée à l'image vue dans l'*horizon artificiel,* amenez l'image réfléchie de l'astre en contact avec celle-ci. — Lisez l'angle, sa *moitié* est l'angle de hauteur cherché

$$\text{hauteur cherchée} = \tfrac{1}{2}\ \text{angle observé}.$$

En effet, c étant (*fig.* 10, *planche* LXXX) le centre du sextant, A l'astre, le rayon A H envoyé de l'astre à l'horizon artificiel se réfléchit suivant H C, de sorte que A est vu par la partie non étamée en un point A'. L'astre A et son image A' sont donc deux objets dont on prend l'angle comme en (43). Or, l'angle qu'on cherche est H'HA, qui n'est que moitié de AHA'.

Il est vrai que l'angle obervé est réellement ACA', mais à cause

de l'éloignement de A, la petite distance HC est négligeable, et l'on a sensiblement $\frac{1}{2}$ AHA' = $\frac{1}{2}$ ACA',

45. *A la mer*, c'est l'horizon *sensible* qui remplace l'*horizon artificiel*, et l'on amène alors le bord de l'image réfléchie de l'astre au contact avec un point convenable de la ligne que la mer dessine sur le ciel. La hauteur cherchée est alors égale à l'angle observé. Toutefois, on doit rigoureusement en retrancher le petit arc dû à la DÉPRESSION de l'horizon au-dessous du niveau du pont du navire ou du point dont on observe (*voyez* pag. 512).

Les sextants portent d'ailleurs des verres colorés, qui affaiblissent à volonté l'éclat du soleil, lorsqu'on prend la hauteur de cet astre.

46. On parvient donc, à l'aide du sextant, à mesurer tous les angles qui ne dépassent pas 120°, et ce, dans tous les plans, sans le secours d'aucun aide, sans avoir à s'embarrasser d'un trépied qui porte l'instrument, sans qu'il soit même nécessaire que l'observateur soit immobile : ce qui fait que, soit à pied, soit à cheval, soit sur le pont mouvant d'un navire, on obtient facilement l'angle compris entre deux objets, jusqu'à un degré d'exactitude qui atteint une *minute* pour les plus petits sextants. Je possède un de ces instruments qui, enfermé dans sa boîte, forme un cylindre qui n'a pas plus de 0m.076 diamètre et 0m.035 hauteur.

47. *Vérification et rectification du sextant.* Avant de se servir d'un sextant, il faut s'assurer :

1° Que les plans des deux miroirs sont perpendiculaires au plan du limbe;

2° Que l'alidade marque zéro lorsque les deux miroirs sont parallèles;

3° (Si le sextant porte une lunette) que l'axe optique de cette lunette est parallèle au plan du limbe.

On vérifie la première condition par deux opérations successives. On s'assure d'abord que le plan du miroir mobile (le grand miroir) est perpendiculaire au plan du limbe, en le tournant de manière à voir par réflexion une portion de ce limbe. Si la surface réelle et la surface refléchie sont le prolongement exact l'une de l'autre, la condition est satisfaite. Si elle ne l'est pas, on change l'inclinaison du plan du miroir au moyen des vis à ce destinées.

Maintenant, le plan du miroir fixe (petit miroir) sera parallèle à celui du grand, si les images directe et réfléchie d'un même objet éloigné se superposent exactement. Si la superposition n'a pas lieu, on tourne les vis du petit miroir jusqu'à ce qu'on l'obtienne rigoureusement.

C'est une conséquence du parallélisme des miroirs que l'alidade marque zéro, lorsque les images directe et réfléchie d'un même objet se superposent exactement. Toutefois, si cette superposition ayant

lieu, l'alidade, au lieu d'indiquer zéro, marquait + ou — α, il faudrait ajouter avec son signe cette valeur angulaire constante à chaque angle observé.

Quant au parallélisme du limbe et de l'axe optique de la lunette, on le vérifiera en posant sur le limbe du cercle rendu fixe à deux points diamétralement opposés, deux *viseurs*, c'est-à-dire deux petits rectangles en cuivre de même hauteur, dont les plans sont perpendiculaires à une base plane qui coïncide avec le limbe. On regarde alors avec la lunette l'objet qui se trouve dans le plan de leurs arêtes supérieures. Si cet objet répond précisément au milieu de l'intervalle des fils, l'axe optique est parallèle au limbe. Dans le cas contraire, on élève ou on abaisse la lunette au moyen des vis, jusqu'à ce que le parallélisme soit établi.

48. *L'équerre à réflexion ou à miroirs* a sur l'équerre ordinaire l'avantage, 1° de pouvoir être réduite à un très-petit volume; 2° de pouvoir être tenue à la main, ce qui dispense d'un pied, le plus embarrassant attirail en voyage; 3° de donner les hauteurs sans aucun calcul; 4° de donner facilement et avec précision les inclinaisons à 90°, à 45° et à 60° sans jalonnage.

Jusqu'à preuve contraire, je crois pouvoir avancer que cet instrument est dû à M. *Lipkens*, géomètre en chef du cadastre, qui le construisit à Foix (Ariége), vers l'année 1810.

49. L'équerre à miroir (*fig.* 11, *planche* LXXX) se compose d'un parallélipipède creux en cuivre ACPQ, d'environ 0m.12 longueur, et 0m.02 base, portant trois couples de miroirs, et laissant sur ses bords des ouvertures pour permettre aux rayons lumineux de venir s'y réfléchir. Dans chacun des couples, l'un des miroirs n'est étamé que sur le milieu de sa surface.

Soient, par exemple, D et E deux miroirs dont les plans forment un angle dièdre de 90°, et OO′ deux objets éloignés sur l'alignement desquels on veuille se placer. Il est évident que l'on occupera très-sensiblement cette position, si l'œil placé en M aperçoit les deux objets OO′ en superposition exacte, le premier O directement par la partie non étamée du miroir D, le second O′ par réflexion, la distance DE des miroirs étant négligeable par rapport à la distance des objets O, O′.

Les deux miroirs AB AC étant supposés, de leur côté, faire entre eux un angle de 45°, il n'est pas moins évident que, en opérant comme ci-dessus, on obtiendra des directions inclinées à $2 \times 45 = 90°$, ce qui donne le moyen d'élever des perpendiculaires à une direction donnée sur le terrain. Si ces miroirs faisaient entre eux un angle de 22° $\frac{1}{2}$, on pourrait encore disposer l'instrument de manière que, après *quatre* réflexions (*voyez* LUMIÈRE), on obtînt des directions réciproquement inclinées l'une à l'autre de $4 \times 22.5 = 90°$.

De même PN et QN étant inclinés à 30°, on aura sur le terrain des directions inclinées l'une à l'autre de $2 \times 30 = 60°$, qui permettront de construire des triangles équilatéraux.

50. *Vérification de l'équerre à miroirs*. Ces vérifications consistent à s'assurer que les angles des miroirs sont bien ceux que l'on suppose, et, s'il n'en est pas ainsi, à rétablir l'inclinaison cherchée à l'aide des vis.

Pour s'assurer que D et E sont perpendiculaires, on tracera un alignement OO', puis se plaçant en un point de cet alignement, on fera mouvoir les miroirs jusqu'à ce que les points OO' paraissent en coïncidence.

Pour s'assurer que les miroirs AB, BC font entre eux un angle de 45°, on marchera (*fig*. 12, *planche* LXXX) sur un alignement OO'; — on choisira un point extérieur O'', par lequel on mènera une perpendiculaire à l'aide du point O. Cette opération déterminera le point S de station, pied de la perpendiculaire O''S à SO. — Sans changer de station, on se retournera vers O' et l'on mènera une perpendiculaire à SO''. Si cette perpendiculaire coïncide avec SO', l'instrument est réglé pour ces deux miroirs. — Si la coïncidence n'a pas lieu, on modifiera peu à peu l'inclinaison des miroirs.

Quant à PN et PQ, on s'assurera qu'ils font entre eux un angle de 30° en choisissant un point O'' (*fig*. 13, *planche* LXXX) hors de l'alignement OO'; — on cheminera sur cet alignement jusqu'à ce qu'on ait déterminé, à l'aide de O, le point S, intersection de la ligne SO'', qui fait avec OS un angle de 60°; — puis sans changer de station, on fera avec SO'', à l'aide de la *quatrième* réflexion, un angle de 120°. Les miroirs ne seront réglés que lorsque le côté de cet angle coïncidera avec la direction SO'.

51. *Mener une horizontale par un point donné* (*fig*. 14, *planche* LXXX). Soit L ce point. Plantez un jalon L'L en L', que vous inclinerez jusqu'à ce que son extrémité L qui porte un fil à plomb, occupe le point L. Soit O le point où le plomb atteint le terrain. Placez en O un petit carré de papier blanc, ou tout autre objet distinct dont un bord rasera le point O; — considérez alors la verticale LO comme une direction à laquelle il faut mener une perpendiculaire; — faites placer dans la direction trouvée LT par la méthode (49), un jalon MT dont le point T, bien visible et mobile le long de MT, servira de mire. Lorsque la coïncidence des images OT aura lieu, la ligne LT sera l'horizontale demandée.

Dates. D'après un Annuaire des longitudes déjà ancien, la *boussole* était connue et employée en France, vers 1260; — les *lunettes* à lire s'introduisirent vers 1300; — les *lunettes* d'instruments, vers 1590; on y attribue la première idée de la lunette à deux verres convexes, à *Kepler*, année 1611; — la description du *vernier* est pu-

bliée en 1631; — *Morin* applique la lunette aux arcs divisés, en 1634; — le *sextant* est inventé par *Hadley* en 1731; — *Hall* aurait construit une lunette achromatique dès 1750, et *Dollond* aurait publié la découverte des lunettes achromatiques, en 1758; — *Mayer* aurait, en 1752, donné l'idée de la *répétition* des angles mise à profit par Borda, dans son cercle répétiteur, en 1786.

INTÉGRALES. 1. Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel. Il a dès lors pour objet principal la détermination de la valeur d'une FONCTION, dont le coefficient différentiel est donné.

2. X étant, par exemple, une fonction de x dont la différentielle $X\,dx = du$ ou dont le coefficient différentiel $\frac{du}{dx} = X$ est connu, le problème général consiste à remonter de ce coefficient à la valeur u dont il dérive; problème dont la solution générale est indiquée par la notation

$$u = \int X\,dx$$

3. La caractéristique $\int$, inverse de la caractéristique d, est l'initiale du mot *somme*. Elle doit son origine à ce que, suivant les idées de *Leibnitz*, les DIFFÉRENTIELLES représentant les accroissements infiniment petits des variables, il s'ensuit qu'une variable quelconque est réciproquement la *somme* du nombre infini d'accroissements qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au moment où on la considère.

4. Le signe $\int$, qui indique une intégration *à opérer*, détruirait donc le signe d. (p. 528), en tant que celui-ci précéderait lui-même une quantité *à différentier*, et l'on aurait dès lors immédiatement, et sans calcul (pag. 529),

$$\int d\,.\,x^m = \int m x^{m-1}\,dx = m\int x^{m-1}\,dx = x^m$$

d'où l'on pourrait tirer directement

$$\int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m}$$

on aurait encore

$$\int d.\,\sqrt{x} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\int d\,.\,\text{log. hyp.}\,x = \int \frac{dx}{x} = \text{log. hyp.}\,x$$

de sorte que l'on trouverait ainsi, à l'article *Différentielles*, un assez grand nombre d'*intégrales*.

5. Quant aux *règles* à suivre pour intégrer, elles sont nombreuses, d'une application parfois difficile, et l'on est bien éloigné d'en avoir pour tous les cas; nous donnerons les plus usuelles et les plus générales, et nous les ferons suivre d'un assez grand nombre d'exemples.

6. Règle fondamentale. *Renversez les règles qui ont été données pour différentier, et vous obtiendrez autant de règles pour intégrer.* Nous avons vu, par exemple, que l'on avait pour la différentielle de $u+v-w$

$$d.(u+v-w)=du+dv-dw$$

on a donc réciproquement (4)

$$\int d.(u+v-w)=u+v-w=\int(du+dv-dw)$$

or, évidemment

$$u=\int du,\quad v=\int dv;\quad -w=-\int dw$$

donc

$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw=u+v-w,$$

ce qui montre que :

7. *L'intégrale de la somme algébrique de plusieurs fonctions différentielles est égale à la somme algébrique des intégrales de chacune des fonctions.*

8. De même : puisque les quantités constantes liées aux variables par les signes $+$ ou $-$ disparaissent par la différentiation, il faut, lorsqu'on remonte à l'intégrale, ajouter après l'intégration de chaque monome une constante C′, C″, C‴ ou une constante C égale à leur somme. C'est l'état de la question qui déterminera ensuite la valeur de cette constante.

Ainsi, par exemple, $\frac{x^m}{m}+C$ étant la valeur générale de l'intégrale $\int x^{m-1}dx$; si les conditions du problème sont telles que l'intégrale doive *s'évanouir* pour une valeur particulière de x ($x=a$, je suppose), on a évidemment pour déterminer la constante C, la condition

$$C+\frac{a^m}{m}=0,\quad \text{d'où } C=-\frac{a^m}{m}$$

de sorte que l'intégrale complète devient, pour ce cas,

$$\int x^{m-1}dx=\frac{x^m-a^m}{m}$$

9. De même encore (11)

$$\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$$

et si l'intégrale doit s'évanouir pour $x=1$, il vient

$$C+\frac{1^{m+1}}{m+1}=0, \qquad \text{d'où } C=-\frac{1}{m+1}$$

et enfin, pour ce cas,

$$\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}-1}{m+1}$$

10. Nous convenons, afin d'abréger, de faire le plus souvent abstraction de la constante C dans les exercices qui suivent, mais il ne faut pas oublier de l'ajouter invariablement dans toutes les applications du calcul intégral, et de la déterminer ainsi qu'on vient de le voir et qu'on le verra encore plus loin.

11. Puisque la différentielle de la puissance d'une fonction quelconque se forme (p. 529) en multipliant la différentielle de la fonction par l'exposant de la puissance, et diminuant l'exposant primitif d'une unité, il faudra inversement :

Pour intégrer une différentielle monome de la forme $x^m dx$, 1° *augmenter l'exposant* m *de la variable* x *d'une unité;* 2° *diviser par cet exposant ainsi augmenté, et par la différentielle de la variable;* ainsi :

$$\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}; \qquad \int dx=\int x^0\,dx=\frac{x^{0+1}}{0+1}=x$$

$$\int ax^m\,dx=a\int x^m\,dx=\frac{ax^{m+1}}{m+1}; \qquad \int a\,dx=ax$$

12. On peut toujours faire sortir un facteur constant a du signe $\int$, et l'on voit que, lorsqu'un tel facteur multiplie une fonction différentielle, il multiplie aussi son intégrale.

On aurait encore

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}; \quad \int 2x\,dx=x^2; \quad \int -dx=-\int dx=-x$$

en faisant sortir le facteur constant -1 du signe.

13. On peut aussi introduire évidemment sous le signe $\int$ un *facteur* constant quelconque, pourvu qu'en dehors du signe on écrive ce facteur à l'inverse; pratique qui facilite quelquefois l'intégration. Ainsi

$$\int\frac{a\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\int\frac{b\,a\,dx}{a+bx}=\frac{a}{b}\int\frac{b\,dx}{a+bx}$$

14. Il suffit, pour appliquer commodément la règle (11) aux

fractions et aux radicaux de faire usage d'EXPOSANTS fractionnaires (p. 715), on aurait donc

$$\int a\,dx\sqrt[3]{x^2} = a\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{a\,x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}\,a\,x^{\frac{5}{3}} = \frac{3a}{5}\sqrt[3]{x^5};$$

$$\int dx\sqrt[n]{x^m} = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{n\,x^{\frac{m}{n}+1}}{m+n}$$

$$\int\frac{a\,dx}{x^n} = a\int x^{-n}dx = \frac{a\,x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-a}{(n-1)\,x^{n-1}};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x}$$

15. On fait remarquer incidemment que : *toute fraction dont le dénominateur est un radical carré et dont le numérateur est la différentielle de la fonction que ce radical affecte, a pour intégrale le double de ce radical.*

16. La règle (11) s'applique encore aux fonctions que l'on peut ramener à la forme générale $x^m\,dx$, en faisant usage d'une variable auxiliaire. Soit par exemple à intégrer l'expression $(ax+b)^m\,dx$; on peut faire

$$ax+b=z \quad \text{d'où} \quad dx=\frac{dz}{a}$$

l'on a alors à intégrer $\frac{z^m\,dz}{a}$; or, $\int\frac{z^m\,dz}{a} = \frac{1}{a}\int z^m\,dz = \frac{z^{m+1}}{a\,(m+1)}$

et remettant pour z sa valeur, il vient

$$\int(ax+b)^m\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a\,(m+1)}$$

on trouverait encore, de la même manière,

$$\int(b+ax^n)^m\,x^{n-1}\,dx = \frac{(b+a\,x^n)^{m+1}}{n\,a\,(m+1)}+C$$

17. Ce procédé réussit, en général, sur les quantités qui sont telles que les facteurs qui multiplient la parenthèse forment la différentielle de la quantité comprise dans la parenthèse, abstraction faite de son exposant total, et même encore lorsque ces facteurs forment cette même différentielle multipliée ou divisée par une quantité constante. Dans ces conditions, on peut se passer de l'emploi de variables auxiliaires et se conformer simplement à cette règle :

1° *Ajoutez 1 à l'exposant total de la parenthèse;*

2° *Divisez par cet exposant ainsi augmenté, et par la différentielle de la quantité comprise dans la parenthèse.* Ainsi :

$$\int (a^m + x^m)^{n-1} x^{m-1} dx = \frac{(a^m + x^m)^n x^{m-1} dx}{n.m x^{m-1} dx} = \frac{1}{mn}(a^m + x^m)^n$$

$$\int [a + bx^n]^{\frac{p}{q}} x^{n-1} dx = \frac{q}{nb(p+q)}[a + bx^n]^{\frac{p}{q}+1}$$

$$\int [2x^3 + 3x^2]^4 (x^2 + x)\, dx = \frac{1}{30}[2x^3 + 3x^2]^5$$

$$\int [a^4 - x^4]^{\frac{5}{3}} 3x^3 dx = -\frac{9}{32}[a^4 - x^4]^{\frac{8}{3}}$$

$$\int \frac{a\,dx}{(x-b)^n} = \frac{a(x-b)^{-n+1}}{(-n+1)} = -\frac{a}{(n+1)} \cdot \frac{1}{(x-b)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^4}} = \int [a^2 + x^2]^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\int \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sqrt{2ax - x^2}$$

$$\int \frac{(a^2 + 2ax)\,dx}{\sqrt{ax + x^2}} = \int (ax + x^2)^{-\frac{1}{2}} a(adx + 2xdx) = 2a\sqrt{ax + x^2}$$

18. Quelques expressions, dont la forme ne paraît pas d'abord se prêter à l'application directe des règles précédentes, peuvent être ramenées à une forme qui en facilite l'intégration, à l'aide d'artifices de calcul dont les exemples suivants feront sentir l'esprit :

$$\int (a - x)\, dx \sqrt{b - x} = \int [a - b + b - x]\, dx \sqrt{b - x}$$

$$= \int [a - b]\, dx \sqrt{b - x} + [b - x]^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -[a - b]\frac{2}{3}(b - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(b - x)^{\frac{5}{2}}$$

19. On voit que l'on a introduit ici, dans l'expression donnée, les monomes $-b + b$ qui se détruisent. Dans l'exemple suivant on divise en dedans de la parenthèse par x^2, et, par compensation, on lui donne pour facteur au dehors x^2 élevé à la puissance $\frac{3}{2}$ ou x^3, on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = \int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{x^3\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int (ax^{-2}+b)^{-\frac{3}{2}} x^{-3} dx = \frac{1}{a}(ax^{-2}+b)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}$$

20. On trouverait de même

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 \pm x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(a^n + x^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{a^n (a^n + x^n)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax}$$

$$\int \frac{dx\sqrt[3]{1-x^3}}{x^5} = -\frac{(1-x^3)^{\frac{4}{3}}}{4x^4}$$

$$\int x^2 dx\sqrt{a+x} = \int dx\sqrt{a+x}\,[a+x-a]^2$$

$$= \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}a(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}a^2(a+x)^{\frac{3}{2}}$$

21. La règle (11) est en défaut pour le seul cas particulier où l'on a à intégrer l'expression $\frac{dx}{x}$ qui revient à $x^{-1}dx$, et donnerait

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

mais comme nous savons d'ailleurs (p. 552) que

$$d.\,\text{log. hyp. } x = \frac{dx}{x}$$

nous pouvons conclure que

$$\int \frac{dx}{x} = \int d.\,\text{log. hyp.} x = \text{log. hyp. } x + C$$

22. Il est peut-être utile de remarquer que la différence des deux résultats ci-dessus tient à ce que $\int \frac{dx}{x} =$ log. hyp. x suppose que la fonction de x, désignée par $\int \frac{dx}{x}$, s'évanouit pour $x = 1$

(p. 939), tandis que la règle générale qui donne $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ et, pour le cas particulier, $m = -1$, $\int x^{-1} dx = \frac{1}{0}$ suppose que l'intégrale s'évanouit lorsque $x = 0$.

Introduisant la première hypothèse dans la règle (11), c'est-à-dire déterminant la constante C par la condition que l'intégrale s'évanouisse lorsque $x = 1$, il vient (9)

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^0 - 1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

or (pag. 943), faisant $m = -1 + k$ dans la valeur (9) complète $\frac{x^{m+1} - 1}{m+1}$, et développant en série, il vient

$$\frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{x^k - 1}{k} = \frac{1}{k}\left(1 + k \log. x + \frac{k^2 (\log. x)^2}{1.2} + \ldots - 1\right)$$
$$= \log. x + \frac{k}{2}(\log. x)^2 + \text{etc.} \ldots$$

faisant alors $k = 0$, ou $m = -1$, il vient, comme plus haut, le logarihme étant hyperbolique,

$$\int \frac{dx}{x} = \log. \text{hyp}. x + C$$

23. On aurait de même

$$\int \frac{m\,dx}{x} = m \int \frac{dx}{x} = m \log. \text{hyp}. x + C = \log. \text{hyp}. \left(\frac{x}{c}\right)^m$$

en faisant la constante $C = -m \log. \text{hyp}. c$, car rien n'empêche de mettre une constante sous la forme d'un logarithme, d'un sinus ou toute autre. On voit d'ailleurs que :

24. *En général, toute fraction dont le numérateur est exactement la différentielle du dénominateur a pour intégrale le logarithme hyperbolique de ce dénominateur. Si le numérateur est cette différentielle exacte multipliée par un nombre constant, l'intégrale sera le même logarithme multiplié par ce nombre constant*, donc

$$\int \frac{dx}{a+x} = \log. \text{hyp}. (a + x) + \text{constante}$$

$$\int \frac{b\,dx}{x \pm d} = b \log. \text{hyp}. (x \pm a)$$

$$\int \frac{a\,dx}{a+bx} = \frac{a}{b}\int \frac{b\,dx}{a+bx} = \frac{a}{b} \log.\text{hyp.}\,(a+bx)$$

$$= \log.\text{hyp.}\,(a+bx)^{\frac{a}{b}}$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log.\text{hyp.}\,(a+bx)$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \frac{1}{n} \log.\text{hyp.}\,(a^n+x^n) = \log.\text{hyp.}\,(a^n+x^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\int \frac{(b+2cx)\,dx}{a+bx+cx^2} = \log.\text{hyp.}\,(a+bx+cx^2)$$

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{1-x+x^2} = \log.\text{hyp.}\,(1-x+x^2)$$

$$\int \frac{dx}{ax+bx^2} = \int \frac{x^{-2}dx}{ax^{-1}+b} = -\frac{1}{a} \log.\text{hyp.}\left(\frac{a}{x}+b\right)$$

$$\int \frac{(mx^n+nx^m)\,dx}{x^{n+1}+x^{m+1}} = -\log.\text{hyp.}\left(\frac{1}{x^m}+\frac{1}{x^n}\right)$$

25. Certaines expressions qui n'apparaissent pas d'abord sous la forme générale $\frac{m\,dx}{x}$ peuvent y être ramenées par des artifices que suggère l'habitude de ce genre de calcul. Exemples :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left[\frac{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right]$$

$$= \int \frac{x\,dx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} + dx\,(x^2 \pm a^2)^0}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Or le numérateur qui se réduit à $x dx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} + dx$ est exactement la différentielle du dénominateur ; donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log.\text{hyp.}\,[x+\sqrt{x^2 \pm a^2}] + C$$

et si l'on supposait que l'intégrale dût s'évanouir pour $x = a$, il viendrait $0 = \log.\text{hyp.}\,a + C$ ou $C = -\log.\text{hyp.}\,a$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log.\text{hyp.}\,[x+\sqrt{x^2 \pm a^2}] - \log.\text{hyp.}\,a$$

$$= \log.\text{hyp.}\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right]$$

26. On trouverait encore

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{d.[ax^{-1}]}{\sqrt{(ax^{-1})^2 \pm 1}}$$

$$= -\frac{1}{a} \text{ log. hyp.} \left[\frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{a} \text{ log. hyp.} \left[\frac{x}{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}\right] + C$$

27. *La méthode des coefficients indéterminés* facilite souvent les transformations; nous en rappellerons l'esprit en l'appliquant à un exemple :

Soit proposé d'intégrer $\frac{dx}{a^2-x^2}$; remarquant que le dénominateur peut se décomposer en deux facteurs *inégaux* $(a+x)(a-x)$, faisons

$$\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{A\,dx}{a+x} + \frac{B\,dx}{a-x}$$

A et B étant deux coefficients jusqu'ici indéterminés, et dont nous allons chercher la valeur. Réduisant les deux termes du second membre au même dénominateur, il vient

$$\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{[A\,a - A\,x + B\,a + B\,x]\,dx}{a^2-x^2}$$

Supprimant le dénominateur commun, divisant par dx et transposant tout dans un seul membre, on a

$$1 + A\,x - A\,a - Bx - Ba = 0$$

or, cette équation devant avoir lieu, quelle que puisse être la valeur de x, il faut que la somme des termes qui multiplient une même puissance de x soit égale à zéro; on a donc à la fois

$$1 - Aa - Ba = 0 \qquad \text{et} \qquad A - B = 0$$

tirant de ces deux équations les valeurs des coefficients A et B, il vient $A = \frac{1}{2a}$ et $B = \frac{1}{2a}$ de telle sorte que l'on a à intégrer

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \left[\frac{\frac{1}{2a}dx}{a+x} - \frac{-\frac{1}{2a}dx}{a-x}\right]$$

et l'on obtient, conformément à la règle

$$\frac{1}{2a} \text{ log. hyp.} (a+x) - \frac{1}{2a} \text{log. hyp.} (a-x) =$$

$$= \frac{1}{2a} \text{ log. hyp.} \left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C$$

28. On obtiendrait de la même manière

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left\{ \text{log. hyp.} (x - a) - \text{log. hyp.} (x + a) \right\}$$

$$= \frac{1}{2a} \text{log. hyp.} \left[\frac{x-a}{x+a} \right] + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{a}{b} + x\right)\left(\frac{a}{b} - x\right)} = \frac{1}{2ab} \text{log. hyp.} \left[\frac{a + bx}{a - bx} \right].$$

29. Si l'on avait à intégrer une expression à exposants numériques de la forme $(a + bx^n)^p x^m dx$, on développerait en *série* par la formule du binôme, et l'on n'aurait plus qu'à intégrer une suite de monômes par les règles précédentes. Ainsi :

$$\int (a + bx^2)^3 dx = \int dx [a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6]$$

$$= a^3 x + a^2 bx^3 + \frac{3ab^2 x^5}{5} + \frac{b^3 x^7}{7} + C$$

$$\int \frac{(a + bx^2)^2 a dx}{x^3} = \int ax^{-3} dx [a^2 + b^2 x^4 + 2abx^2].$$

$$= -\frac{a^3}{2x^2} + \frac{ab^2 x^2}{2} + 2a^2 b \,\text{log. hyp.}\, x + C$$

30. On peut s'épargner le développement, lorsque l'exposant de x hors du binôme étant augmenté d'une unité et divisé par l'exposant de x dans le binôme donne pour quotient un nombre entier positif; on égale alors la quantité binôme (sans son exposant total) à une variable auxiliaire z, et l'on exprime la différentielle proposée à l'aide de cette variable seule et de constantes, comme l'indique l'exemple suivant : soit à intégrer

$$\int cx^3 (a + bx^2)^{\frac{4}{5}} dx$$

comme l'on voit que l'exposant 3 de x hors du binôme augmenté de 1, donne 4 qui, divisé par 2 exposant de x dans le binôme, fournit un quotient entier positif, on fait

$$a + bx^2 = z \quad \text{d'où} \quad x^2 = \frac{z - a}{b} \quad \text{et} \quad x^4 = \frac{(z - a)^2}{b^2}$$

différentiant cette dernière expression pour obtenir $x^3 dx$ en z et dz, il vient

$$4x^3 dx = \frac{2(z - a) dz}{b^2} \quad \text{et} \quad x^3 dx = \frac{(z - a) dz}{2b^2}$$

on a alors à intégrer

$$\int \frac{c z^{\frac{4}{5}}(z-a)\,dz}{2b^2} = \int \left[\frac{c z^{\frac{4}{5}+1}\,dz}{2b^2} - \frac{c a z^{\frac{4}{5}}\,dz}{2b^2} \right]$$

qui, après l'intégration et la substitution de $a + bx^2$ pour z donne :

$$\int cx^3\,dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{c}{2b^2}(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}\left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right] + C$$

31. On trouverait de même

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}} = \frac{1}{20}(6x^2 - 9a^2)\sqrt[3]{[a^2+x^2]^2}$$

$$\int \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt{a+bx^n}} = [6b^2x^{2n} - 8abx^n + 16a^2]\frac{\sqrt{a+bx^n}}{15nb^3}$$

32. Les différentielles binômes qui ne sont pas dans le cas ci-dessus peuvent y être ramenées assez souvent par divers artifices. L'un d'eux consiste à les transformer de telle sorte que l'exposant de x dans le binôme change de signe. Il suffit pour cela de diviser les deux termes du binôme par la puissance de x dans ce binôme, et, par compensation, il faut multiplier hors du binôme par cette même puissance de x après l'avoir élevée à la puissance marquée par l'exposant total du binôme. Il est clair, en effet, que, par exemple :

$$cx^4\,dx\,(a+bx^2)^5 = cx^{14}\,dx\,(ax^{-2}+b)^5 \quad \text{et que}$$

$$\frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = a^2\,dx\,(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = a^2x^{-3}(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$$

Or, puisque $\frac{-3+1}{-2} = +2$ la dernière expression est intégrable;

et faisant $a^2x^{-2}+1 = z$ d'où $x^{-2} = \frac{z-1}{a^2}$;

$$-2x^{-3}dx = \frac{dz}{a^2}; \quad x^{-3}dx = -\frac{dz}{2a^2}; \quad a^2x^{-3}dx = -\frac{dz}{2}$$

on a à intégrer

$$\int \frac{-z^{-\frac{3}{2}}\,dz}{2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{d'où enfin}$$

$$\int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

33. On trouverait de même

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}} = -\frac{1}{a^6}\sqrt[3]{\frac{a^5}{x^3}+1} - \frac{1}{2a^6\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{x^3}+1\right)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}} = \left(\frac{2b}{3a^2x} - \frac{1}{3ax^3}\right)\sqrt{a+bx^2}$$

34. Si les deux termes du binôme contenaient x, on diviserait le binôme par l'une des deux puissances de x, et l'on multiplierait au dehors par la même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant du binôme

$$\frac{a^2\,dx}{x\sqrt{ax+x^2}} = a^2x^{-1}\,dx\,(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-\frac{3}{2}}\,dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a^2x^{-2}\,dx\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{donc}$$

$$\int \frac{a^2\,dx}{x\sqrt{ax+x^2}} = -2a\sqrt{\frac{a}{x}+1}$$

35. Il est encore un procédé fondamental assez fécond dû à Bernouilli, et qui a principalement pour but de faire dépendre l'intégrale qu'on cherche d'une autre intégrale plus simple; il est connu sous le nom *d'intégration par parties.*

Intégration par parties. La méthode dérive de l'équation (page 528), savoir :

$$d.uv = v\,du + u\,dv \quad \text{d'où l'on déduit}$$

$$\int d.uv = uv = \int v\,du + \int u\,dv \quad \text{et enfin}$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du = uv - \int v\,du$$

relation qui montre que si dans une différentielle $M\,dx$, la fonction M peut se décomposer en deux facteurs P et Q, et que l'on sache, par exemple, intégrer $Q\,dx$, on aura en appelant $\int Q\,dx = v$

$$\int M\,dx = \int PQ\,dx = Pv - \int v\,dP$$

d'où l'on déduit la règle suivante dont la pratique du calcul éclaircira le sens. *Règle* : 1° *décomposez la différentielle proposée* $M\,dx$ *en deux facteurs* P *et* $Q\,dx$ *dont l'un,* $Q\,dx$*, est directement intégrable ;*

2° *Intégrez en regardant l'autre facteur* P *comme constant* : ce qui donnera Pv (en supposant $\int Q\,dx = v$) ; 3° *différentiez ce dernier résultat* P v *par rapport à la seule fonction* P *qu'on avait prise d'abord pour constante*; ce qui donnera la différentielle $v\,d$P ; 4° *intégrez cette différentielle* $v\,d$P, *et, enfin, retranchez de* Pv l'intégrale $\int v\,dP$ que vous obtiendrez.

36. Ainsi, pour intégrer log. hyp. $x.dx$, on regarde d'abord dx comme seule variable, ce qui donne, en l'intégrant, x log. hyp. x ; différentiant ce résultat par rapport à log. hyp. x seul, il vient (page 532) $\frac{dx}{x}$ d'où, enfin,

$$\int dx \log.\text{hyp}.x = x \log.\text{hyp}.x - \int \frac{x}{x} dx = x \log.\text{hyp}.x - x + C$$

37. On obtiendrait par la même méthode

$$\int dx \sqrt{x^2 + a^2} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x\, d(\sqrt{x^2+a^2})$$

et comme $d.\sqrt{x^2+a^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, il vient

$$\int dx \sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{[x^2+a^2-a^2]\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int dx\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

de sorte que, passant le second terme dans le premier membre, il vient

$$2\int dx\sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log.\text{hyp}.[x + \sqrt{x^2+a^2}]$$

et enfin

$$\int dx\sqrt{x^2+a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \log.\text{hyp}.[x + \sqrt{x^2+a^2}]$$

On obtiendrait encore de même (ou plus simplement en changeant $+ a^2$ en $- a^2$)

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log.\text{hyp}.[x + \sqrt{x^2-a^2}]$$

38. Enfin, l'on aurait encore

$$\int dx\sqrt{x^2+2ax}=\frac{x+a}{2}\sqrt{x^2+2ax}-\frac{a^2}{2}\text{ log.hyp. }[x+a+\sqrt{x^2+2ax}]$$

39. *Intégration des quantités qui renferment des sinus, des cosinus.* L'intégration de ces quantités est presque entièrement fondée sur le principe qui sert à leur différentiation, en ce sens qu'il s'agit ici de détruire ce que la différentiation a opéré, pour retrouver la fonction primitive. Il faut donc prendre à l'inverse toutes les formules des pages 534 à 536. Sans les transcrire toutes ici, on en tirerait les relations fondamentales qui suivent :

$$\int dx\cos.x=\sin.x$$

$$\int dx\sin.x=-\cos.x$$

40. Le rayon du cercle étant$=a$, on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{arc}\left[\sin.=\frac{x}{a}\right]=\text{arc dont le sinus est}=\frac{x}{a}$$

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{arc}\left[\cos.=\frac{x}{a}\right]$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\text{ arc}\left[\text{tang.}=\frac{x}{a}\right]$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\text{ arc}\left[\text{séc.}=\frac{x}{a}\right]$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\text{arc}\left[\text{sin. vers.}=\frac{x}{a}\right]$$

41. On trouverait encore par l'emploi des méthodes exposées jusqu'ici :

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{ arc}\left[\sin.=\frac{x}{a}\right]$$

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{arc}\left[\sin.=\frac{x-a}{a}\right]$$

42. Faisant le rayon a du cercle$=1$, il vient

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc }(\sin.=x)$$

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc }(\cos.=x)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc (tang.} = x)$$

$$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc (cotang.} = x)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc (séc.} = x)$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc (coséc.} = x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arc (sin. verse.} = x)$$

$$\int dx \cos. mx = \frac{1}{m}\sin. mx$$

$$\int dx \sin. mx = -\frac{1}{m}\cos. mx$$

$$\int dx \sin.^m x \cos. x = \frac{\sin.^{m+1} x}{m+1}$$

$$\int dx \cos.^m x \sin. x = \frac{-\cos.^{m+1} x}{m+1}$$

43. Ces dernières formules conduisent à l'intégration de $dx \sin.^n mx \cos. mx$, car multipliant et divisant à la fois par m, il vient

$$\frac{dx \sin.^n mx \cos. mx}{m} = \frac{\sin.^n mx}{m} \times d[\sin. mx]$$

ce qui ramène l'expression à la forme $\frac{z^n dz}{m}$ en faisant $\sin. mx = z$; on a donc pour l'intégrale $\frac{z^{n+1}}{m(n+1)}$ ou

$$\int dx \sin.^n mx \cos. mx = \frac{\sin.^{n+1} mx}{m(n+1)} + C$$

On trouverait de même

$$\int dx \cos.^n mx \sin. mx = -\frac{\cos.^{n+1} mx}{m(n+1)} + C$$

44. $\int dx \sin. px \cos. qx$ s'intégrera en se rappelant les relations générales (*Géométrie*, M. 13) :

$$\sin . a \cos . b = \tfrac{1}{2} \sin . (a + b) + \tfrac{1}{2} \sin . (a - b)$$
$$\cos . a \cos . b = \tfrac{1}{2} \cos . (a + b) + \tfrac{1}{2} \cos . (a - b)$$
$$\sin . a \sin . b = \tfrac{1}{2} \cos . (a - b) - \tfrac{1}{2} \cos . (a + b)$$

qui permettent de poser

$$d x \sin . p x \cos . q x = \frac{1}{2}\Big[\sin . (p + q) x + \sin . (p - q) x\Big] d x$$

expression qui, écrite ainsi :

$$\frac{1}{2}\frac{(p+q)\, d x \sin . (p+q) x}{(p+q)} + \frac{1}{2}\frac{(p-q)\, d x \sin . (p-q) x}{(p-q)}$$

a évidemment pour son intégrale :

$$\frac{-\frac{1}{2}\cos . (p+q) x}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\cos . (p-q) x}{p-q} + C$$

45. Pour intégrer $\int d x \cos .^m x$ et $\int d x \sin .^m x$, m étant un nombre entier et positif, on peut, entre autres méthodes, exprimer la puissance du sinus ou du cosinus en fonction des sinus et cosinus d'arcs multiples à l'aide des séries suivantes qui se déduisent directement des relations trigonométriques ci-dessus.

$$2 \cos .^2 x = \cos . 2 x + 1$$
$$4 \cos .^3 x = \cos . 3 x + 3 \cos . x$$
$$8 \cos .^4 x = \cos . 4 x + 4 \cos . 2 x + 3$$
$$16 \cos .^5 x = \cos . 5 x + 5 \cos . 3 x + 10 \cos . x$$

. . . .

$$2 \sin .^2 x = - \cos . 2 x + 1$$
$$4 \sin .^3 x = - \sin . 3 x + 3 \sin . x$$
$$8 \sin .^4 x = \cos . 4 x - 4 \cos . 2 x + 3$$
$$16 \sin .^5 x = \sin . 5 x - 5 \sin . 3 x + 10 \sin . x$$

. . . .

on trouverait ainsi

$$\int d x \cos .^5 x = \int \left\{\frac{\cos . 5 x}{16} + \frac{5 \cos . 3 x}{16} + \frac{5 \cos . x}{8}\right\} d x$$
$$= \frac{\sin . 5 x}{16 \times 5} + \frac{5 \sin . 3 x}{16 \times 3} + \frac{5 \sin . x}{8}$$
$$= \frac{1}{80} \sin . 5 x + \frac{5}{48} \sin . 3 x + \frac{5}{8} \sin . x + C$$

$$\int dx \cos.^4 x = \frac{1}{32}\sin.\ 4\ x + \frac{1}{4}\sin.\ 2\ x + \frac{3}{8}\ x$$

$$\int dx \sin.^4 x = \frac{1}{32}\sin.\ 4\ x - \frac{1}{4}\sin.\ 2\ x + \frac{3}{8}\ x$$

$$\int dx \sin.^3 x = \frac{1}{12}\cos.\ 3\ x - \frac{3}{4}\cos.\ x$$

$$\int dx \sin.^2 x = -\frac{1}{4}\sin.\ 2\ x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}[x - \sin.\ x \cos.\ x]$$

46. Si, au lieu de sinus et de cosinus, les expressions contenaient des tangentes, cotangentes, etc, on transformerait celles-ci par les relations trigonométriques connues, tang. $= \frac{\sin.}{\cos.}$ et l'on intégrerait par les méthodes précédentes.

47. On trouvera encore ci-dessous quelques fonctions circulaires d'un fréquent usage, et qui s'intègrent immédiatement, soit par logarithmes, soit par les autres méthodes que nous avons déjà exposées.

$$\int \frac{dx}{\cos.\ x} = \int \frac{dx}{\cos.\ x} \cdot \frac{(\text{séc.}\ x + \text{tang.}\ x)}{(\text{séc.}\ x + \text{tang.}\ x)} = \log.\ \text{hyp.}\ (\text{tang.}\ x + \text{séc.}\ x)$$

$$= \log.\ \text{hyp.}\ \text{tang.} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin.\ x} = \int \frac{dx}{\sin.\ x} \cdot \frac{(\text{coséc.}\ x + \text{cotang.}\ x)}{(\text{coséc.}\ x + \text{cotang.}\ x)}$$

$$= -\log.\ \text{hyp.}\ [\text{cotang.}\ x + \text{coséc.}\ x] = \log.\ \text{hyp.}\ \text{tang.}\ \frac{x}{2}$$

$$\int dx\ \text{tang.}\ x = -\int \frac{d\,[\cos.\ x]}{\cos.\ x} = -\log.\ \text{hyp.}\ [\cos.\ x]$$

$$\int dx\ \text{tang.}^2 x = \int dx\ [\text{séc.}^2 x - 1] = \text{tang.}\ x - x$$

$$\int dx\ \text{cotang.}\ x = \log.\ \text{hyp.}\ (\sin.\ x)$$

$$\int \frac{dx}{\sin.\ x \cos.\ x} = \int \frac{dx\ \text{séc.}^2 x}{\text{tang.}\ x} = \log.\ \text{hyp.}\ [\text{tang.}\ x]$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^2 x \cos.^2 x} = \int dx \left[\frac{1}{\cos.^2 x} + \frac{1}{\sin.^2 x}\right] = \text{tang.}\ x - \text{cotang.}\ x$$

$$\int \frac{dx\cos.x}{a+b\sin.x}=\frac{1}{b}\log.\text{hyp}.\left[a+b\sin.x\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin.\text{vers}.x}=\int \frac{dx}{2\sin.^2\frac{1}{2}x}=-\text{cotang}.\tfrac{1}{2}x$$

48. On intégrera encore les expressions suivantes à l'aide des transformations indiquées.

$$\int \frac{dx}{a+bx^2}=\int \frac{b\,dx}{ab+b^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\text{arc}\left[\text{tang}.=\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right]$$

$$\int \frac{(c+ex)\,dx}{a+bx^2}=\int \frac{c\,dx}{a+bx^2}+\frac{e}{2b}\int \frac{2b\,dx}{a+bx^2}$$

$$=\frac{c}{\sqrt{ab}}\text{arc}\left[\text{tang}.=\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right]+\frac{e}{2b}\log.\text{hyp}.(a+bx^2)$$

$$\int \frac{dx}{ax+bx^2}=-\frac{1}{a}\int \frac{-ax\,dx}{ax^{-1}+b}=-\frac{1}{a}\log.\text{hyp}.[ax^{-1}+b]$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}=2\int \frac{2c\,dx}{4ac+4bcx+4c^2x^2}$$

$$=2\int \frac{d\,(2cx+b)}{(2cx+b)^2+4ac-b^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\text{arc}\left[\text{tang}.=\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right]$$

Ce résultat suppose $4ac > b^2$, et deviendrait imaginaire si l'on avait $4ac < b^2$, on aurait pour ce dernier cas

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}=2\int \frac{d\,[2cx+b]}{(2cx+b)^2-[b^2-4ac]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log.\text{hyp}.\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\int dx\left[\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\log.\text{hyp}.\frac{x+b}{x+a}$$

49. Les expressions suivantes, bien que *irrationnelles*, peuvent être transformées de telle sorte qu'elles deviennent intégrables par les méthodes élémentaires que nous avons exposées.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d\,[bx+\frac{1}{2}a]}{\sqrt{(bx+\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ log. hyp. } [bx + \tfrac{1}{2}a + \sqrt{b(ax+bx^2)}]$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dx\left[bx-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right]}{\sqrt{abx-b^2x^2}}$$

$$= -\frac{1}{b}\sqrt{ax-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b^3}} \text{ arc } \left[\text{sin. verse.} = \frac{2bx}{a}\right]$$

50. Enfin, je réunis encore ici une série d'intégrales propres à exercer les jeunes ingénieurs à l'emploi des méthodes précédentes, ainsi qu'aux artifices de calculs les plus féconds.

$$\int x\,dx\,\sqrt{a+x} = \int dx\,[a+x-a]\sqrt{a+x}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(a+x)^5} - \frac{2}{3}a\sqrt{(a+x)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}} = \int \frac{dx\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}{a}$$

$$= \frac{2}{3a}\,[\sqrt{(x+a)^3} - \sqrt{x^3}]$$

$$\int dx\,(a-x)\,(b-x)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}(a-b)\,(b-x)^{\frac{m}{n}+1} - \frac{n}{m+2n}(b-x)^{\frac{m}{n}+2}$$

$$\int dx\,(x^2+a)\sqrt{x^2+4a} = \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2+4a)^3}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$\int x^{2n-1}dx\,(a^n+x^n)^{\frac{p}{q}} = \int x^{n-1}dx\,(a^n+x^n-a^n)\,(a^n+x^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{q\,(a^n+x^n)^{\frac{p}{q}+2}}{n\,(p+2q)} - \frac{q\,a^n\,(a^n+x^n)^{\frac{p}{q}+1}}{n\,(p+q)}$$

$$\int \frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2} = -2\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x-2} = -\text{log. hyp. } [x^2-x-2]$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2} \text{ arc } \left[\sin. = \frac{x^2}{a^2}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x+2)}} = 2 \text{ arc. } \left[\sin. = \sqrt{\frac{x+2}{3}}\right]$$

$$\int \frac{dx\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \int \frac{dx\,(x^2-a^2)}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int dx \left[\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \times \text{ arc. } \left[\text{séc.} = \frac{x}{a}\right]$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ log. hyp. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+x}}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)\,a^{2n}}$$

$$+ \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)\,a^{3n}} - \text{etc.} + \text{constante.}$$

51. *Intégration des différentielles logarithmiques et exponentielles.* Soit à intégrer la différentielle logarithmique $X dx$ log. hyp. x, X étant une fraction de x.

Faisons $y =$ log. hyp. x et $dz = X\,dx$, il viendra

$$\int X\,dx \text{ log. hyp. } x = \int y\,dz = yz - \int z\,dy$$

$$= \text{log. hyp. } x \int X\,dx - \int z\,\frac{dx}{x}$$

donc l'intégrale de la quantité proposée se réduit à celle de $X\,dx$ et de $\frac{dx}{x}\int X\,dx$ que l'on pourra quelquefois trouver par les règles précédentes.

Si $X = x^n$, on a $\int X\,dx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

$$\int z\,\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \quad \text{d'où}$$

$$\int x^n\,dx \text{ log. hyp. } x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\text{log. hyp. } x - \frac{1}{n+1}\right]$$

et si n était $= -1$, il viendrait

$$\int \frac{dx}{x} \text{ log. hyp. } x = \int \text{log. hyp. } x\,d.[\text{log. hyp. } x] = \frac{1}{2}(\text{log. hyp. } x)^2$$

52. On aurait de même

$$\int \frac{dx}{x \log.\, \text{hyp}.\, x} = \log.\, \text{hyp}.[\log.\, \text{hyp}.\, x]$$

$$\int \frac{dx}{x\,[\log.\, \text{hyp}.\, x]^n} = -\frac{1}{(n-1)} \times \frac{1}{(\log.\, \text{hyp}.\, x)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx\,(a + b \log.\, \text{hyp}.\, x)^n}{x} = \frac{[a + b \log.\, \text{hyp}.\, x]^{n+1}}{(n+1)\,b}$$

53. *Quant aux quantités exponentielles,* je ne puis donner ici d'autre règle que de les décomposer, s'il est possible, en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre, ou en soit une partie constante; on divise alors par la différentielle du logarithme de ce second facteur. Ainsi :

$x^y \left[dy \log.\, \text{hyp}.\, x + \frac{y\,dx}{x}\right]$ est intégrable, parce que la parenthèse est la différentielle de $y \log.\, \text{hyp}.\, x$ qui est le logarithme de x^y. On a donc pour intégrale de l'expression ci-dessus

$$\frac{x^y \left[dy \log.\, \text{hyp}.\, x + \frac{y\,dx}{x}\right]}{d[\log.\, \text{hyp}.\, x^y]} = x^y + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+a^x}} = \int \frac{a^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{1+a^{-x}}} = -\frac{2}{\log.\, \text{hyp}.\, a} \log.\, \text{hyp}.\left[a^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{1+a^{-x}}\right]$$

54. On emploie souvent, pour ces intégrations, le nombre $e = 2.71828..$ base des logarithmes hyperboliques, et dont le logarithme est 1, de telle sorte qu'une quantité quelconque $\pm z$ peut être considérée comme le logarithme hyperbolique du nombre e élevé à la puissance marquée par cette quantité

$$\pm z = \log.\, \text{hyp}.\, [e^{\pm z}] = \pm z \log.\, \text{hyp}.\, e$$

il en résulte des transformations qui simplifient parfois les expressions à intégrer. Nous ne pouvons nous y arrêter.

55. Lorsque les règles précédentes ne pourront pas s'appliquer à l'intégration d'une exponentielle, on la réduira en séries par la formule

$$a^x = 1 + x \log.\, a + \frac{x^2 (\log.\, a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log.\, a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\log.\, a)^4}{1.2.3.4} +$$

et l'on intégrera, comme il est dit ci-dessous.

56. *Intégration par les séries.* Ce procédé s'applique aux expressions dont les intégrales ne peuvent être obtenues rigoureusement ; il consiste à développer la fonction donnée en SÉRIE, de sorte que l'on n'ait plus à intégrer qu'une suite de termes dont chacun soit intégrable en particulier. Plus la série sera *convergente,* plus la valeur réelle de l'intégrale sera approchée. Or, les séries qui procèdent suivant les puissances positives de x dont les exposants vont en croissant, ou les *séries ascendantes,* ne convergent, en général, que dans le cas où la variable x demeure très-petite ; au contraire, les *séries descendantes,* celles qui procèdent par les puissances négatives de x convergent d'autant plus que cette variable est plus grande.

L'article SÉRIES et la nécessité d'abréger me dispensent de plus grands développements, et je me borne aux simples exemples suivants :

Soit proposé d'intégrer $\int \frac{a^2 dx}{a^2+x^2}$ qui ne peut pas être intégrée exactement. On lui donnera la forme $\int a^2\, dx\, (a^2 + x^2)^{-1}$ et, comme on a par la formule du binôme

$$(a^2 + x^2)^{-1} = a^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \ldots\right)$$

il vient pour l'intégrale approchée

$$\int \frac{a^2\, dx}{a^2+x^2} = x - \frac{x^3}{3\,a^2} + \frac{x^5}{5\,a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9\,a^8} - \text{etc.}$$

57. *Quantités à plusieurs variables.* Pour intégrer ces expressions, lorsque cela est possible, il faut rassembler tous les termes affectés de la différentielle d'une même variable, et les intégrer comme si les autres variables étaient constantes, et leurs différentielles nulles. Alors, si l'on différentie cette intégrale en faisant varier successivement toutes les variables, et que l'on retranche le résultat de la différentielle proposée, l'intégrale qu'on a trouvée est (en ajoutant une constante) la véritable intégrale s'il ne reste rien; s'il y a un reste, il ne renfermera pas la variable par rapport à laquelle on a intégré, on suivra, à l'égard de ce reste, le même procédé qu'on a suivi d'abord, et ainsi de suite par rapport à chaque variable.

Ainsi $3x^2ydx + x^3dy + 5\,xy^4dy + y^5dx$ donnerait pour les termes affectés de dx, $3\,x^2y\,dx + y^5dx$ lesquels intégrés en supposant y constant fourniraient l'intégrale partielle $x^3y + y^5x$; or cette dernière quantité différentiée par rapport à x et à y, et re-

tranchée de la proposée ne laissant point de reste, l'intégrale de la proposée $= x^3 y + y^3 x + C$

On trouverait de même

$$x^3 y + x^2 z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$$

pour l'intégrale de

$$x^3 dy + 3x^2 y dx + x^2 dz + 2xz dx + x dx + y^2 dy$$

58. *Intégrales définies.* Abstraction faite des cas où nous avons déterminé la valeur de la constante, les intégrales ci-dessus que nous représenterons sous la forme générale $\int X dx$ sont dites *indéfinies*; elles deviennent *définies* lorsque l'on assigne les valeurs limites de x, l'une inférieure $x = a$ par exemple; l'autre supérieure, $x = b$. On dit alors que la valeur $x = a$, pour laquelle l'intégrale s'évanouit, en est l'origine, ou que l'intégrale doit *commencer* lorsque $x = a$, et la valeur à laquelle on s'arrête répondant à $x = b$, on dit que l'intégrale est *complète* lorsque $x = b$.

Pour indiquer qu'une intégrale $\int X dx$ doit être prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, on emploie, en France, la notation due à Fourier

$$\int_{x=a}^{x=b} X dx \quad \text{et en Angleterre celle} \int^{a\;\;b} X dx$$

et pour obtenir cette intégrale définie entre ses deux limites, il est évident qu'on doit calculer successivement ce que devient l'expression variable de l'intégrale lorsque $x = b$, puis lorsque $x = a$, et retrancher ensuite le dernier résultat du premier. La constante arbitraire devant disparaître par cette soustraction, il est inutile de l'écrire.

Ainsi (41) l'intégrale indéfinie

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc } \left[\sin. = \frac{x}{a}\right]$$

pour $x = a$ devient $\frac{\pi a^2}{4}$, et pour $x = 0$ elle est nulle; on a donc pour l'intégrale définie entre ces limites $x = 0$ et $x = a$

$$\int_0^a dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

on aurait encore

$$\int_{x=0}^{x=1} x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}; \quad \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

59. Il est utile de faire remarquer que le signe du résultat changerait si l'on changeait l'ordre des limites : ainsi, f indiquant une fonction quelconque des limites a et b, on aurait

$$\int_{x=a}^{x=b} X\,dx = f(a, b) \quad \text{et} \quad \int_{x=b}^{x=a} X\,dx = -f(a, b)$$

60. *Approximations.* Les difficultés de l'intégration, le nombre des méthodes diverses dont l'article précédent donne à peine une idée, la nécessité de les avoir présentes à l'esprit, et, pour ainsi dire, toutes à la fois, attendu que chacune n'est guère applicable qu'à certains cas particuliers, ont beaucoup contribué à l'emploi des méthodes d'approximation dans les recherches qui se rapportent aux travaux des ingénieurs; parmi ces méthodes, celle qui porte le nom de *Thomas Simpson* (page 435) permet de calculer, avec une approximation presque toujours suffisante pour la pratique, les intégrales définies qui dépendent d'une seule variable. Soit en effet

$$\int_{x=a}^{x=a'} X\,dx$$

une intégrale de ce genre, dans laquelle X est une fonction quelconque de x, et dont on demande la valeur approchée entre les deux limites $x = a$, $x = a'$.

Cette question revient à demander l'aire de la portion de courbe comprise entre les ordonnées correspondantes aux abscisses $x = a$ $x = a'$ (page 435); pour l'obtenir, on partagera l'intervalle $a' - a$ en un nombre pair de parties égales, quatre, par exemple, on aura $h = \frac{a' - a}{4}$.

Mettant successivement dans la fonction X de x les valeurs

$$x = a; \quad x = a + \frac{1}{4}(a' - a); \quad x = a + \frac{1}{2}(a' - a);$$

$$x = a + \frac{3}{4}(a' - a); \quad x = a'$$

la fonction X prendra des valeurs correspondantes à ces différents cas, valeurs que nous désignerons par

$$y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4 \; y_5$$

parce qu'elles sont effectivement les ordonnées à introduire dans le calcul. Alors on aura par approximation

$$\int_{x=a}^{x=a'} \mathrm{X}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(a'-a)}{4}\left[y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5\right]$$

cette méthode d'approximation est tout à fait générale.

INTÉRÊT. Soit a la somme qu'on place à intérêt,

t le nombre de périodes (jour, mois, semestre, année) pendant lequel la somme a porté intérêt. Nous supposerons ici que t représente un nombre d'*années*.

f la valeur que 1 franc a acquise au bout d'une année, de sorte que le taux de l'intérêt annuel étant, par exemple,

5 °/₀ 6 °/₀ 7°/₀ . . . . . 10 °/₀ ou 0.1 les valeurs de

f sont 1.05 1.06 1.07. . . . . 1.10. . . . . il en résulte que $(f-1)$ sera évidemment l'intérêt annuel.

Soit encore i l'intérêt total de la somme a après t années.

Cela posé, il y a plusieurs cas à considérer :

1° Ou l'on retire, à la fin de chaque période, l'intérêt de son capital, et alors on doit toucher à la fin d'une période

$$i = a\,(f-1);$$

2° Ou l'on convient de laisser dans les mains de l'emprunteur le capital pendant t périodes avec la condition que les intérêts échus à la fin de chacune d'elles ne s'ajouteront pas au principal a pour porter intérêt; on dit alors qu'on place à *intérêts simples*, et au bout de t périodes ou années, on a à toucher en intérêts seulement

$$i = a\,(f-1)^t$$

et si l'on retire des mains de l'emprunteur capital et intérêt, on a à recevoir une somme totale V

$$\mathrm{V} = a + a\,(f-1)\,t = a\left\{1 + (f-1)\,t\right\}$$

3° Ou bien, enfin, l'on convient que les intérêts que le prêteur ne touche pas à la fin de chaque période s'ajouteront au principal et porteront intérêts de même que ce principal ; on dit alors que l'intérêt est *composé*, et la question qui se présente d'abord est de chercher quelle valeur S le principal a a acquise au bout de t années, par l'accumulation et la composition des intérêts. Or, on voit facilement que 1 franc acquérant une valeur f au bout d'un an, on obtient les valeurs successives de a francs au bout de 1, 2, 3... t années,

par les proportions suivantes dans lesquelles le troisième terme est le quatrième de la proportion précédente :

$$1 : f :: \left\{ \begin{array}{l} a \; : af \\ af \; : af^2 \\ af^2 : af^3 \\ \ldots\ldots \\ af^{t-1} \; af^t \end{array} \right.$$

le principal a a donc acquis, au bout de t années, une valeur

$$S = af^t. \ldots\ldots\ldots\ldots (s)$$

valeur que l'on calculera toujours facilement par les logarithmes, si on ne la trouvait pas dans la table suivante calculée dans l'hypothèse $a = 1000$ fr. $(f - 1)$ étant 0.02 0.03 0.04 0.05 ou, enfin, 0.06 et t s'étendant de 1 à 50 années.

ANNÉES.	2 p. °/o	3 p. °/o	4 p. °/o	5 p. °/o	6 p. °/o
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	1040.40	1060.90	1081.60	1102.50	1123.60
3	1061.21	1092.73	1124.86	1157.63	1191.02
4	1082.43	1125.51	1169.86	1215 51	1262.48
5	1104,08	1159.27	1216.65	1276.28	1338.23
6	1126.16	1194.05	1265.32	1340.10	1418.52
7	1148.69	1229.87	1315,93	1407.10	1503.63
8	1171.66	1266.77	1368.57	1477.46	1593.85
9	1195.09	1304.77	1423.31	1551.33	1689 48
10	1218.99	1343.92	1480.24	1628.89	1790.85
11	1243.37	1384.23	1539.45	1710.31	1898.30
12	1268.24	1425.76	1601.03	1795.86	2012.20
13	1293.61	1468.53	1665.07	1885.65	2132.93
14	1319.48	1512.59	1731.68	1979.93	2260.90
15	1345.87	1557.97	1800.94	2078.93	2396.56
16	1372.79	1604.71	1872.98	2182.87	2540.35
17	1400.24	1652.85	1947.90	2292 02	2692.77
18	1428.25	1702.43	2025.82	2406.62	2854.34
19	1456.81	1753.51	2106.85	2526.95	3025.60
20	1485.95	1806.11	2191.12	2653.30	3207.14
21	1515.67	1860.29	2278.77	2785.96	3399.56
22	1545.98	1916.10	2369.92	2925.26	3603.54
23	1576.90	1973.59	2464.72	3071.52	3819.75
24	1608.44	2032.79	2563.30	3225.10	4018.93
25	1640.61	2093.78	2665.84	3386.35	4291.87
26	1673.42	2156.59	2772.47	3555.67	4549.38
27	1706.89	2221.29	2883.37	3733.46	4822.35
28	1741.02	2287.93	2998.70	3920.13	5111.69
29	1775.84	2356.57	3118.65	4116.14	5418.39

ANNÉES.	2 p. %	3 p. %	4 p. %	5 p. %	6 p. %
30	1811.36	2427.26	3243.40	4321.94	5743.49
31	1847.59	2500.08	3373.13	4538.04	6088.10
32	1884.54	2575.08	3508.06	4764.94	6453.39
33	1922.23	2652.34	3648.38	5003.19	6840.59
34	1960.68	2731.91	3794.32	5253.35	7251.03
35	1999.89	2813.86	3946.09	5516.02	7686.09
36	2039.89	2898.28	4103.93	5791.82	8147.25
37	2080.69	2985.23	4268.09	6081.41	8636.09
38	2122.30	3074.78	4438.81	6385.48	9154.25
39	2164.74	3167.03	4616.37	6704.75	9703.51
40	2208.04	3262.04	4801.02	7039.99	10285.72
41	2252.20	3359.90	4993.06	7391.99	10902.86
42	2297.24	3460.70	5192.78	7761.59	11557.03
43	2343.19	3564.52	5400.50	8149.67	12250.45
44	2390.05	3671.45	5616.52	8557.15	12985.48
45	2437.85	3781.60	5841.18	8985.01	13764.61
46	2486.61	3895.04	6074.82	9434.26	14590.49
47	2536.34	4011.90	6317.82	9905.97	15465.92
48	2587.07	4132.25	6570.53	10401.27	16393.87
49	2638.81	4256.22	6833.35	10921.33	17377.50
50	2691.59	4383.91	7106.68	11467.40	18420.15

Si l'on voulait, au moyen de cette table, trouver la valeur acquise, au bout de 39 ans, par une somme de 1254 fr., l'intérêt $(f-1)$ étant 5 p. 100 ou 0.05, on trouverait

pour 1000. . . . . . . $6704^{f}.75$

multipliant par 1.254 il viendrait $S = 8407.76$

L'équation (s) résout trois autres questions, on en tire successivement

$$f = \sqrt[t]{\frac{S}{a}} \quad \text{ou} \quad \log. f = \frac{\log. S - \log. a}{t} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (F)$$

équation qui fera connaître la valeur f acquise par un franc au bout d'une année, ou bien encore le taux annuel de l'intérêt $(f-1)$ si de la valeur f qu'elle donne on retranche 1.

Et c'est ici le cas de remarquer que ces formules résolvent, en même temps que les questions d'argent, des problèmes du genre suivant :

Quel a dû être l'accroissement annuel de la population d'une île sur laquelle on compte aujourd'hui un million d'habitants. On sait qu'il y a deux cents ans elle ne comptait que six habitants. On trouve :

$$\log. f = \frac{6 - 0.7781512}{200} = 0.0261092 \quad \text{d'où} \quad f = 1.06196$$

$$f - 1 = 0.062$$

il a suffi d'un accroissement moyen annuel d'un peu plus de 6 p. °/₀.

On a aussi

$$a = \frac{S}{f^t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

qui fera connaître le principal qu'il faut placer pour que, au bout de t années on retire une somme S, le taux de l'intérêt étant connu. (Voyez l'article *Economie* des constructions).

Enfin de $S = af^t$ on tire encore

$$t = \frac{\log. S - \log. a}{\log. f} \ldots\ldots\ldots \text{(T)}$$

qui donne le temps que une somme a doit rester placée pour acquérir une valeur S, le taux $(f - 1)$ de l'intérêt étant connu.

On trouverait, par cette formule, qu'un capital quelconque double ou triple par l'accumulation des intérêts non perçus dans un nombre d'*années* indiqué par le tableau suivant :

L'intérêt étant	le capital doublera en	triplera en
$(f - 1) =$ 0.01	69.6603	110.409
0.02	35.0027	55.4778
0.03	23.4498	37.1671
0.04	17.6730	28.0111
0.05	14.2067	22.5171
0.06	11.8956	18.8511
0.07	10.2448	16.2376
0.08	9.0065	14.2749
0.09	8.0411	12.7482
0.10	7.2725	11.5267
0.11	6.6419	10.5271
0.12	6.1163	9.6940

INTERPOLATION. L'observation a fait connaître un certain nombre des valeurs simultanées que prennent deux grandeurs quelconques x et X qui dépendent ou que l'on suppose dépendre l'une de l'autre ; on veut obtenir l'expression générale de la loi qui lie entre elles, non-seulement les valeurs connues, mais encore les valeurs simultanées intermédiaires à celles-ci, et que l'observation n'a pas données.

Soient donc $y = X$ une fonction de x, ou pour fixer les idées, soit y la valeur générale des ordonnées d'une courbe dont x est l'abscisse correspondante. On a remarqué que pour

$$x = p \qquad x = q \qquad x = r \qquad x = s \qquad x = \ldots.$$

Les valeurs de $y = X$ étaient :

$$y = X = P \qquad Q \qquad R \qquad S \ldots\ldots\ldots$$

La loi qui lie x et X sera exprimée en général par l'équation

$$y = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \ldots\ldots$$

qui ne deviendra applicable que lorsqu'on connaîtra les coefficients indéterminés $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. . . . .

Pour déterminer ces coefficients de manière à ce qu'ils satisfassent aux résultats de l'observation, *Lagrange* remarque :

Que $x = p$ devant donner $X = P$, cela ne peut avoir lieu qu'autant que, dans l'équation générale, on aura

$\alpha = 1$ et tous les autres coefficients $= 0$. Raisonnant d'une manière analogue pour tous les cas où les valeurs de x et de X sont connues d'avance, et ici nous en supposons quatre, on voit, disons-nous, que

$$\left.\begin{matrix} x = p \\ x = q \\ x = r \\ x = s \end{matrix}\right\} \text{suppose que dans l'équation générale on ait} \left\{\begin{matrix} \alpha = 1 & \beta = 0 & \gamma = 0 & \delta = 0\ldots \\ \alpha = 0 & \beta = 1 & \gamma = 0 & \delta = 0\ldots \\ \alpha = 0 & \beta = 0 & \gamma = 1 & \delta = 0\ldots \\ \alpha = 0 & \beta = 0 & \gamma = 0 & \delta = 1\ldots \end{matrix}\right.$$

$x = \ldots$

Ces conditions se trouveront satisfaites si l'on donne aux coefficients les valeurs suivantes dont la loi est facile à saisir avec un peu d'attention.

$$\alpha = \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\ldots}{(p-q)(p-r)(p-s)\ldots} = \text{coefficient de P}$$

$$\beta = \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\ldots}{(q-p)(q-r)(q-s)\ldots} = \text{coefficient de Q}$$

$$\gamma = \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\ldots}{(r-p)(r-q)(r-s)\ldots} = \text{coefficient de R}$$

$$\delta = \frac{(x-p)(x-q)(x-r)\ldots}{(s-p)(s-q)(s-r)\ldots} = \text{coefficient de S}$$

Les numérateurs et les dénominateurs ont autant de facteurs *moins un* qu'il y a de couples de valeurs simultanées connues d'avance, n facteurs pour $n + 1$ couples.

On a trouvé que pour des abscisses

$$x = 1 \qquad x = 3 \qquad x = 4 \qquad x = 6$$

la fonction X de x ou l'ordonnée y était

$$y = 4 \qquad y = 20 \qquad y = 35 \qquad y = 84$$

on a donc

$$P = 4 \qquad Q = 20 \qquad R = 35 \qquad S = 84$$

$$p = 1 \qquad q = 3 \qquad r = 4 \qquad s = 6$$

et l'expression de la loi qui lie x et X ou les abscisses et les ordonnées devient

$$y = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} \times 4 + \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} \times 20$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} \times 35 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} \times 84$$

$$y = \frac{1}{6}[x^3 + 6x^2 + 11x + 6] = 1 + \frac{11}{6}x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

de sorte que, pour avoir maintenant une valeur de y correspondante à une hypothèse $x = 5$ par exemple, il suffit d'introduire cette valeur de x dans la dernière équation, on trouverait $y = 56$.

J

JAUGEAGE. Voyez pour le jaugeage des *eaux courantes*, les pag. 456 à 459 de l'article *Cours d'eau* et l'article *Ecoulement*, page 567 et suivantes, pour les dépenses des diverses formes d'orifices tels que vannes, buses, ajutages, déversoirs.

K

KILOGRAMMÈTRE. Unité de mesure du TRAVAIL des machines et des moteurs. Cette dénomination, proposée par *M. Poncelet*, exprime le produit d'une FORCE de *un* kilogramme par la longueur de *un* mètre, la direction de la force étant essentiellement supposée confondue avec celle du chemin que parcourt son point d'application. En d'autres termes, le kilogrammètre est le travail qu'il faudrait rigoureusement dépenser pour élever verticalement un poids de *un* kilogramme à *un* mètre de hauteur. Cette unité de mesure est indépendante de la durée. On emploie souvent, dans la mécanique pratique, une autre unité de mesure qu'on nomme *cheval-vapeur* ou simplement *cheval*; mais cette dernière unité est dépendante du temps; c'est le travail qu'il faudrait dépenser pour élever 75 kilogrammes à *un* mètre de hauteur *dans chaque seconde*. (Voyez page 321.)

L

LABOURAGE. Le travail nécessaire au labourage n'a pas été jusqu'ici l'objet d'observations bien exactes; toutefois les résultats suivants, rapportés par M. le capitaine d'artillerie *Munier*, m'ont inspiré assez de confiance pour que j'aie cru utile de les consigner ici :

Une charrue *Grangé*, soumise à un effort moyen de traction

=221kil. exercé par trois forts chevaux, a tracé en terre noire légère un sillon de 122 mètres de longueur en 2m.8s.; la largeur moyenne des raies étant 0m.248 et l'enfoncement moyen du soc = 0m.184.

Une charrue ordinaire, attelée des mêmes chevaux, en même terrain, a exigé un effort moyen de traction = 225 kil., pour, dans le même temps, et sur la même longueur, ouvrir un sillon de 0m.264, largeur moyenne, l'enfoncement moyen du soc étant 0m.174.

Voici quelques autres observations :

Terre blanche, assez légère, remplie de racines très-fortes de colza. Longueur des sillons en terrain horizontal = 270 mètres.

	Temps moyen pour un sillon.	Largeur moyenne des raies.	Enfoncement moyen du soc.	Efforts moyens de traction.
	m s	m	m	kil.
Charrue Grangé..	4. 7	0.405	0.161	119
Autre.	4	0.31	0.182	146
Autre.	3.42	0.35	0.185	171

Le terrain étant argileux et compacte, et la longueur du sillon = 210 mètres, on a trouvé :

	m s	m	m	kil.
Charrue Grangé..	4. 2	0.31	0.190	231
Autre.	4. 7	0.26	0.152	184
Autre.	3.40	0.31	0.174	262
Charrue ordinaire	4. 0	0.34	0.190	345

LAISSES *de haute et basse mer*. Courbes horizontales suivant lesquelles la mer coupe et dessine la côte à la haute et à la basse mer. Ces courbes déterminent les dimensions et la pente de l'*estran*, quand on connaît leur différence de niveau.

C'est au plan qui passe par la laisse de basse mer dans les *vives eaux d'équinoxe* que se rapportent les sondes écrites sur les cartes marines. Les laisses de hautes et basses mers en *mortes eaux des solstices*, sont deux autres courbes analogues comprises entre celles des vives eaux. Les laisses de haute et basse mer des marées extraordinaires enveloppent toutes les autres. Leur indication sur les plans éclaire relativement aux accidents à craindre dans les tempêtes, lorsqu'on exécute quelques ouvrages sur l'*estran*.

LAITON, *cuivre jaune* du commerce, alliage de cuivre et de zinc qui contient souvent en outre de faibles proportions d'étain, de plomb et même de fer. Comme tous les ALLIAGES de zinc et de cuivre, son poids spécifique est généralement plus élevé que la moyenne des poids spécifiques des métaux constituants; il est plus fusible que le

cuivre. Lorsque le laiton contient le tiers de son poids de zinc, il est malléable, ductile à froid; mais, pour peu qu'on le chauffe au-dessus d'un certain degré, il devient très-fragile; la malléabilité de l'alliage diminue lorsque la proportion du zinc s'élève. L'alliage le plus employé contient à peu près 0.66 cuivre et 0.34 zinc. On a longtemps tiré de l'Angleterre un alliage de même couleur que le laiton, aussi ductile, mais plus dur et plus roide et qui contient 0.815 cuivre + 0.105, zinc + 0.080 étain.

Voyez le mot *Alliage* pour les méthodes à employer dans l'analyse des laitons.

LATITUDE. Voyez l'article *Astronomie,* pag. 72, pour les définitions, et l'article *Coordonnées géographiques,* pag. 380, pour les méthodes que les ingénieurs peuvent appliquer à la détermination des latitudes terrestres.

LAVIS. Voy. *Dessin et lavis des plans,* pag. 515.

LAVOISIER (*Antoine-Laurent*). L'un des fondateurs de la chimie moderne, né à Paris, le 16 août 1743, d'un père qui lui laissa une immense fortune que le fils accrut d'abord et qu'il dépensa ensuite toute entière en expériences qui ont puissamment contribué aux progrès des sciences.

Lavoisier est mort pauvre et martyr; le 16 avril 1794, il fut arrêté, jeté en prison et bientôt condamné à mort.

Voici le texte du jugement du tribunal révolutionnaire :

« Condamne à la peine de mort ledit Antoine-Laurent Lavoisier « comme atteint et convaincu d'être auteur d'un complot qui a existé « contre le peuple français, tendant à favoriser les ennemis de la « France, notamment en exerçant toute espèce d'exaction sur le « peuple français, et en mettant dans le tabac de l'eau et autres in« grédients nuisibles à la santé des citoyens qui en font usage. »

Lavoisier demanda un sursis de trois jours à son exécution pour achever une expérience; le président lui répondit que « la ré« publique n'avait pas besoin de savants. » (*Gazette des tribunaux*, du 2 avril 1846.)

LENTILLES (*planche* LXXXII). 1. En vertu de la *réfraction* (Voy. *Lumière*), qui s'opère à l'entrée et à la sortie des verres connus sous le nom de *lentilles*, elles augmentent ou diminuent, suivant leurs formes, la convergence des rayons lumineux qui les traversent.

2. Toutes les courbures des lentilles sont sphériques et les *numéros* par lesquels on les désigne encore aujourd'hui expriment en *pouces anciens* le rayon de la sphère dont leur face est une calotte.

Une lentille du n° 4 appartient donc à une sphère de 4 pouces de rayon.

3. En combinant la surface plane avec la surface sphérique, on n'obtient que six formes réellement différentes de verres (*fig.* 1 à 6), auxquels on donne également le nom de *lentilles*, quoique la lentille bi-convexe (*fig.* 1), possède seule la forme que son nom rappelle immédiatement.

4. L'*axe principal* d'une lentille (*fig.* 1), est la droite CC′ qui passe par les centres de courbure de ses deux faces. L'une de ces faces étant plane (*fig.* 2), le rayon de courbure de ce côté est infini $= \infty$.

5. Le *foyer principal* d'une lentille est le point F, où des rayons lumineux incidents et parallèles à *l'axe principal* viennent se croiser (*fig.* 8 et 9) après la réfraction à travers sa substance. Quand les rayons réfractés divergent au lieu de converger (*fig.* 10), c'est l'intersection F′ de leurs prolongements qu'on prend pour foyer, et ce foyer F′ est imaginaire ou *virtuel*.

6. Le *centre optique* d'une lentille (*fig* 7) est un point unique O de l'axe tel que tout rayon qui par l'effet de la réfraction à l'entrée passe par ce point, sorte de la lentille suivant une direction *parallèle* à celle qu'il avait en entrant.

Ainsi R′ et R étant (*fig.* 7) des rayons de courbure placés parallèlement et *o′ o* des éléments de surface dont les plans sont par conséquent parallèles, si, parmi les rayons incidents on en choisit un S′*o′* tel que, par l'effet de la réfraction intérieure, il suive la direction *o′o* et que par l'effet de la réfraction extérieure, il reprenne une direction *oS* parallèle à S′*o′*, le point O intersection de l'axe principal et de la direction *oo′*, sera le *centre optique* de la lentille.

7. Lorsque l'épaisseur d'une lentille est fort petite, on se permet de négliger la double brisure que subissent les rayons S′*o′* et l'on suppose que tous les rayons qui passent par le *centre optique* se meuvent rigoureusement en ligne droite comme dans le vide (Voyez *Lumière*).

8. Enfin, on appelle *axes secondaires*, les routes que suivent les rayons inclinés à l'axe principal et qui passent par le centre optique. Lorsque cette inclinaison ne dépasse pas 10° à 15°, les rayons parallèles à l'*axe* secondaire ont sur cet axe un *foyer* secondaire et les lois ou formules relatives aux axes et foyers principaux s'appliquent aux axes et foyers secondaires.

Voici ces formules, sans démonstration :

9. *Formules.* Prenons le centre optique O pour origine des distances; convenons de regarder comme positives + toutes les distances mesurées du côté des rayons *incidents* et comme *négatives* celles qui seront mesurées de l'autre côté de la lentille; négligeons

l'épaisseur du verre (7), dont l'ouverture est d'ailleurs supposée ne pas atteindre 20° à 30° au plus, soient enfin :

f la distance focale principale;

D la distance d'un objet au centre optique;

I la distance au même centre de l'image de cet objet donnée par la lentille ;

R le rayon de courbure de la surface par laquelle pénètrent les rayons *incidents* ;

R′ le rayon de courbure de la face opposée; ces rayons R R′ étant infinis $= \infty = \frac{1}{0}$ lorsque les faces sont planes;

N l'indice de réfraction de la lentille (Voyez *Lumière*); N = environ 1.5 pour l'air et le verre.

On a pour toutes les lentilles (*fig.* 1 à 6).

$$f = \frac{RR'}{(N-1)(R'-R)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Cette formule donnera la distance focale, et le signe que prendra f indiquera dans quel sens il faut compter cette distance.

Introduisant f *avec son signe* dans

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{f} + \frac{1}{D} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

on en déduira les rapports de distance et de direction de l'image et de l'objet.

10. Ces formules montrent immédiatement que pour des rayons incidents parallèles,

1° Les trois lentilles à bords tranchants (*fig.* 1, 2, 3) ont des distances focales *négatives;* ces trois lentilles augmentent donc la convergence des rayons ; elles sont *convergentes.*

2° Les trois lentilles à bords épais (*fig.* 4, 5, 6) ont des distances focales *positives,* diminuent la convergence, sont *divergentes.*

L'effet général des lentilles est donc de dévier les rayons incidents parallèles du côté de leur plus grande épaisseur.

11. *Lentilles bi-convexes.* Si l'on fait l'application de la formule(b) aux lentilles bi-convexes, dont la distance focale f est toujours *négative,* on a :

$$\frac{1}{I} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{D}$$

et pour $D = \infty$; on trouve. . . . . $- I = f$

$D = 100 f$. . . . . $- I = \frac{100}{99} f$

$D = 2 f$. . . . . $- I = 2 f$

$D = f$. . . . . $- I = \infty$

$D = \frac{f}{2}$. . . . . $+ I = f$

L'image est du côté opposé à l'objet dans les quatre premiers cas ; mais, dans le cinquième, elle est *virtuelle* et en avant du verre.

On voit encore que, en général, les effets produits par les lentilles bi-convexes sont les suivants :

La distance de l'objet étant comprise entre l'infini et une longueur égale à la distance focale, les rayons réfractés convergent en un point variable quant à la distance, mais toujours situé du côté opposé à l'objet.

La distance de l'objet étant égale à celle de la distance focale, les rayons réfractés sortent en arrière de la lentille, parallèlement à l'axe.

Enfin, la distance de l'objet étant moindre que la distance focale, les rayons sortent du côté de leur incidence en divergeant de ce côté.

12. Les figures 8, 9, 10, 11 suffisent pour montrer la route des rayons lumineux avant et après la réfraction dans quelques autres cas généraux.

En 8 et 9, la lentille est *plan-convexe*, les rayons parallèles venus du côté B se croisent en arrière au foyer F.

En 10 et 11, la lentille est *plan-concave*. En 10, des rayons parallèles venus du côté *a* divergent en arrière de la lentille. Le prolongement des rayons divergents forme en F′ un foyer *imaginaire* ou virtuel. En 11, des rayons *e e*, rendus convergents par une lentille à bords tranchants qu'on suppose placés du côté L, perdent cette convergence et deviennent parallèles.

LEPTYNITE. Roche dans laquelle domine le FELD SPATH à texture cristalline.

LESCOT (*Pierre*). Abbé de Clugny et architecte, né en 1510, mort en 1571. Il fut l'architecte de la cour intérieure du Louvre et il éleva avec *Jean Goujon* la fontaine du marché des Innocents.

LEVÉES. Ouvrages généralement très-étendus en longueur et ayant pour but de contenir les eaux des rivières ou celles de la mer dans leur lit et de protéger ainsi contre les inondations les terres riveraines inférieures aux niveaux des crues. Telles sont les *levées*

de la rive droite de la Loire, entre Orléans et Angers. Ces ouvrages, suivant les matériaux que fournissent les localités, se construisent en terre, en sable, en pierres sèches, en fascinages. Les digues ou levées en terre reçoivent habituellement au sommet une épaisseur égale à la hauteur d'eau à soutenir lorsque celle-ci ne dépasse pas 3 mètres; au-dessus de ce terme, on ajoute à la largeur au sommet $0^{m}.30$ par mètre de hauteur d'eau au-dessus de 3. Le talus intérieur est à terre coulante et celui du côté de l'eau reçoit trois de base au moins et cinq au plus sur deux de hauteur. Il est utile de pratiquer dans la levée une petite banquette vers le niveau habituel des eaux et de la planter de roseaux flexibles qui amortissent l'effet du batillage sur les terres. Les grandes plantations qu'on a faites sur le talus des digues ou levées n'ont pas toujours contribué à leur consolidation, et l'on a eu l'occasion d'observer que l'action du vent sur les arbres à hautes tiges disjoignait les terres en agissant sur la cime comme sur l'extrémité d'un levier. Les digues et levées doivent évidemment être fondées avec autant de soins au moins que toute autre construction (Voyez *Fondations*, p. 771), et lorsque leur talus est très-roide, on les revet avec avantage d'un peré.

L'expérience a encore enseigné qu'il faut, dans les pays où l'on a construit des levées, faire la guerre la plus vive et la plus persistante à tous les animaux à terrier et surtout aux *lapins*, classe de mineurs d'une prodigieuse activité et en même temps d'une fécondité menaçante. En 1738, ces animaux s'étant énormément multipliés dans les dunes de Calais, des voies d'eau s'ouvrirent à travers leurs terriers, et, le 27 février, à la marée de midi, la mer envahit la plaine; la basse ville, le petit Courgain furent inondés et les eaux se répandirent jusque dans les marais de Coulogne; il fallut aller prendre avec des chaloupes les habitants qui s'étaient réfugiés dans leurs greniers. L'inondation ne dura que trois heures, on ferma les brèches à mer basse, les lapins furent détruits, mais les terres inondées par la mer restèrent stériles pendant plusieurs années.

LEVÉS *de terrains*. 1. Nous limitons ce précis aux seules connaissances nécessaires pour lever avec exactitude les plus grandes étendues de terrains sur lesquelles des ingénieurs civils ou militaires puissent avoir à opérer, laissant ainsi de côté toutes les théories ou formules de la *haute géodésie*, pour lesquelles nous renverrons en partie aux mots *Coordonnées géographiques*, p. 380, *Angle horaire*, p. 41, et autres, mais surtout à la *Géodésie* de *Puissant* et à celle de *Francœur*.

2. *Plan d'un terrain*. S'il était possible de suspendre un fil à plomb à chacun des points de la surface ondulée d'un terrain, puis de marquer sur un plan inférieur, tangent au prolongement du niveau des mers au-dessous du milieu du terrain, les pieds de cha-

cune des verticales, ce plan tangent serait le *plan* proprement dit du terrain supérieur, et cette expression s'applique encore à l'image réduite que l'on en trace sur le papier à l'échelle convenable.

3. *Faire le levé* d'un pays, c'est donc chercher les éléments de la projection *horizontale* des divers points A B C D E F..... de son relief (*fig.* 1, *planche* LXXXIV).

4. Pour les obtenir successivement, on ne s'attache d'abord qu'aux points les plus saillants. On les suppose liés entre eux, *trois à trois*, par des droites qui forment ainsi un *réseau* continu de triangles situés dans des plans ordinairement différents les uns des autres, réseau qui recouvre ainsi toute la contrée.

Cela fait, on mesure directement l'un des côtés A B de ce réseau (*fig.* 1), puis les angles formés aux extrémités A, B, de cette base avec tous les sommets B, E, F.... que l'on pourra apercevoir de ces extrémités. On mesure également toutes les inclinaisons des côtés sur l'horizon, *tous* les angles que ces côtés forment entre eux, deux à deux, dans l'espace. On réduit ces derniers angles à la valeur qu'ils auraient si leurs sommets et leurs côtés étaient projetés sur l'horizon; on réduit la base A B à la longueur de sa projection sur le même plan; on a alors les éléments nécessaires pour calculer de proche en proche tous les éléments de la projection du polyèdre A B E D....F.

Ainsi (accentuant toutes les lettres pour indiquer la projection horizontale des points respectifs qu'elles représentent), la connaissance de la longueur A'B' et des angles B', A', E', détermineront les autres éléments du triangle A'B'E', projection horizontale du triangle A B E, et B'E' en particulier. De cette longueur B'E' et des angles connus B', E', D', on conclura de la même manière B'D' et D'E'; la première permettra de calculer le triangle B'D'C'; la seconde, celui D'F'E', et ainsi de suite.

5. *Pour vérifier* l'exactitude de ces opérations, il sera souvent nécessaire de mesurer directement une seconde *base*, BC par exemple, et de comparer sa longueur réduite B'C', qui devra être, ou rigoureusement ou très-à peu près égale à celle B'C' que l'on aura obtenue par le calcul du triangle B'D'C'.

6. L'opération totale que l'on aura ainsi achevée est la *triangulation* du terrain, et le résultat qu'on en a obtenu est le *canevas* du plan.

7. On conçoit facilement comment, en s'appuyant sur les lignes de ce *canevas*, on parviendra à déterminer, par des opérations analogues, les projections *a' e' f'* de points secondaires *a e f*; — comment ensuite les lignes *a'e'*, E'*f'*, pourraient, à leur tour, fournir les positions de points encore moins importants, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait sur le plan des triangles assez petits pour que

l'on n'ait plus à faire dans leur intérieur que ce qu'on appelle un *levé de détail*.

8. Une seule triangulation suffira, le plus souvent, avant de passer à ces derniers levés, et la méthode suivante pourra alors être employée pour déterminer la position des points principaux du détail de chaque triangle. Cette méthode pourrait même servir pour former un *canevas* si le terrain n'avait pas une grande étendue, ou si une très-grande exactitude n'était pas exigée.

9. De l'extrémité A d'un côté ou d'une base AB (*fig.* 2, *planche* LXXXIV), on relèvera tous les angles compris entre son autre extrémité B et les points C, D, E, F, G.... ; on se transportera ensuite en B, et, de cette station, on relèvera les angles compris entre A et les mêmes points C, D, E, F, G.—En même temps que, de A et de B, on aura relevé les angles de direction, on aura pris les inclinaisons à l'horizon de tous les côtés AF, BF, AG, BG, AC, BC, etc. On aura ainsi une série de triangles tous appuyés sur la même base, dans lesquels on connaîtra un côté et les deux angles adjacents, ce qui permettra de les calculer, de les construire, et, par conséquent, de placer sur le plan les projections des points CD EFG. La base AB devra d'abord être réduite à l'horizon, et les angles de direction y seront également réduits par le calcul, si l'INSTRUMENT qui les a fournis n'a pas, de lui-même, opéré ces réductions (Voyez p. 968 et 969).

10. Entrons maintenant dans le détail de chacune des opérations sommairement indiquées ci-dessus, après avoir pris une idée générale de la méthode.

11. La première opération d'un ingénieur chargé d'un levé de quelque étendue sera la *reconnaissance* générale des points saillants du terrain, dont il fera en même temps un *croquis*. Si ces points saillants sont en grand nombre, il choisira de préférence, pour en faire les sommets de ses triangles : 1° ceux qui formeront entre eux les plus grands triangles possibles ; 2° ceux qui formeront les triangles qui se rapprocheront le plus de la forme équilatérale ; 3° il rejettera prudemment ceux qui donneraient des triangles tels que de chacun des sommets on ne distinguerait pas nettement les deux autres et s'opposeraient ainsi à ce qu'il pût vérifier si la somme de leurs trois angles $=180°$ (*Géométrie*, B, 7). Il fera placer des signaux à chacun des points qu'il aura choisis, à moins qu'il ne s'y trouve déjà des signaux naturels, et il procèdera à la

12. *Mesure d'une base*. Cette base est nécessairement l'un des côtés des triangles de son canevas. Il la choisira sur le terrain le moins inégal, s'inquiétant peu qu'il soit horizontal ou non, pourvu que, dans ce dernier cas, sa pente soit sensiblement uniforme. Les grandes routes, les bords de la mer, ceux des rivières ou des cours

d'eau, ceux des marais offrent le plus souvent des emplacements convenables. Il tracera, à l'aide de jalons, la direction de cette base qui devra toujours être la plus longue possible; puis il la mesurera à la CHAINE (p. 963), deux fois au moins, avec le plus grand soin et suivant sa pente. Il relèvera ensuite son inclinaison α à l'horizon, et si L est la longueur trouvée, sa projection horizontale x sera :

$$x = L \cos. \alpha.$$

Mais l'angle α étant ordinairement fort petit, il vaut mieux calculer x par la relation (*Géom.*, M, 9) :

$$x = L\,(1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha)$$

Lorsque le pays est excessivement accidenté et que le levé a peu d'étendue, on peut se permettre de mesurer les bases à la *stadia* (p. 964).

13. La base mesurée, il procèdera au relèvement des angles. Si l'INSTRUMENT qu'il emploie ne donne pas l'angle des plans verticaux passant par les deux signaux A, B et la station C (*fig.* 3, *planche* LXXXIV), il appliquera à cet angle ACB le calcul dit : *Réduction des angles à l'horizon;* c'est-à-dire que de l'observation directe de l'angle BCA et des angles de hauteur BCE, ACF, il déduira l'angle réduit à l'horizon ECF, remarquant que le mot réduit n'implique pas ici une idée de diminution. Soient donc

O = l'angle observé BCA dans le plan des signaux et de la station ;

α, β les angles de hauteur des signaux respectifs A, B, au-dessus de l'horizon ECF ;

z, z' leurs distances zénithales respectives; $z = (90 - \alpha)$; $z' = (90 - \beta)$;

O' = l'angle réduit ECF qui est le même que celui O' du triangle sphérique ABO'.

On a (*Géom.*, O, 20)

$$\sin.\frac{1}{2}O' = \sqrt{\frac{\sin.\left[\frac{O+z+z'}{2} - z\right]\sin.\left[\frac{O+z+z'}{2} - z'\right]}{\sin.z\,\sin.z'}}$$

Application. Soit O = ... 58° 54′ 40″

α = 12° 22′ 30″ d'où z = ... 77° 37′ 30″

β = 13° 8′ 24″ d'où z' = ... 76° 51′ 36″

on a $\dfrac{O+z+z'}{2}$ = ... 106° 41′ 53″

$\dfrac{O+z+z'}{2} - z$ = ... 29° 4′ 23″

$\frac{O+z+z'}{2} - z' =$. . . . . 29° 50′ 17″

log. sin. 29° 4′ 23″. 9.6865687
log. sin. 29° 50′ 17″. 9.6968369
comp. log. sin. 77° 37′ 30″. 0.0102095
comp. log. sin. 76° 51′ 36″. 0.0115225

19.4051376

dont la moitié = log. sin. $\frac{1}{2}$ O′ = ... 9.7025688

ce qui donne 30° 16′ 32″ pour la valeur de $\frac{1}{2}$ O′
et enfin 60° 33′ 4″ pour l'angle *réduit* O′

Lorsque l'ingénieur opèrera en pays de plaine, il pourra le plus souvent s'épargner le calcul ci-dessus, il n'en sera pas de même en pays de montagnes.

On remarque que lorsqu'on a sensiblement $\alpha = \beta$, d'où $z = z'$, la formule se simplifie beaucoup, et devient

$$\sin.\tfrac{1}{2}O' = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}O}{\sin.z} = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}O}{\cos.\alpha}$$

14. Les points qu'on a choisis comme signaux aux sommets des triangles sont souvent tels qu'on ne peut s'y placer commodément. Les tours, les clochers, la plupart embarrassés de charpentes, sont dans ce cas, soit parce que leur centre est occupé par une poutre verticale, par un poinçon, soit parce que leurs ouvertures ne sont pas disposées de manière à ce que, de leur centre, on puisse viser aux deux autres sommets du triangle. On se place alors en dehors du sommet mathématique, et les angles qu'on relève de cette fausse station doivent subir une correction qui les ramène à la valeur qu'ils auraient eue si on les avait observés du vrai sommet. C'est l'objet de la

Réduction au centre de la station (*fig.* 4, *planche* LXXXIV). Soient C la station qu'aurait dû occuper l'observateur pour y relever l'angle BCA = C; C′ celle que les obstacles le forcèrent d'adopter, et d'où il relève l'angle BC′A = C′.

CC′ = r les distances des deux stations.
g = la distance de l'objet de gauche au sommet C.
d = distance de l'objet de droite au même sommet.
y = l'angle au sommet C′ entre l'objet de gauche et le sommet vrai C.
C′ + y = angle au sommet C′ entre l'objet de droite et le sommet vrai C.
R ce qu'il faut ajouter ou ôter à l'angle C′ pour avoir C.

cun d'eux à deux droites perpendiculaires entre elles. Toutefois, il était naturel de choisir ici pour axes des coordonnées la MÉRIDIENNE du point principal du plan et la perpendiculaire à cette méridienne; c'est ce qu'on fait ordinairement par la méthode ci-dessous indiquée.

18. *Rapporter la position des points du canevas à une méridienne et à sa perpendiculaire* (*fig.* 5, *planche* LXXXIV). Les directions de la MÉRIDIENNE NAM et de la perpendiculaire OAP au point principal A du levé étant déterminées, le côté AB est orienté, c'est-à-dire que l'on connaît l'AZIMUT MAB $= a$ de ce côté. Il ne s'agit plus que d'en déduire les coordonnées (Ab, Ab'), (Ac, Ac').... (Ak, Ak') (Ai, Ai') de tous les autres sommets. Pour y parvenir, on transportera successivement l'origine des coordonnées à tous les sommets des triangles, c'est-à-dire que l'on mènera par tous ces sommets des parallèles à la méridienne et à sa perpendiculaire, et les côtés des triangles, dont la longueur est connue d'ailleurs, deviendront les hypothénuses de triangles rectangles dont on sait calculer les autres côtés (*Géom.*, N. 2). Par exemple, on aura pour B les relations

$$Ab = AB \cos. a \ldots\ldots \quad Ab' = AB \sin. a$$

Pour calculer les distances relatives au sommet C, on remarquera que l'angle BAC étant connu, on a $CAM = a - BAC$ et $Ac = AC \cos. (a - BAC)$; $Ac' = AC \sin. (a - BAC)$; retranchant CAM de CAE, on aura MAE, d'où $Ae = AE \cos. MAE$; $Ae' = AE \sin. MAE$,

Pour le point D, on voit facilement que l'azimut

$$DCM_1 = CAM + 180° - DCA = \alpha;$$

on en conclut $cd = CD \cos. \alpha$ $\quad c'd' = CD \sin. \alpha$

et dès lors pour les ordonnées du point D

$$Ad = Ac + cd; \qquad Ad' = Ac' + c'd'$$

et ainsi de suite.

Il convient d'adopter ici une méthode analogue à celle de la géométrie des courbes et, par exemple, de faire toutes deux positives les ordonnés x et y des points situés dans la région *sud-ouest* MAO; l'on a alors, x étant la distance à la méridienne, et y celle à sa perpendiculaire

Région sud-ouest	MAO.......	$+x+y$
Région nord-ouest	OAN.......	$+x-y$
Région nord-est	NAP.......	$-x-y$
Région sud-est	PAM.......	$-x+y$

Partant de cette convention, désignant par k un côté connu, par z son azimut ou l'angle d'inclinaison de sa direction sur la direction parallèle à la méridienne, angle compté comme a en tournant du sud vers l'ouest depuis zéro jusqu'à 360°, on aura généralement

$$x = k \sin . z \pm m ; \qquad y = k \cos . z \pm p$$

m et p étant les ordonnées de l'extrémité de k. Donnant aux sinus et cosinus les signes qui leur conviennent, x et y prendront d'elles-mêmes les signes qui indiqueront à quelle région le sommet appartient. Ces calculs, fort simples, exigent cependant beaucoup d'ordre et d'attention.

19. *Levés de détail.* La triangulation faite ou rapportée sur le papier, on commence le levé des détails. Les moyens qu'on peut employer pour les obtenir varient avec la nature des INSTRUMENTS dont on dispose. Nous les classerons sous les titres, *levés à la planchette* (pag. 968), levés à la *boussole* (pag. 958), levés au *pantomètre* (pag. 967), ou à *l'équerre* (pag. 967 et 976).

20. *Levés à la planchette, généralités. La planchette* (pag. 968) doit toujours être disposée horizontalement à chaque station; les angles qu'on y trace sont toujours ainsi réduits à l'horizon (13), aussi bien que les droites qui joignent entre eux les différents points du plan. Les distances mesurées directement devront être prises avec la *chaîne* (pag. 963) tendue *horizontalement* et jamais suivant la pente du terrain. On concevra au reste et l'on se rappellera plus facilement l'usage de la planchette, en remarquant que toutes les situations qu'elle prend aux stations successives sont parallèles entre elles, et que l'instrument est toujours placé dans le même sens relativement au terrain.

21. *Première méthode dite de cheminement (fig. 1, planche* LXXXV) Elle s'applique lorsque tous les points A, B, C, D, E du terrain sont accessibles, lorsqu'on peut y placer la planchette, et lorsque aucun obstacle ne s'oppose à ce que l'on *chaîne* de l'un à l'autre.

Etablissez la planchette bien horizontalement au-dessus du point A du terrain, à l'aide d'un petit niveau à bulle d'air; — disposez-la de manière que sa surface puisse contenir tout le terrain ABCDEF; — enfoncez perpendiculairement au plan de la tablette au point a du papier déterminé par la verticale en A au terrain, une fine aiguille à laquelle vous aurez fait une forte tête avec de la cire à cacheter; — appliquez contre cette aiguille le bord de l'alidade qui répond aux pinnules; — faites tourner l'alidade autour de l'aiguille a jusqu'à ce que vous aperceviez le *pied* du jalon ou du signal placé en B; — tirez alors le long de l'alidade une droite *indéfinie;* — tracez de la même manière une autre droite indéfinie suivant la direc-

tion AF, en visant au pied du jalon F ; — enlevez la planchette du point A, et faites placer un jalon en ce point du terrain.

Transportez-vous au point B du terrain, et, pendant ce temps, faites chaîner la ligne AB du terrain, les deux chaîneurs s'alignant réciproquement sur les jalons A et B. Enfin, sur les lignes indéfinies tirées de *a*, et à partir de ce point du papier, portez à l'échelle adoptée les longueurs *ab*, *af* de AB, AF.

Piquez une seconde aiguille au point *b* de la planchette ; — établissez l'instrument au point B du terrain, de manière que *b* se trouve ou rigoureusement, ou sensiblement sur la verticale de B. Une petite erreur sur cette position (pag. 969) n'aurait d'influence que si l'on opérait à une très-grande échelle ; en pareil cas, on ferait convenir ces deux points en employant un compas d'épaisseur, dont les pointes pourraient atteindre le centre de la planchette. A l'une d'elles serait suspendu un fil à plomb, l'autre s'appliquerait sur le point *b*, puis l'on disposerait la planchette de manière que le fil à plomb passât par la verticale de B. Revenons à ce point.

Appliquez l'alidade contre les aiguilles *b*, *a* ; — faites tourner alors la planchette jusqu'à ce que, à travers les pinnules, vous aperceviez le pied du jalon A. Dans cette situation, *ba* du plan se trouvera dans la direction BA du terrain. Sans rien changer à la position de la planchette, enlevez l'aiguille *a*, faites mouvoir l'alidade autour de l'aiguille *b*, jusqu'à ce que, à travers les pinnules, vous aperceviez le pied du jalon C. Tirez alors le long de l'alidade une droite indéfinie dans cette direction *b*C ; — faites chaîner BC ; — portez sa longueur *bc* sur le plan, réduite à l'échelle adoptée, et piquez en *c* l'aiguille enlevée de *a* ; — transportez la planchette sur C du terrain ; — opérez en C absolument de même que vous avez opéré en B ; — continuez ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez fermé le polygone.

La méthode de cheminement s'applique avec avantage au levé des bois fourrés, des sentiers, des ruisseaux, des galeries de mine.

22. *Vérifications*. On peut remarquer que, dès que l'on est arrivé au point C, les points *ab* étant déjà fixés sur la planchette, il faut, si l'on a bien opéré que, lorsque *cb* est tracée, la direction CA de la diagonale du terrain coïncide avec *ca* du plan. S'il n'en est pas ainsi, on s'est évidemment trompé ou sur la mesure de AB, ou sur celle de BC, ou sur leurs réductions *ab*, *bc*, ou enfin sur l'angle ABC = *abc*. On fera des vérifications semblables à chaque station, et l'on voit, par exemple, que la planchette étant placée en D, et la droite *dc* du plan étant tracée, les directions *da*, *db* du plan doivent être les mêmes que celles DA, DB du terrain. S'il n'en est pas ainsi, des erreurs ont été commises, et on doit les corriger immédiatement.

23. *Si l'on fait usage du déclinatoire* (pag. 969), comme on a

tracé sur la planchette la ligne nord-sud au point de départ A, on est dispensé de la station en B ; l'on se porte de A directement en C, tandis que l'on fait mesurer A B et BC. On oriente la planchette en C, à l'aide du déclinatoire ; — puis *ab* étant porté sur la planchette à l'échelle convenue, on pique une aiguille en *b*, et faisant tourner l'alidade autour de ce point *b* jusqu'à ce que de la station C, on aperçoive le jalon B à travers les pinnules, on tirera une indéfinie *b* . . C, sur laquelle on portera de *b* en *c* la longueur réduite *b c*. De la même station C, on tirera immédiatement une indéfinie *c*D vers D, puis laissant de côté la station D, on se portera immédiatement en E, tandis que l'on fera chaîner C D et DE ; on portera *cd* à l'échelle sur la direction *c* D, puis de la station E, visant à D à travers les pinnules de l'alidade appuyée contre l'aiguille *d*, on tirera l'indéfinie *d*E sur laquelle on portera la longueur *de*, puis du point *e*, on tirera l'indéfinie *e*F, et ainsi de suite.

L'emploi du déclinatoire réduit ainsi de près de moitié le nombre des stations, mais le vent qui empêche quelquefois l'aiguille de se fixer aisément, fait que, alors, il n'y a aucune économie de temps.

24. *Méthode dite de recoupement.* Elle permet de ne faire mesurer qu'une seule distance, et elle n'a d'application que lorsque tous les points sont accessibles.

Soit (*fig.* 2, *planche* LXXXV) A B la base que l'on a pu mesurer ; on tracera sur la planchette une droite *ab*, réduction de AB à l'échelle adoptée, et située convenablement. — On placera la planchette en B, et l'on fera convenir le point *b* de la planchette avec B du terrain, et la direction *ba* avec B A. — On tirera en visant de *b* au jalon C une droite indéfinie, dans la direction *b* C ; — on portera la planchette au point C du terrain, et on l'y disposera de manière que la dernière droite *bc* convienne avec BC quant à la direction ; — on piquera une aiguille au point *a* du plan ; — on fera tourner l'alidade autour de cette aiguille jusqu'à ce que, de la station C, on aperçoive le jalon A du terrain à travers les pinnules ; — l'alidade restant dans cette position, on tirera de *a* vers soi une droite indéfinie, qui recoupera nécessairement la direction *bc* en un point qui sera *c* du plan.

La planchette restant dans cette position, on tirera de *c* vers le jalon D une indéfinie *c*D, et l'on se transportera en D ; — on y disposera la planchette de manière que la direction de D*c* convienne avec celle de DC. Plaçant encore l'alidade contre l'aiguille *a* du plan, on la fera tourner autour de cette aiguille, jusqu'à ce qu'on aperçoive par les pinnules le pied du jalon A du terrain. Tirant alors de *a* vers soi une indéfinie, elle recoupera la direction *c* D en un point qui sera nécessairement *d* du plan.

De ce point *d* du plan, on dirigera l'alidade vers le jalon E du

terrain, on tirera l'indéfinie *d*E; — on transportera la planchette au point E; — on fera convenir les directions E*d*, ED, puis, sans changer la position de la planchette, on placera l'alidade contre l'aiguille *a*, on la fera tourner jusqu'à ce que l'on aperçoive à travers les pinnules le pied du jalon A; — enfin on tirera vers soi une indéfinie, qui reçoupera celle *d*E en un point qui sera nécessairement *e* du plan; — et le polygone sera fermé.

25. *Vérification.* On se vérifie à chaque station, en se servant des points déjà déterminés, et l'on voit facilement, par exemple, que le point *e* déterminé sur le plan où l'on a déjà *a*,*b*,*c*,*d*, peut être donné à la fois en tirant des droites, soit suivant A*a* pour recouper *d*E, soit suivant B*b* pour recouper la même indéfinie *d*E, soit encore suivant C*c*.

26. *Si l'on emploie le déclinatoire,* la base AB étant représentée par *ab* à l'échelle sur la planchette orientée, on va s'orienter de nouveau en C, puis à l'aide de l'aiguille (en cuivre) piquée d'abord en *a* du plan, on fait tourner l'alidade jusqu'à ce qu'on aperçoive le jalon A du terrain, et l'on tire l'indéfinie A*a*C vers soi. Opérant de même, de la même station et par rapport à B du terrain, on a une autre indéfinie B*b* qui recoupe la direction A*a* C en un point qui est nécessairement *c* du plan. Avant de quitter la station C, on tire *c*D, puis on se porte en D du terrain, on s'y oriente, et les points A, B de la base et *a*, *b* du plan servent encore à déterminer *d* absolument comme on a obtenu *c*. . . et ainsi de suite, en remarquant que (B, C) (C, D) (*b*, *c*) (*c*, *d*) peuvent donner de même la position des points *e*. . . *f* du plan.

27. *Méthode d'intersection.* Elle s'emploie surtout lorsque la base AB seulement est accessible, et elle ne diffère point, quant au principe, de celle indiquée (9) et *fig.* 2, *planche* LXXXIV. Ainsi on dispose la planchette à l'une des extrémités A de la base AB; — on trace à l'échelle convenue cette même base *ab* sur le plan, puis après avoir disposé l'instrument de manière que *ab* soit exactement dans la direction AB, on pique l'aiguille en *a* et faisant tourner l'alidade autour de cette aiguille, on vise successivement à tous les points F, G, C, E, D du terrain, et l'on tire sur la planchette des droites indéfinies dans leurs directions; — on transporte ensuite la planchette en B, on la dispose de manière que *b* étant dans la verticale de B, la base réduite *ba* soit dans la direction BA, puis visant de B en faisant tourner l'alidade autour de l'aiguille *b*, on tire d'autres indéfinies vers les mêmes points du terrain que précédemment. Ces indéfinies recoupent les premières sur la planchette en des points *f*, *g*, *c*, *e*, *d* qui sont les projections des points F,G,C,E,D du terrain.

La méthode d'intersection a l'avantage d'être rapide et l'inconvé-

nient de donner parfois des intersections trop aiguës ou trop obtuses; ce qui fait que l'on saisit mal le véritable lieu des points à marquer sur la planchette.

28. *Vérification.* La planchette étant à l'une des extrémités B de la base, et *ba* du plan convenant avec BA du terrain, on fera placer un jalon en un point quelconque V du terrain, et l'on tirera l'indéfinie *b*V. On transportera la planchette en V; — on fera convenir l'indéfinie V*b* avec VB; — on piquera une aiguille à un point *g*, par exemple, du plan. Autour de cette aiguille *g*, on fera tourner l'alidade, et lorsqu'on apercevra par les pinnules le point G du terrain, on tirera l'indéfinie G*g* qui recoupera *b*V en un point qui sera *v* du plan. Tout restant dans cette situation, il faut, si l'on a bien opéré, que plaçant successivement l'alidade suivant *vf*, *vc*, *va*... du plan, on aperçoive à travers les pinnules les points F, C, A du terrain.

29. *L'emploi du déclinatoire* n'offrirait ici d'autre avantage que celui d'orienter la base par rapport au méridien magnétique. Toutefois la planchette orientée à l'aide du déclinatoire, permet de résoudre un problème très-usuel, savoir :

30. *Déterminer sur la planchette la position d'un point intérieur* O du polygone ABCD, trois points *a*, *b*, *c* ou deux points au moins *a*,*b*, étant déjà placés sur le plan et visibles du point O (*fig.* 3, *planche* LXXXV).

On orientera la planchette à la station O, puis faisant tourner l'alidade autour de l'aiguille *a* jusqu'à ce qu'on aperçoive A du terrain, on tirera une indéfinie dans la direction A*a*; — on fera de même relativement à B et l'intersection sur la planchette des deux indéfinies A*a*, B*b* donnerait sur le plan la position *o* de O, mais il convient de vérifier cette position en opérant encore de même sur *c* et C ou tout autre *troisième* point.

31. *Application de cette méthode* (*fig.* 5, *planche* LXXXV). On voit immédiatement comment, à l'aide d'une base AB convenablement située, on obtiendrait, en stationnant successivement en *q*, *m*, *p*... les positions de ces points sur la planchette, et par suite toutes les sinuosités d'un cours d'eau.

Les lignes *am*, *ap*... serviraient à leur tour de bases pour placer sur la planchette, à l'aide de la méthode d'intersection (27), des points tels que *x* situés sur l'autre rive, et l'on obtiendrait ainsi facilement la largeur du cours d'eau en différents points, ainsi que la figure des deux rives.

Il faut du reste éviter ici, comme à la méthode (27), les intersections trop aiguës ou trop obtuses.

32. On obtiendrait encore facilement les sinuosités des ruisseaux, des haies, etc., avec la planchette sans déclinatoire, en abaissant

(*fig.* 5, *planche* LXXXV) des coudes ou des points principaux x, y, z, u, t de petites perpendiculaires sur des droites, comme EC par exemple, déjà tracées sur le plan. On porte à l'échelle les distances de leurs pieds le long de *ec*, ainsi que leurs longueurs réduites, et l'on trace ensuite facilement les courbes C $uzyx$. On dessine en même temps à vue le terrain compris dans les divers trapèzes E xy Y.

33. C'est en employant avec sagacité tantôt l'une tantôt l'autre des méthodes précédentes que l'on parvient à représenter sur la planchette le *plan* d'un terrain avec la projection de tous les détails. La planchette a le grand avantage de dispenser l'ingénieur de tout registre d'observations et de tous croquis. Elle donne immédiatement une représentation suffisamment fidèle des petites étendues de terrain, mais les méthodes purement graphiques qui constituent son emploi ne sauraient indiquer que très-grossièrement la valeur des angles ou celle des lignes qui n'ont point été directement mesurées. Seule, elle ne peut rien apprendre d'ailleurs sur le RELIEF DU TERRAIN, et ce relief est souvent d'une très-grande importance. J'ajouterai encore ici quelques observations sur l'emploi de la planchette à divers levés.

34. *Levés souterrains.* On devra faire ici un emploi presque constant de la méthode de *cheminement*. Ce sont nécessairement des *lampes* qui servent de signaux et remplacent les jalons du terrain. On agira très-prudemment en s'abstenant de l'usage du *déclinatoire*.

35. *Plans des villes.* Il est assez commode ici de commencer en plaçant la planchette au milieu de la place principale. On y trace de ce point, à l'échelle adoptée, des rayons vers des points situés un peu en deçà de l'origine de l'axe de chaque rue aboutissante. Si du milieu de cette place on aperçoit quelque monument remarquable à distance, un clocher par exemple, on y dirigera un rayon que l'on recoupera plus tard des autres stations d'où il serait encore visible. Puis on cheminera suivant l'axe des rues en ayant soin de diriger de la station d'entrée et de la station de sortie de chacune d'elles de petits rayons vers les angles des premières et des dernières maisons. — De chaque carrefour on dirigera également des rayons dans l'axe de toutes les rues aboutissantes, et d'autres petits rayons aux angles des premières maisons de chacune d'elles. En général, il faut diriger des rayons à tous les angles saillants et rentrants que l'on rencontre.

Lorsque les villes sont entourées d'un boulevard, on peut espérer plus d'exactitude en commençant le levé par le contour, parce que ces boulevards présentent des bases plus étendues. Il convient alors de lever d'abord *tout* le contour en dirigeant des rayons sur toutes les rues que l'on rencontre, et que l'on reprend ensuite.

Comme l'on mesure ici *toutes* les longueurs, les moyens de vérification se présentent en foule.

36. *Tracer à la planchette une route, en forêt.* Ce problème suppose que l'on a sur la planchette le plan exact de la partie de forêt dans laquelle on doit opérer, ainsi que la direction de la percée à y faire.

On disposera la planchette à l'origine de la trouée en faisant rigoureusement convenir *deux* des plus grandes lignes de la planchette avec leurs correspondantes du terrain. On placera alors l'alidade avec soin sur l'axe de la route en projet marqué sur la planchette, et l'on fera ouvrir le bois dans cette direction que l'on marquera d'ailleurs par des piquets, à mesure que cela deviendra possible.

37. *Usage de la planchette pour tracer un projet sur le terrain.* On conçoit très-facilement comment, en général, un projet étant tracé sur la planchette, on reporte sur le terrain toutes les lignes homologues, voici toutefois quelques prescriptions utiles :

Il faut d'abord disposer la planchette sur le terrain à un des points *principaux* du plan, et faire convenir *la plus grande* ligne qui parte de ce point avec celle qui doit y correspondre sur le terrain. On détermine ensuite de cette première station, à l'aide de l'alidade, autant d'alignements sur le terrain qu'il y a de lignes droites qui peuvent y concourir. — On fait porter sur ces alignements autant de mètres et fractions de mètre que l'échelle ou les cotes en indiquent. On va ensuite établir la planchette à chacune des extrémités de ces premiers rayons, et après leur avoir donné une position parfaitement parallèle à celle qu'elle avait à la première station, on détermine de nouveaux alignements dont on limite la longueur à celle indiquée sur le plan.

Il importe presque toujours ici que le point de la planchette se trouve rigoureusement dans la verticale de son homologue sur le terrain, on obtiendra cette coïncidence par les moyens indiqués, § 21.

Il convient enfin que les principales lignes du plan soient cotées d'avance sur la planchette ainsi que les diagonales du polygone du projet. On procède ordinairement des contours vers l'intérieur, mais il est quelquefois plus commode de tracer de grands axes.

38. *Levés à la boussole ; généralités.* L'angle formé par une direction quelconque avec celle de l'aiguille aimantée (pag. 958), se mesurera par la *droite* de l'observateur, et depuis zéro jusqu'à 360, en d'autres termes, il a pour mesure l'arc compris entre la *droite* du rayon visuel et la *gauche* de l'extrémité bleue de l'aiguille. Il faut ne lire ces angles sur le limbe que lorsque l'aiguille a cessé d'osciller, et, pour ne point commettre de trop grosses erreurs sur cette lecture, l'observateur doit la faire en se plaçant juste en face de l'extrémité de l'aiguille. — La boussole doit d'ailleurs être toujours disposée horizontalement.

Le vent, le fer, à la surface du sol, les oxides magnétiques, les courants électriques, les voies de roulage en fer dans les levés souterrains, sont des causes d'erreurs graves qui obligent dans maintes circonstances à s'abstenir de l'emploi de la boussole.

39. *Première méthode*, applicable aux levés des polygones dont tous les points sont accessibles, aux cours d'eau, aux sinuosités des chemins, aux contours des petites propriétés (*fig.* 1re, *planche* LXXXVI).

Soit ABCDE le polygone. — Etablissez horizontalement la boussole au point A, et pendant que les chaîneurs mesurent la distance entre le point A et le jalon B, visez de A vers B; tracez un arc sur le croquis, autour du point *a* depuis la droite de la direction AB jusqu'à la gauche de la petite flèche qui figure l'aiguille ;— inscrivez autour de cet arc la graduation observée de cet angle, et portez en même temps sur le croquis, le long de *ab*, la valeur en mètres et fractions du mètre de la distance AB mesurée horizontalement. Avant de quitter A, visez vers E, et prenez note de la valeur de l'angle *n*AE; — transportez la boussole en B, visez sur C et faites pour B et BC ce que vous avez fait pour A et AB; — transportez l'instrument en C. . . . . et ainsi de suite jusqu'au dernier angle et au dernier côté du polygone.

40. *La vérification de la valeur des angles* est fondée sur la propriété des polygones (*Géom.*, C, 21). Pour avoir la valeur de l'angle *intérieur* B par exemple, on peut remarquer que les directions de l'aiguille étant sensiblement parallèles à toutes les positions du plan, on a (*Géom.*, A, 17) :

$$B = sBA + sBC = 360 - nAB + CBn - 180^\circ$$
$$= 466^\circ - 325^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ 141^\circ$$

On aurait de même, en continuant à ne faire entrer dans les calculs des angles *intérieurs* que les valeurs des angles *observés*

$$C = nCD - CBn + 180^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ 53^\circ \tfrac{1}{2}$$
$$D = nDE - nCD + 180^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ 274^\circ \tfrac{1}{2}$$
$$E = nEA - nDE + 180^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ 28^\circ \tfrac{1}{2}$$
$$A = nAB - nEA - 180^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ 42^\circ \tfrac{1}{2}$$

ainsi la somme des angles intérieurs est bien égale à

180 (5 — 2) ou. . . . . 540°

On n'aura pas manqué de remarquer que, dans ces calculs, l'angle *n*AB est l'angle *observé* et = 325° et non pas l'angle aigu *n*AB de la figure; il en est de même de tous les autres.

41. *La vérification des côtés* se fait en construisant le polygone à

l'échelle à l'aide du rapporteur ou de la table des sinus (*Géom.*, P, 9). Il n'y a point d'erreur, ou il y a des compensations d'erreur, si le polygone *se ferme* exactement, c'est-à-dire si le dernier côté EA passe par le point de départ A, et si tous les autres côtés ont d'ailleurs la longueur voulue par l'échelle. Cette construction du polygone s'opère facilement en tirant sur le papier un grand nombre de parallèles équidistantes ou non qui représentent les directions de l'aiguille aimantée. Elles servent à déterminer la position du rapporteur aux divers points du plan. L'emploi du papier *quadrillé* est encore plus commode, et le rapporteur entier est de beaucoup préférable ici à celui qui ne comprend qu'une demi-circonférence.

42. *Observation*. De même qu'avec la planchette orientée (23) on peut se dispenser de faire des stations à tous les sommets du polygone (*fig.* 1re, *planche* LXXXVI) : on voit, par exemple que, partant du point A, on peut aller stationner directement en C, pourvu que, de ce point, on relève cette fois l'angle BCn; de même on pourra passer immédiatement de C en E, à la condition de relever en E l'angle DEn, et ainsi de suite. Il est clair, en effet, que de ces angles BCn, DEn on conclura ceux CBn, EDn qu'on aurait observés en B, D.... car les équations du numéro précédent donnent :

$$CBn = nCD - C + 180° = BCn + 180°$$
$$EDn = nEA - E + 180° = DEn + 180°$$

ainsi, l'angle que l'on aurait observé en B n'est autre chose que BCn, plus une demi-circonférence, et celui qu'on aurait observé en $D = DEn$ + demi-circonférence. En général, l'angle qu'on n'a pas observé est égal ici à celui que l'on a observé *plus* ou *moins*, une demi-circonférence; ce qui fait que, dans la construction de la figure, on prendra dans tous les cas sur le rapporteur pour former l'angle qu'on n'a point observé le numéro de la division *diamétralement* opposé à celui qui correspond à l'angle observé. En particulier, pour former l'angle nBC au point B, on prendra le numéro de la division diamétralement opposé à BCn. Cet angle BCn étant $= 106°$ par exemple, nBC sera $= 286°$.

Cette observation conduit naturellement au problème suivant, qui donne le moyen de marquer sur un plan, levé en partie, plusieurs points de la crête des montagnes, la position des plateaux, la naissance et la fin des pentes.

43. Problème. *Deux points* A *et* B *du terrain* (fig. 2, planche LXXXVI) *étant marqués sur le plan en* a *et* b, *et les directions de l'aiguille aimantée étant connues par rapport à* AB, *ab*, *placer sur la carte le point* M.

De la station M du terrain on visera aux points A et B, et l'on

inscrira les angles nMA, nMB. Il n'y a pas d'autres données à recueillir sur le terrain. En effet, l'on a

$$nAM = sAM + 180° = nMA + 180°$$

$$nBM = nMB - 180°$$

d'où l'on conclut que, pour placer m sur la carte, il suffirait à la rigueur de faire en a, toujours avec la gauche de la direction nord de l'aiguille un angle $= nMA + 180°$, puis un angle en $B = nMB - 180°$; ce qui revient à placer le rapporteur successivement en a et b, puis à tirer des indéfinies par les divisions diamétralement opposées à celles qui correspondent à la valeur des angles respectifs observés de M sur A et B. Les deux directions indéfinies se couperont en un point qui sera la position du point m du plan. Il convient de vérifier la position de m en la rapportant par le même procédé aux points B C. Il n'y a pas d'erreur si la droite tirée de c vient passer par le même point m du plan.

44. *Seconde méthode; problème général : lever à la boussole le polygone* ABCDE (fig. 3, planche LXXXVI) *dont tous les sommets sont accessibles, en ne mesurant qu'une base* AB.

Placez la boussole à l'une des extrémités B de la base, visez sur l'autre extrémité A, puis de la même station B visez sur C; ce qui donnera ABn, CBn. AB est connu.

Transportez la boussole en C; de cette station, visez sur A et sur D; vous obtiendrez ainsi ACn et DCn.

Transportez la boussole en D; de ce point, visez encore sur A, puis sur E; ce qui fera connaître ADn, EDn;

Et ainsi de suite jusqu'en E où on relèvera AEn.

45. *Pour construire la figure à l'aide de ces données*, on pourrait employer les angles intérieurs de chaque triangle, en remarquant que tous ces angles intérieurs se déduisent de ceux qui ont été observés et que, après avoir construit le premier triangle ABC, dans lequel le côté AB est connu, AC devient une base sur laquelle on construit le second triangle ACD; et ainsi de suite. En nous bornant au premier triangle, par exemple, en désignant alors par A, B, C ses angles intérieurs, on voit facilement que :

$$A = ABn - ACn$$

$$B = nBC - ABn$$

$$C = ACn - nBC + 180°$$

mais il est beaucoup plus simple de procéder comme il suit :

Sur l'une des parallèles du papier *quadrillé*, en un point quelconque b, on tirera une indéfinie ba faisant avec bn, qui indique la direction de l'aiguille, un angle $nba =$ l'angle observé nBA ; puis, on portera à l'échelle, de b en a, la valeur de la base BA.

Du même point b, on tirera l'indéfinie bc faisant avec nb, à la gauche de l'aiguille, un angle $nbc =$ l'angle observé nBC, et, pour donner à bc la longueur qu'il doit recevoir, on conduira du point a une indéfinie ac, faisant avec la gauche de na un angle $nac = 180° + \mathrm{AC}n$; cette droite recoupera l'indéfinie bc au point convenable c, et complètera le triangle. On remarque que l'angle nac correspondra sur le rapporteur à la division *diamétralement* opposée à celle qui donnerait ACn.

Du point c ainsi déterminé, on tirera une indéfinie suivant cd, faisant avec la direction cn de l'aiguille un angle $ncd = n\mathrm{CD}$, puis, toujours du point a, on tirera une autre indéfinie suivant ad, faisant avec la gauche de na un angle $n\mathrm{AD} = 180° + \mathrm{AD}n$, ce qui déterminera le point d et complètera le triangle acd.

Enfin de d, on conduira de dans une direction de faisant avec nd un angle $n\mathrm{DE}$, puis, du point a, on tirera une autre indéfinie ae, faisant avec la gauche de na un angle $n\mathrm{AE} = \mathrm{AE}n - 180°$, ce qui achèvera le polygone.

On voit que, en général, il faut toujours construire au point a, avec la gauche de na, un angle égal à $\pm$ 180°, augmentés de l'angle observé en C, D ou E entre la direction de l'aiguille et le point A; ce qui revient à prendre dans tous les cas sur le rapporteur la division *diamétralement* opposée à la graduation de l'angle avec A observé au troisième sommet de chaque triangle.

Cette méthode devient plus exacte quand, au lieu de viser sur le seul point A, on vise en outre sur B. . . . , mais alors le croquis doit être fait avec beaucoup de soin pour éviter la confusion.

46. *Troisième méthode; problème général : lever à la boussole le plan du polygone* ABCDEF, *dont la base* AB *est seule accessible* (*fig.* 4, *planche* LXXXVI).

Le principe de cette méthode est le même que celui indiqué §§ 9 et 27.

A l'extrémité de la base A, on relèvera tous les angles formés entre la gauche du nord de l'aiguille et la droite des rayons visuels AC, AD, AB, AF, AE.

On fera mesurer pendant cette opération la base AB.

On transportera la boussole à l'autre extrémité B de cette base, et l'on y relèvera tous les angles formés entre la gauche de l'aiguille et la droite des rayons visuels BC, BD, BA, BF, BE.

La construction de la figure sur le papier est trop simple pour que je m'y arrête, après ce qui a été dit.

47. *Problème : à l'aide de la boussole, mener par un point* B *une parallèle à une ligne donnée* AC *sur le terrain* (*fig.* 5, *pl.* LXXXVI).

A l'extrémité A de la ligne donnée AC, observez l'angle A; transportez la boussole au point B, et faites placer des jalons dans la di-

rection Bx déterminée par la condition que l'angle en B $=$ celui observé en A.

48. *Levés au pantomètre* (pag. 967) *ou à l'équerre* (pag. 976). Le pantomètre ou l'équerre doivent toujours être placés horizontalement. Leur emploi convient surtout aux pays de plaine.

49. *Première méthode. Lever le plan du terrain* A . C . F..B..M..Q *qui est partout accessible, et dont tous les points sont visibles* (*fig.* 6, *planche* LXXXIV).

Tracez sur le terrain le plus long alignement possible AB; ce sera la *base* ou la *directrice* du plan. Des sommets du périmètre C, D, G, L, M, conduisez sur cette base les perpendiculaires C*c*, D*d*, G*g*, L*l*, M*m*; faites chaîner A*c* et *c*C, *cq* et *q*C, *qn* et *n*N. . . ., c'est-à-dire, tous les segments de la *base*, et toutes les perpendiculaires à cette base, dont vous inscrirez les valeurs sur un croquis ou brouillon. Ces données suffisent évidemment pour construire la figure sur le papier à l'aide de la règle et de l'équerre, et pour en évaluer la superficie (*Géom.*, I, 6).

50. *Pour trouver le pied des perpendiculaires,* le pied *f* de *f*F, par exemple, on procède par tâtonnement. On place le pantomètre ou l'équerre en f' par exemple, et visant d'abord dans la direction f' A ou f' B, on regarde ensuite par les fenêtres perpendiculaires à cette direction. Si l'on rencontre le pied du jalon F du terrain, f' est le pied de la perpendiculaire, mais il arrivera rarement qu'on rencontrera F du premier coup. Si ce jalon est à gauche, on reculera le pied de l'instrument vers la gauche en f'' par exemple ; — puis, visant de nouveau suivant f'' A, on regardera encore par les fenêtres perpendiculaires à cette direction f'' A, si l'on rencontre le jalon F. S'il est à droite, on prendra une position intermédiaire entre f' et f'' et ainsi de suite jusqu'à ce que le fil vertical du plan perpendiculaire à la direction de la base coupe exactement en deux le pied du jalon F.

C'est là la méthode des arpenteurs; elle n'est pas toujours, tant s'en faut, la plus commode, car elle exige quelquefois un grand nombre de mesures partielles, telles que *q*Q, *c*C, *d*D. . *m*M, prises tant à droite qu'à gauche de la base, et suppose d'ailleurs que les points Q C D..M sont tous accessibles. — La méthode suivante est souvent bien préférable.

51. *Deuxième méthode, dite des coordonnées* (*fig.* 5, *planche* LXXXIV). On trace, à l'aide du pantomètre, deux alignements perpendiculaires l'un à l'autre NAM, OAP, puis cheminant successivement sur ces deux directrices ou axes des coordonnées, on y fait mesurer les distances à l'intersection A des pieds $k' e' i' g' h' c' b'$.... $k e i g h$... $c b$, des perpendiculaires Kk', Ee', Ii'... Cc', Bb'.... Kk Ee Ii... Cc Bb..... abaissées de chaque jalon K E I. . . C B du terrain sur chacun des axes.

Il est évident que ces distances (Kk,Kk'), (Ii, Ii').... déterminent la position de chaque point K, I. . . sur le plan, sans qu'il soit nécessaire de prendre aucune autre mesure en dehors des grands axes NAM, OAP.

Quant à la construction du plan sur le papier, elle s'opère très-rapidement avec la règle et l'équerre comme la figure l'indique.

Ce procédé exige un peu de tact pour bien choisir les axes principaux et les diriger de manière qu'on découvre facilement les objets qu'il s'agit d'y rattacher.

52. *Emploi de l'équerre à réflexion.* Un des inconvénients de l'équerre ordinaire et du pantomètre est d'obliger à des tâtonnements pour trouver le point où la perpendiculaire abaissée de chaque signal vient couper les bases. — *L'équerre à réflexion* (pag. 976) remédie complétement à cet inconvénient, et rend ainsi fort expéditive la méthode précédente qui convient particulièrement ainsi aux RECONNAISSANCES.

53. *Le petit sextant de poche* (pag. 975) remplacerait évidemment l'équerre à réflexion. Il suffirait pour obtenir les pieds des perpendiculaires de fixer l'alidade sur la division 90°, et d'employer alors le sextant comme l'équerre à miroir en cheminant le long des axes.

54. *Problèmes divers.* Quels que soient la méthode et l'instrument qu'on emploie, il arrive trop souvent que le terrain est embarrassé d'obstacles qui gênent ou la vue ou le passage, et l'on ne peut alors obtenir directement toutes les données nécessaires pour calculer les triangles; on a alors recours à des moyens indirects qui font l'objet des problèmes suivants :

55. *Problème.* Soient (*fig. 6, planche* LXXXV) D, C, B trois points en ligne droite, et M un quatrième point, d'où l'on a relevé les angles DMC, CMB. On suppose connus DC et CB, et l'on demande de calculer les triangles DCM, CMB dans lesquels on ne connaît dès lors que DC, CB et les angles qui sont opposés à ces côtés.

On imaginera une circonférence passant par les trois points DCM et une autre circonférence passant par les points CMB. On joindra leurs centres par une droite GO qui sera dès lors perpendiculaire à CM, et coupera cette ligne en deux parties égales.

Si de G et de O on abaisse des perpendiculaires GH, OI respectivement sur DC et CB, puis, si des mêmes points on tire GD, GC, OC, OB, on aura DH = HC; CI = IB; angles HGC = DMC; COI = CMB, et dès lors

$$GC = \frac{HC}{\sin. DMC}; \qquad OC = \frac{CI}{\sin. CMB}$$

$$GCO = 180° - (GCH + OCI)$$

$$CGO + COG = 180° - GCO$$

La somme de ces angles et celle des côtés GC, OC qui leur sont opposés étant connues, on obtiendra leur différence (*Géom.*, N. 1), ce qui donnera d'une part le plus grand angle COG, de l'autre le plus petit $CGO = \frac{CGM}{2}$.

Donc, on connaîtra dans le triangle CGM tout ce qu'il faut pour calculer CM, et ce côté une fois connu, on pourra calculer les triangles DMC, CMB dans lesquels on connaîtra deux côtés et un angle.

56. *Autre problème* (*fig.* 7, *planche* LXXXV). On connaît les positions de B, E, D par les longueurs BE, BD et l'angle EBD, on demande de placer un troisième point intérieur C, d'où l'on a relevé les angles BCE, BCD opposés aux côtés connus.

Si une circonférence de centre K passait par les trois points B, C, E, et une autre de centre L passait par B, C, D, enfin si l'on avait en outre conduit des centres K, L les perpendiculaires KMP, LNQ, on aurait deux triangles isocèles BKE, BLD.

Dans le triangle rectangle KBM, on connaîtrait $BM = \frac{1}{2} BE$, l'angle droit M, l'angle $BKM = 180° - BKR$ et $BKR = BCE$, on aurait donc BK et KBM.

Dans le triangle rectangle BLN, on connaîtrait l'angle droit N, l'angle $BLN = 180° - BCD$ et $BN = \frac{1}{2} BD$, on en déduirait donc BL et LBN.

On a aussi

$$\text{angle } LBK = EBD + KBM + LBN$$

et ces trois angles sont connus. Donc, dans le triangle LBK, on connaîtra les côtés BK, BL, et l'angle LBK qu'ils comprennent, on pourra donc calculer les angles BKL et BLK.

Alors on connaîtra dans le triangle isocèle BKC ses trois angles et deux côtés KB, KC, d'où l'on tirera BC.

Mais dans les triangles BCD, BCE on connaît maintenant un angle et deux côtés, on en déduira donc CE et CD, et même ED, en remarquant que l'angle BKL = BEC.

On aurait pu calculer aussi BC et EC par le triangle BEC dans lequel on connaît deux angles et un côté, ce qui aurait déterminé doublement la position de C.

57. Enfin, s'il arrivait que dans un levé on eût à déterminer un triangle ABC (*fig.* 8, *planche* LXXXV), dont on ne pourrait mesurer directement qu'un angle B et un côté AB par exemple, et cela par suite d'obstacles tels qu'un bois qui gêne la vue, et d'un

marais qui s'oppose au passage? voici comment on pourrait procéder.

On mesurerait de C vers B la plus grande longueur possible CD; on relèverait l'angle A D B—connaissant alors dans le triangle ADB, le côté AB et les angles D et B, on calculerait le côté DB qu'on ajouterait à C D, de sorte que l'on aurait C B, B A et l'angle B pour calculer le triangle A B C.

Si l'on ne pouvait mesurer dans la direction C B, on mesurerait dans une direction quelconque une droite C E — du point B, on relèverait les angles C B E, E B A; puis, du point E, les angles A E B, A E C. Ces angles et le côté A B étant connus, on trouverait B E, qui conduirait à B C et, par suite, à A C.

On trouvera plusieurs autres problèmes usuels à l'article RECONNAISSANCES INDUSTRIELLES.

58. *Durée des travaux.* On ne peut guère espérer passer plus de deux cents jours, année moyenne, sur le terrain en pays ordinaire. — Quant aux pays de hautes montagnes, ils ne sont praticables que pendant trois ou quatre mois de l'année, et plutôt vers l'automne que vers le printemps. Les levés dans ces pays sauvages exigent environ deux fois et demie plus de temps que les terrains ordinaires. La grandeur des échelles a d'ailleurs beaucoup d'influence sur la durée des levés. — On peut admettre qu'à l'échelle du dix millième un ingénieur parviendra à lever, dans une journée, savoir : en pays plat, découvert, à grandes cultures, habitations ramassées, 70 hectares; — pays plat, boisé, habitations isolées, 55 hectares; — collines cultivées, peu boisées, habitations isolées, 50; — collines couvertes de bois et de haies, habitations isolées, 45; — montagnes du second ordre, avec habitations, peu boisées, 70; — hautes montagnes peu boisées, peu habitées, 130. A une échelle *dix fois plus petite*, soit le cent millième, on lèverait dans la journée une étendue des mêmes terrains au moins dix fois plus grande. — Chaque jour employé à lever en terrain ordinaire exige ensuite un jour de travail au cabinet pour le dessin et les calculs. — Pour les levés en montagne, il faut deux jours de travail au cabinet pour un jour de travail sur le terrain. — Enfin on peut, en général, *reconnaître* trois fois autant de terrain qu'on en pourrait lever dans le même temps. (Voy. *Reconnaissances* et aussi *Relief du terrain.*)

59. LEVÉ DE BATIMENTS. Le levé d'un bâtiment (*planches* LXXXVII et LXXXVIII) est une opération excessivement minutieuse, qui exige de grands soins, beaucoup de temps, beaucoup d'ordre et plus encore de patience. Voici sur ce sujet quelques conseils que j'emprunte, quant au fond, à un excellent ouvrage, le *Cours de construction* (lithographié) de M. *Ardant.*

60. *Reconnaissance.* Avant toutes choses, l'ingénieur chargé du

levé d'un bâtiment devra en faire une reconnaissance générale et détaillée, afin de se former une idée claire de l'ensemble et des rapports des différentes parties entre elles. Lorsqu'il aura bien reconnu la situation du bâtiment et de ses abords, — son exposition, — sa forme extérieure, — les communications des divers étages, — la direction et la hauteur des murs de refends, — la direction des cheminées, — celle de tous les conduits et tuyaux de communication quelconques avec l'extérieur, lorsqu'il se sera assuré que les distributions des divers étages sont ou ne sont pas les mêmes, il procédera au

61. *Croquis* ou *brouillon des plans*, en commençant celui-ci par le rez-de-chaussée A (*planche* LXXXVII), passant de là aux divers étages E_1 E_2. . . . E_5 E_6, revenant à celui des caves F, et remontant de celui-ci au plan des greniers et faux greniers.

62. On est convenu de faire passer les sections horizontales qui coupent les divers étages, savoir :

Pour le rez-de-chaussée A et les étages E_1 E_2. . . à $0^m.10$ au-dessus de la tablette des fenêtres ;

Pour la cave à la naissance des voûtes ;

Pour le grenier à $0^m.50$ au-dessus de la sablière ;

Pour le faux grenier (*fig.* 2, *planche* LXXXVII) à la surface de son plancher.

On projette sur ces plans en lignes *pleines* tous les objets d'un même étage situés *au-dessous* du plan sécant, et en lignes *ponctuées* ceux qui sont *au-dessus* de lui ; enfin, on couvre de hachures parallèles ou d'une teinte particulière les parties pleines qui se trouvent coupées par ce plan.

63. On laisse d'abord de côté, dans le levé de ces divers plans, tout ce qui est *détail*, et l'on y revient plus tard à l'aide de plans spéciaux, si cela est nécessaire. Cependant il faut marquer exactement sur le plan général le contour et la situation relative des objets qu'on n'y projette pas, et par exemple dans un levé d'usine, il est nécessaire d'indiquer la place, soit de la machine à vapeur, soit des petites forges, soit des grands outils ou appareils, tels que les grues et les cubillots dans les fonderies, les machines à percer, les tours, les alésoirs dans les ateliers de construction, etc., etc., en ayant soin d'écrire leurs noms dans le polygone que la projection de leur contour forme sur le plan de l'étage.

En général, il convient de projeter et de coter en même temps ; l'emploi du papier *quadrillé* est donc ici d'une grande assistance, puisqu'il conduit naturellement à faire sur le brouillon des figures qui s'accordent sensiblement avec les cotes, et par suite avec les objets eux-mêmes dont on saisit bien mieux les rapports.

64. Les *instruments* qu'on emploie sont : le fil à plomb pour pro-

jeter les points inaccessibles; le niveau du maçon pour se diriger bien horizontalement dans les mesures à prendre; le double décimètre pour prendre les petites cotes; le mètre, le double mètre, et même le décamètre pour les autres.

65. *Mesurage*. En général, on ne doit déduire par le calcul, ou par des constructions, aucunes dimensions de celles que l'on a directement déterminées.—Toutes les longueurs doivent être mesurées avec le plus grand soin, et immédiatement portées sur le croquis. On commence par l'intérieur et l'on termine par le dehors; enfin on ne passe d'un étage à un autre que lorsque l'on a complétement terminé le premier, et *à fortiori* d'une division d'un même étage à la suivante, qu'après avoir épuisé toute la série de mesures horizontales à y prendre. Bien plus, comme il faut se réserver des moyens de vérification, on ne se contente pas des mesures de détail de chacune des divisions; on ne prend même ces mesures de détail que lorsque l'on a déjà l'ensemble. C'est ainsi que dans chaque compartiment, chambre, atelier d'un même étage, lesquels ont presque sans exception des formes polygonales, on mesure d'abord, s'il est possible, toutes les diagonales, puis tous les côtés du périmètre. On reprend ensuite le détail de chacun de ces côtés, mesurant et cotant successivement la largeur des portes, de leurs espacements, celle des fenêtres, des trumeaux, l'épaisseur des murs par les ouvertures qui y sont pratiquées, les poutres, les solives des planchers, etc., etc. On fait la somme des mesures partielles de chaque côté du polygone; on la compare à la longueur totale, et s'il y a une différence, on recommence le mesurage jusqu'à ce que le tout soit égal à la somme des parties.—Il n'est pas toujours possible, dans les usines, de mesurer les diagonales, parce que le milieu des ateliers E_1 est embarrassé de machines; pour avoir les angles, on forme alors dans chaque encoignure de l'atelier un triangle bien horizontal, dont deux côtés s'appuient sur les murs adjacents, et l'on mesure exactement les trois côtés de ce triangle qui devra être le plus grand possible et se rapprocher de la forme isocèle.

Lorsqu'on aura ainsi obtenu les cotes horizontales à tous les étages; lorsque l'on connaîtra toutes les dimensions horizontales des murs de chacun d'eux, des piliers, des supports, des marches, des limons d'escalier, les emplacements des diverses machines, on passera, comme nous l'avons dit au

66. *Plan des caves* F. Toute la difficulté consiste ici à bien lier ce plan à celui du rez-de-chaussée; ce qui se fait à l'aide de repères pris par les ouvertures des soupiraux ou par les escaliers. Si l'on n'apportait pas un très-grand soin à cette opération, on courrait le risque de troubler la véritable relation de superposition

entre les divisions des caves et celles des étages supérieurs. Du reste, on projette sur ce plan les soupiraux en *pointillé* s'ils sont au-dessus de la naissance des voûtes, et l'on y projette aussi par rabattement la courbe génératrice des berceaux.

67. *Plan des greniers*. Le plan des caves achevé, on passe à celui des greniers. Il résulte de la convention faite sur la position du plan sécant, qu'on aura d'abord à représenter la partie du toit qui recouvre la corniche du bâtiment, puis l'intersection du lattis, des coyaux, chevrons. On représentera (*fig.* 3) en traits ponctués les grosses pièces de charpente. Comme une grande partie des pièces se présentent obliquement au plan de projection, on peut tracer avec de la craie leurs intersections avec ce plan; on projette celles-ci sur le plancher à l'aide du fil à plomb, et on lève les figures qui résultent de ces projections. Lorsqu'on a ainsi obtenu toutes les dimensions horizontales, on commence le levé des

68. *Elévations* (*fig.* 2, *planche* LXXXVIII), qu'on fait généralement avant celui des *coupes*, parce que les plans et les élévations réunies (*fig.* 2 et 3) fournissent ordinairement la plus grande partie des cotes nécessaires pour la construction des coupes.

Les plans sur lesquels on projette les élévations sont pris parallèlement aux faces des bâtiments, et assez éloignés pour ne couper aucune de leurs parties saillantes. Si deux faces sont obliques l'une à l'autre, l'une d'elles fournit une projection oblique. On n'inscrit sur cette dernière que les cotes verticales et l'on conclut des dessins des plans les dimensions horizontales.

Pour faire le croquis des élévations, on reprend sur les plans horizontaux toutes les cotes qu'ils peuvent fournir, et l'on n'a guère à relever que des cotes verticales.—On représente sur les élévations (*fig.* 2, *planche* LXXXVIII) tous les détails d'architecture et de DÉCORATION; mais on n'y figure point les ardoises ni les tuiles, la teinte qu'on donne à la toiture sur la *mise au net* suffisant pour indiquer le mode de couverture. La hauteur des combles se prend d'ailleurs par le dedans du bâtiment, et si quelques obstacles s'y opposent, on détermine cette hauteur par la *géométrie*.

69. *Coupes* (*fig.* 1, *planche* LXXXVIII). Les coupes sont des sections par des plans verticaux. On fait autant de coupes, soit dans un sens, soit dans le sens perpendiculaire, qu'on le juge nécessaire pour faire bien connaître le bâtiment. On projette sur ces coupes tous les objets situés entre le plan sécant et le mur le plus voisin au delà du plan, par rapport au spectateur; mais on n'y projette pas les objets situés en deçà de ce plan. On procède d'ailleurs dans le même ordre que pour les plans horizontaux, savoir : rez-de-chaussée A, étages E, caves F, greniers.

Le meilleur moyen qu'on puisse employer pour obtenir une

coupe est de tracer à la craie, sur les planchers, l'intersection du plan sécant, dont on choisit d'ailleurs la position avec intelligence. Cette intersection étant tracée sur le plancher du rez-de-chaussée, par exemple, on trouve facilement, avec des fils à plomb, sa trace sur le plancher des étages, caves, etc., etc.

70. *Le fruit des murs* se mesure également avec le fil à plomb qu'on suspend à l'extrémité du mètre, celui-ci étant d'ailleurs dirigé bien perpendiculairement à la face.

71. *Pour avoir l'épaisseur des planchers*, on prend la hauteur exacte entre l'appui d'une croisée et le plafond, puis la hauteur de l'appui de la croisée supérieure au-dessus de son plancher. On en fait la somme S; on mesure ensuite, par le dehors, la distance des deux appuis, on en retranche S, et l'on a évidemment l'épaisseur cherchée.

Il existe, du reste, une foule de moyens pour obtenir les cotes difficiles, que des ingénieurs sauront toujours créer au besoin, et dont l'énumération serait déplacée dans un livre qui n'est guère destiné qu'à eux seuls.

Toutes les cotes horizontales étant données par les plans, et les cotes verticales par les élévations et les coupes, on peut commencer la

72. *Mise au net*, sur laquelle il n'y a d'autre avis à donner que celui d'y disposer les étages dans leur ordre de superposition, les caves occupant dès lors le bas de la feuille et les greniers le haut; remarquant, cependant, que lorsque divers étages E_2 E_3 ne diffèrent l'un de l'autre que dans quelques-unes de leurs parties, ce qui est le cas pour beaucoup d'usines, on s'arrange (*fig.* 1, *planche* LXXXVII) pour ne figurer que ces parties sur la mise au net. Enfin l'on donne quelques teintes (Voy. DESSIN).

Si l'on croyait utile d'entrer dans des détails sur les assemblages des charpentes (*fig.* 3), sur les planchers (*fig.* 2). sur l'appareillage, on le ferait à l'aide de levés et de plans spéciaux qui rentrent dans les *levés de machines et appareils*, qui vont encore nous arrêter un instant (*).

73. LE LEVÉ DES MACHINES *et des appareils* ne se fait pas autrement que le levé des bâtiments. C'est toujours par des croquis ou brouillons qu'on procède, croquis faits à main levée, et qui dès lors représentent tant bien que mal *le plan*, *les coupes* et *l'élévation* de l'objet à représenter, et sur lesquels on inscrit, à mesure qu'on les relève, les cotes qui permettront de faire ensuite la *mise au net*, c'est-à-dire le dessin à l'échelle.

(*) Observons ici que la charpente (*fig.* 3) et le grenier (*fig.* 2) n'appartiennent pas au bâtiment de la *fig.* 1re.

De même que pour les bâtiments, on laisse d'abord de côté les petits détails auxquels on consacre plus tard des levés et des dessins spéciaux, dont l'échelle est ordinairement plus grande que celle de l'ensemble. Une sorte de *reconnaissance* générale doit encore précéder ici le levé qui exige, avant tout, que l'on comprenne clairement l'enchaînement des diverses pièces, leurs fonctions, leur jeu particulier, celui de la machine entière, en un mot le secret de sa vie.

74. Les *instruments* qu'on emploie sont aussi les mêmes à peu près que pour les levés de bâtiments. Ce sont des fils à plomb, de longues règles de bois bien droites et non flexibles, le niveau du maçon et des mesures métriques de diverses grandeurs, auxquelles il convient d'ajouter un compas d'épaisseur et une sauterelle.

75. Il convient encore ici, pour être à peu près certain de ne rien omettre, de ne prendre d'abord que les mesures horizontales, de ne passer aux mesures verticales qu'après avoir épuisé les premières, et de suivre enfin, pour les croquis, le même ordre que pour les levés de bâtiments, savoir : 1° *le plan*, 2° *l'élévation*, 3° *les coupes*. Cette manière de procéder est d'autant plus naturelle ici que les coupes exigeront souvent le démontage de la machine ou de quelques-unes de ses parties. — Les croquis se font d'ailleurs au crayon, mais il importe de les passer à l'encre avant la mise au net, si l'on tient à les conserver, ce qui est une bonne et utile précaution.

76. Lorsque la machine à lever (*planche* XVI) se prêtera par sa forme à l'emploi de la PERSPECTIVE ISOMÉTRIQUE, on se trouvera bien d'employer ce mode de projection, que je me félicite d'avoir le premier importé d'Angleterre et qui, en abrégeant le travail, rendra souvent avec plus de clarté l'ensemble de la machine ou de l'appareil. On n'a pas besoin de s'astreindre ici plus rigoureusement que dans les croquis ordinaires aux lois de ce mode de représentation; la seule attention à avoir est de disposer les cotes en les couchant le long des seules *lignes isométriques*, ou le long de *parallèles* à ces lignes, ainsi qu'on le voit dans le croquis isométrique d'une roue de grosse forge catalane (*planche* XVI). Quant à la mise au net de la machine, voyez *Dessin* (pag. 515).

77. LEVÉ DES MINES. Il n'est aucune espèce de levé où l'exactitude ait plus d'importance; aucune qui présente plus de difficultés, qui exige de l'ingénieur plus de temps, plus de soins, et qui lui impose plus de gêne, plus de malaise, et parfois de souffrances. Cependant, si l'on s'était donné pour conditions de choisir dans le vaste arsenal de la science les instruments et les méthodes les moins propres aux levés souterrains, d'employer ces instruments de manière à augmenter encore les effets de leurs imperfections originelles, de marcher lentement et toujours dans le vague, de ne recueillir enfin pour prix de longs et pénibles travaux que l'incertitude et le doute sur la

position d'un point ou sur une direction quelconque, on n'aurait rien trouvé de mieux que les instruments et les méthodes encore aujourd'hui en usage, savoir : *la boussole suspendue* pour obtenir les directions, *le demi-cercle suspendu* pour les pentes, et *la boussole enchâssée* pour rapporter sur le papier et accroître sur le plan les erreurs du levé. Il ne restait plus, pour augmenter la confusion, qu'à orienter la carte générale de la mine par rapport à ce plan horairement, quotidiennement et annuellement mobile pour chaque localité qu'on appelle le *méridien magnétique*, et l'on n'y manque jamais !

78. Je n'ai rien à dire ici de pareils instruments ni de telles méthodes, si ce n'est qu'ils doivent être absolument proscrits, et que les trop nombreux plans qu'ils ont fournis ne peuvent être considérés que comme des plans de *reconnaissance* bons à diriger les pas de l'ingénieur dans le dédale des puits et des galeries, mais ne méritant aucune foi en tant qu'il les prendrait pour guides dans ses travaux d'exploitation proprement dits.

79. Les levés souterrains, sauf les modifications qu'apportent l'obscurité, la sinuosité, le défaut de hauteur ou de largeur des galeries et l'eau qui descend de leur ciel, peuvent et doivent être tous exécutés par les méthodes rigoureuses et les instruments précis que l'on emploie au jour pour obtenir les plans et les RELIEFS *les plus exacts* (*). Ainsi, les positions des points principaux et les directions capitales de chaque étage de la mine devront être rigoureusement déterminées par leurs ordonnées, par rapport à trois plans rectangulaires fixes : l'un horizontal, les deux autres verticaux, se coupant tous trois en un point convenablement choisi. Malgré les recommandations contraires, il n'est nullement nécessaire, et il est souvent fort incommode que l'un de ces plans verticaux soit le méridien vrai du lieu, mais il est indispensable que ce plan que l'on peut prendre parallèle à la direction générale de la couche ait son *azimut*, par rapport au méridien *vrai*, parfaitement déterminé. Cette première opération exigera le tracé exact d'une MÉRIDIENNE à la superficie ; à l'intérieur, des levés tout à fait analogues à ceux qui nous ont occupé (1) ; des NIVELLEMENTS ; enfin le rapport sur le papier et à la plus grande échelle possible du résultat des données fournies par les opérations précédentes et par le calcul.

80. Quant aux signaux à l'intérieur, je ne conçois jusqu'ici rien

(*) Comment, dans un ouvrage spécial sur l'exploitation des mines, rédigé par un homme de talent, rencontre-t-on des assertions pareilles à celle-ci ? « Pour orienter d'une manière *certaine* des travaux qui ne communiquent « au jour que par des galeries sinueuses ou par des puits, il faut *absolument* « avoir recours à la *boussole*. »

de plus commode que des MIRES (p. 961), ne différant des mires ordinaires que en ce qu'elles sont plus courtes et que, à la place du *voyant*, elles portent une lanterne à réflecteur, glissant comme lui le long de la tige, éclairée d'ailleurs par une forte bougie poussée elle-même par un ressort à boudin, appareil dont les lanternes des voitures bourgeoises donneront, au reste, une très-juste idée. Ces mires à *voyant* lumineux et mobile, ne sont pas seulement très-propres à servir de signaux pour obtenir les *directions*, elles donnent en outre du même coup et de la même station les *cotes de niveau*. Il suffit pour cela d'employer concurremment avec deux de ces mires un niveau à bulle d'air et à lunette (p. 961), portant un limbe horizontal divisé, muni de son vernier et éclairé lui-même par un petit réflecteur projetant sa lumière sur le limbe. Avec ces conditions on obtient, comme au jour, et à la fois, les angles de direction à une minute près, réduits à l'horizon, et les *cotes de niveau* fort exactement.

81. Les mineurs verront que j'exclus ainsi les angles de pente que donne, à l'aide d'un second limbe, le *théodolite souterrain* du savant M. *Combes* (*); c'est que, en effet, ces inclinaisons ne sont qu'un des éléments à l'aide desquels on calcule (**) des cotes de niveau que l'on obtient ici directement et plus exactement. — C'est que les mires dispensent entièrement de prendre note des pentes M et D montantes et descendantes. — C'est qu'elles dispensent surtout de l'emploi des *trois* pieds *exactement pareils* qu'exige l'usage du théodolite souterrain et qui sont, dans toute mine, un attirail fort embarrassant.

82. Les points principaux et les directions capitales de la mine ainsi fixés, on pourra les relier par des levés de détails à l'aide des mêmes instruments, ou de tous autres que ces levés comportent, la boussole exceptée. Je me suis assez étendu sur les levés d'ensemble et de détail faits au jour pour n'avoir plus à montrer comment les mêmes méthodes peuvent maintenant recevoir ici leur application. On trouvera, au reste, aux mots *Nivellement* et *Relief du terrain*, le complément que ces méthodes pourraient exiger.

(*) *Traité de l'exploitation des mines*, par M. Ch. Combes, t. III, p. 719.

(**) De plus, c'est à tort que l'on recommande ici l'emploi des *logarithmes* qui alonge au lieu d'abréger les calculs de ce genre. La projection d'une ligne, celle d'une force dans la mécanique, s'obtient bien plus rapidement et toujours assez exactement en multiplant cette ligne par le cosinus *naturel* de son inclinaison avec trois, quatre décimales au plus. Mais le sentiment des besoins de la pratique qui, depuis un demi-siècle, manque à notre enseignement, manque aussi dans nos livres, et l'on en a vu disparaître les tables des lignes *naturelles* qu'il m'a fallu aller rechercher dans des publications antérieures à la Révolution française, pour pouvoir les reproduire pag. 892.

LEVIERS (*planche* LXXXIX). 1. Dans la pratique, le *levier* est un *outil* consistant en une barre rigide portant, par un de ses points, sur un appui fixe à l'aide duquel les manœuvres parviennent à déplacer de très-grands fardeaux de quantités très-petites par leurs seuls efforts musculaires ou par leur poids.

La théorie, de son côté, a distingué les leviers en trois genres, savoir : 1[er] genre, ceux P, A, Q, dans lesquels l'appui fixe A est placé entre la puissance motrice P et la résistance à vaincre Q; 2[e] genre, P, Q, A, dans lesquels la résistance Q agit entre la puissance et l'appui; 3[e] genre enfin, ou Q, P, A, dans lesquels la puissance agit entre la résistance et l'appui. — La BALANCE est donc un levier du premier genre; la rame et la brouette peuvent être considérées comme des leviers du second genre; la pédale du remouleur, celle du pianiste sont des leviers du troisième genre. Au reste, les conditions d'équilibre de cet organe sont, pour tous les genres et toutes les formes, comprises dans les lois suivantes :

2. *Conditions d'équilibre.* Pour l'équilibre du levier, droit ou angulaire, autour de son appui, quel que soit le nombre des forces qui lui sont appliquées, et abstraction faite d'abord de son poids propre, il est nécessaire, et il suffit : 1° que toutes ces forces agissent dans un plan perpendiculaire à l'arête d'appui; 2° que leurs moments par rapport à cette arête (pag. 702) forment une somme égale à zéro, en comptant comme positifs les moments qui tendraient à faire tourner le levier dans un sens, et comme négatifs ceux qui tendraient à le faire tourner en sens contraire.

La pression sur l'arête d'appui est exactement celle qui aurait lieu si toutes les forces actives du système étaient transportées sur cette arête parallèlement à elles-mêmes, sans changer ni de grandeur ni de sens.

Donc, il est encore nécessaire pour assurer la fixité de tout le système que la direction de cette résultante N de toutes les forces transportées forme, avec la normale à la surface sur laquelle repose l'arête d'appui, un angle plus petit que l'angle du FROTTEMENT de cette surface et de cette arête.

Lorsqu'il importe de tenir compte du poids propre du levier dans les problèmes d'équilibre *statique*, on introduit ce poids et son moment dans les équations, en le considérant comme une force verticale appliquée au centre de gravité du levier.

3. Pour le cas de deux forces P, Q, tendant à faire tourner un levier en sens contraire autour de l'arête d'appui, p q étant les perpendiculaires respectives menées de cette arête aux directions des forces, la condition d'équilibre, abstraction faite du poids du levier, serait donc

$$Pp = Qq$$

et l'on aurait pour la charge N sur l'appui

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. i}$$

i étant l'angle compris entre les directions des deux forces P, Q.

4. Si la direction de cette résultante N était telle qu'elle formât avec la normale, à la surface d'appui, un angle θ plus grand que l'angle φ du frottement entre cette surface et l'arête, la condition de l'égalité des moments assurerait bien encore l'équilibre entre les forces P, Q autour de cette arête, mais le système entier du levier serait entraîné sur le plan d'appui par une force

$$F = N (\sin. \theta - \text{tang.}\ \varphi \cos. \theta)$$

à moins qu'un obstacle capable d'une résistance (— F) ne s'opposât directement à ce mouvement d'ensemble.

5. L'équation d'équilibre statique $Pp = Qq$ aurait encore lieu, abstraction faite de la masse du levier, si celui-ci, au lieu d'être en repos, tournait autour de son arête d'appui supposée fixe. $d\alpha$ étant alors l'arc infiniment petit, décrit du rayon 1 dans l'instant dt autour de cette arête, on aurait, en multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par $d\alpha$

$$Ppd\alpha = Q\,qd\alpha$$

Or $pd\alpha$, $qd\alpha$ sont évidemment les chemins élémentaires que les points d'application des forces PQ décrivent respectivement dans les directions propres de ces forces; donc, dans le levier comme dans toutes les autres machines inventées ou même imaginables, le travail de la résistance n'est égal au travail de la puissance qu'à la condition de faire abstraction des frottements et des autres résistances passives.

6. Le frottement de l'arête vive d'un levier sur la surface d'appui est toujours négligeable; mais il n'en serait pas de même si le levier tournait autour d'un axe cylindrique ou tourillon. Ce cas assez compliqué, où l'axe de rotation ne se confond plus avec l'arête d'appui, ayant été longuement développé pag. 99 de l'article Axes, je n'y reviendrai pas ici.

7. *Deux leviers; balance de Roberval.* On attribue à *Roberval*(1670) l'invention d'un système de leviers, de forme variable, ayant *deux* appuis fixes et présentant par cela même un cas particulier d'équilibre que l'on appelait autrefois *paradoxal* (*fig.* 1, *planche* LXXXIX).

Ce système se réduit en principe à deux leviers AB, *ab*, égaux, parallèles, pouvant tourner librement autour de leurs milieux C, *c* situés sur une même verticale, et reliés entre eux par deux tiges B*b* A*a* égales et par conséquent parallèles, articulées avec les deux leviers en A, B, *a*, *b*. Ces deux tiges portent deux autres tiges ou barres de suspension KM, K'M' invariablement encastrées en

leurs milieux K, K′ et sur lesquelles on attache deux poids égaux $P = Q$.

La singularité apparente de la machine consiste en ce que, dans toutes les positions du parallélogramme articulé $ABab$, ces poids égaux se font toujours équilibre, quelque inégales que puissent être les distances KM, $K'M'$ de leurs points d'application respectifs aux encastrements K, K′.

8. La théorie des couples ou le mode de raisonnement du § 58 de l'article *Equilibre* (pag. 706), explique très-simplement cet effet. Appliquez en K deux forces opposées, chacune égale à P, et qui se faisant ainsi équilibre ne changeront rien à l'état de la machine. Vous aurez ainsi une force verticale P, qui tendra à faire descendre Bb, plus un moment ou couple $= P \times KM$ qui tendra à faire tourner cette tige. Tournez le couple dans son plan jusqu'à ce que son bras coïncide avec mn plus courte distance des leviers AB, ab dans la position qu'ils occupent. Changez ce dernier couple en un couple équivalent $P' \times mn = P \times KM$ d'où $P' = \frac{P \times KM}{mn}$. Opérez d'une manière analogue pour la force Q; ce qui donnera une force verticale Q appliquée en K′ et un couple $Q' \times mn = Q \times M'K'$ agissant en sens contraire du précédent. Ces deux couples tireront le point fixe C dans le sens et la direction CB avec un effort

$$= P' - Q' = \frac{P \times KM - Q \times M'K'}{mn}$$

et le point fixe c avec un effort égal parallèle, mais dirigé en sens contraire, de sorte que, au fond, tout le système se résume, savoir : 1° en un couple $P \times KM - Q \times K'M'$ appliqué à la droite Cc qui joint les points fixes et tend ainsi à renverser toute la machine vers le côté droit; 2° en deux forces verticales égales $P = Q$ qui, agissant sur des bras de levier égaux, se font naturellement équilibre, et pressent sur les appuis fixes Cc avec un effort $(P + Q) =$ leur somme.

9. On remarque que l'équilibre aurait encore lieu quand bien même les points d'encastrement K, K′ seraient placés en des points quelconques de Aa et de Bb, et enfin que, quelque mouvement qu'on imprime au parallélogramme articulé, le travail de P est non-seulement égal mais identique à celui de Q, les efforts et les chemins parcourus étant respectivement les mêmes de part et d'autre.

10. Cette remarque a échappé à l'auteur d'un projet de *mouvement perpétuel* déposé au Conservatoire des arts et métiers, et dont la *figure* 3, *planche* LXXXIX indique le faux principe. Une chaîne sans fin passant sur deux poulies mobiles autour de leurs axes fixes

porte de petites masses que la rotation éloigne de la chaîne, lorsqu'elles passent à droite et rapproche de cette chaîne, lorsqu'elles montent à gauche. Les moments de droite par rapport à la chaîne étant plus grands que les moments de gauche, de même que dans les balances des *figures* 1 et 2, l'auteur a espéré obtenir ainsi un mouvement de rotation perpétuelle. — Cette rotation n'ayant pas eu lieu, il a sagement et naïvement pris le parti de fixer à la poulie supérieure une manivelle qu'on tourne à la main.

11. On voit (*fig.* 2, *planche* LXXXIX) une autre application, utile cette fois, du système de leviers de Roberval. C'est une balance à suspension inférieure aux plateaux, d'un emploi assez répandu parmi les petits débitants. Ces plateaux toujours horizontaux, restent en équilibre lorsqu'ils sont chargés de poids égaux $P = Q$, à quelque distance des tiges verticales de support A *a* B*b* que soient placés ces poids égaux.

12. *Théorie des quatre leviers* (*fig.* 4, *planche* LXXXIX). Je ne crois pas pouvoir me dispenser de résumer ici cette théorie qui a longtemps servi et sert peut-être encore de base dans les questions de stabilité des VOUTES, bien que je n'en aie fait aucun usage dans ce livre.

Des expériences faites avec beaucoup de soin par M. *Boistard* (*) et dont on a tiré des conclusions peut-être trop absolues, semblent avoir montré :

1° Que la rupture des voûtes en berceau se fait *toujours* par des mouvements de rotation autour des arêtes b, d, a, d', b' des parties rompues et *jamais* par un glissement sur les joints ;

2° Que, dans un état infiniment voisin de l'équilibre, la voûte ne se rompt en général qu'en cinq points, savoir : à la clef, en deux points intermédiaires entre la clef et les naissances, aux deux joints des naissances s'il n'y a pas de pieds-droits, ou aux bases de ces pieds-droits s'ils existent ;

3° Si l'effort de la partie supérieure l'emporte sur celui des parties inférieures, le joint de la clef et les joints des naissances s'ouvrent à l'intrados, tandis que les joints intermédiaires s'ouvrent à l'extrados, et la partie supérieure descend ; c'est le cas représenté dans la figure. Lorsqu'au contraire les parties inférieures l'emportent sur la partie supérieure, l'ouverture des joints se fait, pour tous, en sens contraire, et la partie supérieure se soulève.

13. On a été ainsi conduit à considérer les quatre parties dans lesquelles la voûte se rompt dans les deux cas, comme quatre leviers articulés bout à bout bd, da, ad', $d'b'$ chargés chacun du poids de la partie de voûte qui lui correspond ; ces poids agissant aux

(*) 2e cahier des Mémoires extraits de la bibliothèque des Ponts et Chaussées.

points O, I, O', I', où les leviers sont coupés par les verticales gP, GQ qui tombent des centres de gravité gG des voussoirs. Les points bb' sont d'ailleurs supposés fixes.

Q, P étant les poids respectifs des voussoirs inférieur et supérieur, φ, φ', x, x', y, y' les quantités que la figure indique suffisamment, on obtiendra comme suit les relations qui doivent exister entre les forces du système pour qu'il reste en équilibre.

14. Considérons d'abord isolément le levier bd; la charge Q qu'il supporte peut être décomposée en deux autres charges verticales, savoir :

$$\text{charge en } b = Q\frac{(x'-\varphi')}{x'};\quad \text{charge en } d = Q\frac{\varphi'}{x'}$$

la charge P en I du levier da donnerait de même

$$\text{charge en } a = P\frac{\varphi}{x};\quad \text{charge en } d = \frac{P(x-\varphi)}{x}$$

le point a supporte d'ailleurs une autre charge verticale $\frac{P\varphi}{x}$ de la part du levier ad', de sorte que l'on a

$$\text{charge verticale totale en } a = \frac{2P\varphi}{x}$$

décomposant cette charge verticale suivant les directions ad, ad', elle donnera des composantes égales, soit l'une suivant ad

$$= \frac{P\varphi\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$$

Cette dernière peut être censée appliquée en d, où elle donnerait :

1° Une composante verticale $\frac{P\varphi}{x}$ qui tire le point d suivant dT;

2° Une composante horizontale $\frac{P\varphi}{y}$ qui pousse le point d suivant dV;

Ce point d se trouve ainsi sollicité par trois forces verticales

$$\frac{Q\varphi'}{x'} + \frac{P(x-\varphi)}{x} + \frac{P\varphi}{x} = \frac{Q\varphi'}{x'} + P$$

qui tendent à le faire tourner en dedans, et par la force horizontale $\frac{P\varphi}{y}$ qui tend à le renverser en dehors.

Le moment des premières est

$$\left(\frac{Q\varphi'}{x'} + P\right)x' = Q\varphi' + Px'$$

celui de la force horizontale est $\left(\frac{P\varphi}{y}\right) y'$

donc, le point *b* étant supposé fixe, l'équilibre exige que ces moments soient égaux ou

$$Q\varphi' + P\left(x' - \frac{\varphi y'}{y}\right) = 0$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{Q\varphi' + Px'}{P\varphi}$$

Désignant par α et β les angles d'inclinaison *db* C, *adl* au-dessus de l'horizontale des leviers inférieurs et supérieurs, l'équation ci-dessus prendrait la forme

$$\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\beta} = \frac{(Q\varphi' + Px')\,x}{P\varphi \quad x'}$$

15. Si les leviers de section uniforme avaient chacun leur centre de gravité situé au milieu de leur longueur, il viendrait

$$\varphi = \frac{x}{2}\,; \quad \varphi' = \frac{x'}{2}$$

$$\frac{\text{tang.}\alpha}{\text{tang.}\beta} = 2 + \frac{Q}{P}$$

de sorte que, si les quatre leviers étaient en tout égaux, on aurait simplement pour la condition de l'équilibre

$$\text{tang.}\,\alpha = 3\ \text{tang.}\,\beta$$

Ainsi les points *bb'* étant fixes, le système des leviers égaux serait en équilibre, si la tangente de l'angle α était égale à trois fois la tangente de l'angle β.

16. Le tracé suivant satisfait à cette condition. Soient (*fig.* 5) B B' les points fixes et A le sommet, points dont la position est donnée. Faites passer une circonférence par ces trois points. Elevez sur le milieu de la corde la perpendiculaire HA ; — par E, milieu de HB, élevez la perpendiculaire EF ; — tirez BF ; — portez de A vers G une corde AG = BF qui coupera la première en C. — BC, CA sont les leviers cherchés, situés dans la position demandée, car B'F étant parallèle à AG', on a

$$FE = BE\ \text{tang.}\,FBE = B'E\ \text{tang.}\,FB'E \quad \text{et}$$

$$\frac{\text{tang.}\,FBE}{\text{tang.}\,FB'E} = \frac{B'E}{BE} = \frac{3}{1}$$

Je crois que les charpentiers emploient un tracé de *mansarde* à peu près semblable.

LIBAGE. Pierre noyée dans l'épaisseur d'un mur, et qui, n'étant pas visible, n'a pas besoin de parement. On appelle surtout *libages* les gros moellons qu'on emploie aux fondations.

LIGNE *de partage des eaux.* C'est la crête même des BASSINS; elle est ainsi nommée parce que les eaux qui tombent ou jaillissent sur cette ligne s'y divisent et roulent sur les pentes des bassins opposés. Il est facile de tracer sur une carte, du moins par approximation, les lignes de partage ou les crêtes des bassins; il suffit pour cela de faire passer le crayon entre toutes les sources ou naissances des cours d'eaux *naturels*, sans les couper jamais.

LIGNE *de plus grande pente.* La ligne de plus grande pente est celle dont un élément quelconque a une pente plus forte que l'élément correspondant de toute autre ligne qui aurait un point commun avec le premier élément. Lorsqu'un plan est incliné à l'horizon, les lignes de plus grande pente sont des droites perpendiculaires à toutes les horizontales menées dans ce plan.

La ligne de plus grande pente *n'est point*, en général, la trajectoire d'un point matériel qui serait mu sur une surface courbe par la seule action de la pesanteur. Un tel point ne s'y trouverait qu'au premier instant de sa chute, à moins qu'elle ne satisfasse à certaines conditions.

LIGNE DE RÉSISTANCE ; LIGNES DE PRESSION : 1. Expressions par lesquelles M. H. *Moseley* a désigné deux lignes importantes sur la seule considération desquelles il a fondé une théorie très-générale de la stabilité des constructions, que nous avons résumée toute entière, et dont le présent article est une simple introduction (*).

2. Une construction, quelle qu'en soit la nature : mur, voûte, revêtement, etc., dont les matériaux sont d'abord supposés capables de résister partout à l'écrasement, conservera évidemment sa stabilité sous les charges habituelles auxquelles elle est soumise, savoir : 1° si aucune de ses parties ne peut glisser sur aucun de ses lits ou joints; 2° si aucune de ses parties ne peut tourner autour d'aucune arête.

Lors donc que l'application des forces agissant sur la construction, lorsque la forme de celle-ci aura été réglée de telle sorte que ce glissement et cette rotation auront été à la fois rendus partout impossibles, la construction sera stable.

3. *Ligne de résistance.* Soit (*fig.* 6, *planche* LXXXIX) M N L K une construction quelconque ou plutôt un amas de pierres empi-

---

(*) *Mechanical principles of engineering*, par H. *Moseley*, membre correspondant de l'Institut, de la Société royale de Londres, etc.

lées et sans ciment, de formes et dimensions quelconques, et soumises d'ailleurs à des efforts dirigés comme on voudra, pourvu qu'ils soient connus tant en direction qu'en intensité. Concevons cette masse coupée par un plan quelconque (1, 2) et déterminons la résultante *a* A de tous les efforts qui agissent sur la partie M N 1 2. Ou cette résultante *a* A coupera le joint (1, 2) *en dedans* de la construction, en *a* par exemple; ou, au contraire, elle en coupera le prolongement *en dehors* de ses limites, soit en *a'*, soit en *a''*. Dans le premier cas, la masse M N 1 2 n'éprouvera évidemment aucune rotation. Dans le second cas, elle tournera infailliblement autour de l'arête 2 ou autour de l'arête 1, suivant que le prolongement du joint (1, 2) sera coupé par la résultante en *a'* vers l'intrados, ou en *a''* vers l'extrados, quelle que soit d'ailleurs la direction de celle-ci.

Cela posé, transportons le plan sécant, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le joint suivant (3, 4). Cherchons la résultante de *a* A et de toutes les autres forces qui agissent sur la masse (1, 2, 3, 4). Soit *b* B la direction de cette seconde résultante et *b* le point où elle coupe le joint (3, 4) ou son prolongement extérieur. De même que ci-dessus, la masse supérieure M N 3 4 tournera si le point d'intersection *b* de *b* B, coupe le prolongement du joint (3, 4) *en dehors* de la construction; au contraire, elle ne tournera pas si, comme dans la figure, l'intersection *b* a lieu *en dedans*.

Continuant ainsi à transporter le plan sécant de joint en joint;— Combinant la dernière résultante obtenue (*f* F, je suppose) avec celle de toutes les autres forces qui agissent sur la masse immédiatement inférieure (11, 12, 13, 14), on obtiendra toute la série des intersections *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* des résultantes successives avec les joints correspondants. C'est précisément cette série de points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* que M. Moseley appelle *ligne de résistance*, et que je proposerai d'appeler *ligne* ou *courbe des points d'application*.

4. Cette ligne ainsi définie et que le calcul permet d'ailleurs de déterminer complétement, on voit clairement que :

La stabilité d'une construction quelconque est assurée, quant à la rotation, lorsque la courbe des points d'application coupe tous les joints en dedans *de la masse, sans en éviter aucun.*

Au contraire, la construction serait infailliblement renversée, si la courbe des points d'application sortait du massif, — et le renversement aurait lieu par rotation sur l'arête du joint dont le prolongement extérieur serait coupé par cette courbe.

5. *Ligne de pression.* Mais il ne suffit pas pour la stabilité que la courbe des points d'application coupe intérieurement tous les joints de la construction, il faut en outre que aucune partie de la masse ne puisse glisser. Or, il est évident que cette deuxième condition sera satisfaite si les *directions a* A, *b* B, *c* C . . . *g G* des ré-

sultantes successives par rapport à chaque joint ou lit correspondant (1, 2) (3, 4) (5, 6) . . . (13, 14) sont telles que chacune soit comprise en dedans du *cône de résistance* (page 378); en d'autres termes, le glissement sur un lit sera certain ou impossible, suivant que la direction de la résultante correspondante formera, à son point d'application, avec la normale au lit en ce point un angle plus grand ou plus petit que l'angle du frottement.

6. *Les directions* des résultantes consécutives au point de vue théorique ne sont donc pas moins importantes à considérer que la série de leurs points d'application. Or, imaginez ces directions prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent consécutivement deux à deux, il résultera de ces intersections successives une sorte de développée des directions A B C D E F G qui est précisément ce que M. *Moseley* appelle *ligne de pression* et que je proposerai d'appeler *courbe des directions*.

7. La ligne de pression ou la courbe des directions étant déterminable pour tous les cas de la pratique, par l'analyse ou la géométrie, peut être regardée comme connue; et dès lors, pour s'assurer que aucun glissement ne peut naître sur aucun lit, il suffira pour chaque lit (7, 8 par exemple) de mener une tangente *d* D du point d'application *d* à la courbe des directions et de vérifier si cette tangente forme avec la normale au lit un angle plus petit que celui du frottement. S'il en est ainsi pour chacun des lits, le glissement est impossible ; il est infaillible, au contraire, au lit même pour lequel l'angle en question serait plus grand que celui du frottement.

8. La condition générale de la stabilité d'une construction quelconque peut donc désormais se résumer ainsi :

1° *La courbe des points d'application doit couper tous les joints à l'intérieur de la masse, sans en éviter aucun;*

2° *Les tangentes menées des points d'application à la courbe des directions, doivent chacune former avec la normale au lit un angle plus petit que l'angle du frottement.*

9. La considération des courbes qui viennent de nous occuper n'offre pas seulement l'avantage de fixer clairement et simplement les conditions de la stabilité d'une construction quelconque; elle éclaire en outre sur ce *degré* de stabilité en indiquant tous les points faibles qui sont évidemment les parties du périmètre dont la courbe des points d'application s'approchera le plus, et les lits pour lesquels la tangente à la courbe des directions sera la plus voisine des limites du cône de résistance. Cette plus courte distance de la courbe des points d'application au périmètre du profil, prendra le nom de *module de stabilité;* il est désigné par *m* dans toutes les applications que nous avons faites de cette ingénieuse et impor-

tante théorie dont la priorité appartient sans contestation possible à M. Henry Moseley (*) (Voyez *Murs*, *Revêtements*, *Poussée des terres*, *Voûtes*).

LOGARITHMES. 1. Napier, né en Ecosse en 1550, mort en 1616, est l'inventeur des *logarithmes*; ces nombres artificiels, que l'on substitue aux nombres véritables, simplifient et facilitent souvent les calculs à faire sur ceux-ci.

On peut concevoir une infinité de systèmes de logarithmes, mais deux surtout sont en usage, savoir : 1° *Les logarithmes vulgaires*, connus aussi sous le nom de *logarithmes de Briggs*, parce que ce savant en publia la première table (Londres, 1618); 2° Ceux dits *napiériens*, *hyperboliques* ou *naturels* (année 1614).

2. Dans le système vulgaire (celui des tables de *Callet*, de *Borda*, de *Lalande*, de *Plauzolles*, etc.), le logarithme d'un nombre est l'EXPOSANT de la puissance à laquelle il faut élever *dix* pour obtenir ce nombre.

Dix est alors ce qu'on nomme la *base* des logarithmes vulgaires.

Ainsi : le logarithme de 100 est 2, puisque l'on a

$$10^2 = 100$$

de même

log. de $1 = 0$ à cause de $10^0 = 1$

log. de $2 = 0.3013$. . . . . $10^{0.3013} = 2$

log. de $3 = 0.4771212$. . . . . $10^{0.4771212} = 3$

et en général, on a dans le système vulgaire

log. de $y = x$ si. . . . . $10^x = y$

(*) C'est à tort qu'un document officiel, le *Rapport sur l'enseignement de l'École polytechnique*, 1850, partage la priorité de cette théorie entre M. Henry *Moseley* et M. l'ingénieur des ponts et chaussées E. *Mery*. — Le seul Mémoire de cet ingénieur qui ait pu fournir un prétexte à l'injuste association de noms que l'on remarque à la pag. 334 de ce document, n'a paru qu'en 1840, dans les *Annales des ponts et chaussées*; bien que signé à *Dieppe, à la date du 27 février* 1839, il est postérieur de *six années* au *premier* Mémoire de M. *Moseley*, qui date d'octobre 1833. — Il est encore postérieur au *second* Mémoire du même savant sur le même sujet, qui date de mai 1837, Mémoires publiés l'un et l'autre dans les volumes 5 et 6 des *Transactions philosophiques de Cambridge*. — Il est postérieur enfin à l'ouvrage élémentaire que M. *Moseley* a publié entre ces deux dates, sous le titre de *Mechanics applied to the arts*, et dans lequel il avait résumé son premier travail.

La question de priorité étant formellement résolue par les dates qui précèdent, je me hâte d'ajouter que la lecture du Mémoire de M. *Méry* prouverait, s'il en était besoin, qu'il n'a rien emprunté à son devancier, et qu'il ne mérite, de la part des amis des sciences, que le reproche d'être arrivé six ans trop tard.

et dans un système quelconque dont la base serait a au lieu de 10

log. de $y = x$ si. . . . . $a^x = y$

. 3. En général, le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base du système pour reproduire ce nombre, et pourvu que la base a ne soit pas *un*, il existe toujours un nombre x capable de satisfaire à l'équation fondamentale

$$a^x = y$$

quel que soit y.

4. L'emploi des logarithmes, quelle que soit leur base a, permet de ramener la multiplication à l'addition, la division à la soustraction, l'élévation aux puissances à une simple multiplication, l'extraction des racines à la division. En effet

si $a^x = y$, x est le logarithme de y,

et si $a^{x'} = y'$, x' est le logarithme de y';

ces deux équations donnent, en les multipliant entre elles,

$$a^x\, a^{x'} = a^{x+x'} = yy'$$

et par conséquent $x + x' =$ log. de yy'

quelle que soit la base a du système ; donc *le logarithme* $(x + x')$ *d'un produit* yy' = *la somme des logarithmes des facteurs*. Donc aussi la multiplication se ramène à l'addition.

Exemple : Pour multiplier 48 par 166, j'ajoute les logarithmes vulgaires des deux facteurs ou 1.6812412 + 2.2201081 dont la somme = 3.9013493. C'est le logarithme du produit. On voit qu'il correspond dans les tables à 7968.000.

5. On n'indique dans les tables ordinaires que la partie fractionnaire des logarithmes, celle placée ici à la droite du point; la partie *entière* qu'on nomme la *caractéristique* a toujours autant d'unités qu'il y a de chiffres *moins un* dans la partie entière du nombre donné — réciproquement la caractéristique d'un logarithme donné étant *augmentée de un*, sera le nombre de chiffres que devra avoir la partie entière du nombre auquel il correspond.

Ainsi 48 et 166 ont respectivement 1 et 2 pour leurs caractéristiques et la caractéristique 3 du logarithme de leur produit indique que ce produit doit avoir 3 + 1 chiffres avant le point.

Ceci est fondé sur ce que, dans le système des tables, tous les nombres compris entre 0 et 9 ou d'un chiffre ont 0 pour caractéristique, tous ceux compris entre 10 et 99 ou ceux de deux chiffres ont 1, tous ceux de trois chiffres ou compris entre 100 et 999 ont pour caractéristique 2, et ainsi de suite.

Réciproquement un logarithme dont la caractéristique est 5, cor-

respond nécessairement à un nombre qui a six chiffres à sa partie entière, ou qui tombe entre 100000 et 999999.

6. *Division par logarithmes.* On tirerait par la division des équations fondamentales (4) la relation

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'} = \frac{y}{y'} \quad \text{d'où log. de } \frac{y}{y'} = x - x'$$

donc *le logarithme d'un quotient = le logarithme du dividende — le logarithme du diviseur.*

De sorte que pour diviser 7336 par 56, il suffirait de retrancher

du log. de 7336 . . . . 3.8654593
celui de 56. . . . . 1.7481880

Le logarithme du quotient serait ainsi. 2.1172713
Il correspond dans les tables au nombre 131

donc $$\frac{7336}{56} = 131$$

7. *Elévation aux puissances.* De la relation $a^x = y$, on déduit

$$(a^x)^m = y^m \quad \text{ou} \quad a^{xm} = y^m \quad \text{d'où} \quad mx = \text{log. de } y^m$$

Ainsi *le logarithme de la* $m^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre* y = m *fois le logarithme* x *de ce nombre.*

Pour élever 8 à la 4ème puissance, il suffit donc de multiplier son logarithme 0.90309 par 4, ce qui donnera 3.61236 que l'on trouve dans les tables correspondre à 4096, quatrième puissance de 8. Si l'on eût demandé la 64ème puissance de 2, on eût trouvé

$$\text{log. } 2^{64} = 64 \text{ log. } 2 = 64 \times 0.30103 = 19.26592$$

nombre qui correspond dans les tables ordinaires à

18 446 000 000 000 000 000

En faisant le calcul direct, on emploierait un temps considérable et l'on obtiendrait

18 446 744 073 709 551 616.

8. *Extraction des racines.* L'équation fondamentale

$$a^x = y \quad \text{donne encore} \quad \sqrt[n]{a^x} = \sqrt[n]{y}$$

ou $$a^{\frac{x}{n}} = y^{\frac{1}{n}}$$

donc *le logarithme de la racine* $n^{\text{ème}}$ *d'un nombre* y, *est la* $n^{\text{ème}}$ *partie du logarithme* x *de ce nombre,* et pour extraire la racine $n^{\text{ème}}$ de y, il suffira de diviser par n le logarithme x de ce nombre, et de chercher dans la table à quel nombre ce quotient correspond.

Ainsi pour extraire la racine cubique ou troisième de 6859, je divise par 3 son logarithme 3.83626. Le quotient 1.27875 correspond à 19 qui est la racine cherchée.

9. ***Résumé et exemples :***

log. de mn ou $\log. mn = \log. m + \log. n$

$\log. mnp\ldots = \log. m + \log. n + \log. p \ldots$

$\log. \frac{m}{n} = \log. m - \log. n = -(\log. n - \log. m)$

$\log. \frac{mnp}{qr} = \log. mnp - \log. qr = \log. m + \log. n + \log. p - \log. q - \log. r$

$\log. m^z = z \log. m$

$\log. m^z b^y q^t = z \log. m + y \log. b + t \log. q$

$\log. m^{-z} = -z \log. m$

$\log. m^{\frac{z}{t}} = \frac{z}{t} \log. m$

$\log. m^{-\frac{z}{t}} = -\frac{z}{t} \log. m$

$\log. \frac{bx^n}{r^z} = \log. b + n \log. x - z \log. r$

$\log. \frac{ab+bc}{m+n} = \log. b + \log. (a+c) - \log. (m+n)$

$\log. \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \log. (x^2+y^2)$

$\log. \frac{a+x}{a-x} = \log. (a+x) - \log. (a-x)$

$\log. (a^2-x^2) = \log. (a+x) + \log. (a-x)$

$\log. \sqrt{a^2-x^2} = \log. (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log. (a+x) + \frac{1}{2} \log. (a-x)$

$\log. z^3 + \frac{3}{4} \log. z = \frac{15}{4} \log. z = \log. z^{\frac{15}{4}} = \log. \left(z^3 \sqrt[4]{z^3}\right)$

$\log. \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n} \log. (a-x) + \frac{m}{n} \log. (a^2+x^2+ax)$

$\log. \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2} \log. (a-x) - \frac{3}{2} \log. (a+x)$

$\log. 3a^2 + \log. a^4 + 5 \log. 3 = \log. (3a)^6$

$\log. (-x) = \log. (-1) + \log. x$

10. *Caractéristique négative.* On rencontre souvent dans les livres de science des logarithmes comme celui-ci $\bar{1}.39794$ dont la caractéristique seule est négative; ce sont évidemment des logarithmes de fractions et en se reportant à ce que l'on a dit des caractéristiques (5), on voit en effet que le logarithme ci-dessus doit appartenir à un nombre dont la partie placée à la gauche du point a $(-1+1)$ chiffres significatifs. C'est celui de 0.25.

11. Il y a, en effet, deux manières d'exprimer le logarithme d'une fraction. $\frac{2}{3}$ par exemple, donne également

$$\log.\frac{2}{3} = \log.2 - \log.3 \quad \text{ou bien} \quad (10 + \log.2 - \log.3) - 10$$

$$\begin{array}{lrlr} + \log.2 = & 0.3010300 & \text{ou ajoutant } 10 & 10.3010300 \\ - \log.3\ldots & 0.4771213 & & 0.4771213 \\ \hline \log.\frac{2}{3} = & 1.8239087 & = & 9.8239087 - 10 \end{array}$$

La première expression plus conforme à l'esprit du calcul est moins employée que la seconde, et il arrive même, le plus souvent, qu'on laisse au lecteur le soin de soustraire la dizaine qui termine celle-ci. Ainsi, cent ouvrages donnent, entre autres, pour le logarithme de la longueur du pendule qui bat la seconde à Paris, le chiffre 9.9973159, il est bon d'être averti que l'on doit retrancher 10 de sa caractéristique, ce qui ramènerait ce logarithme à la première forme $\bar{1}.9973159$, et indiquerait immédiatement qu'il appartient à une fraction qu'on trouve du reste être 0.9938387; la seconde expression èst peut-être plus commode, lorsqu'on a à multiplier ou à diviser le logarithme obtenu, parce qu'on est débarrassé de la considération des quantités négatives, la multiplication et la division par (-10) s'opérant comme d'elles-mêmes. Toutefois, l'emploi des caractéristiques négatives est généralement moins sujet à erreur, et l'on s'y fait bientôt. Soit demandé, par exemple, $\log.\frac{21}{27}$ on trouve $\bar{1}.8908555$. S'il fallait carrer $\frac{21}{27}$, on aurait à multiplier son logarithme par 2, ce qui donnerait $\bar{1}.7817110$ c'est le logarithme de

$$\left(\frac{21}{27}\right)^2 = 0.604938.$$

Si au contraire on devait extraire la racine 5ème de $\frac{21}{27}$, il faudrait diviser par 5 le logarithme $\bar{1}.8908555$ de la fraction. Le moyen le plus simple de rendre cette division facile, est d'ajouter $(-5+5)$ à la caractéristique du logarithme qui prendra ainsi la forme

$-5+4.8908555$, et divisant alors par 5. on a $-1+0.9781711$ ou $\bar{1}.9781711$ qui répond à 0.95098 racine cinquième de $\frac{21}{27}$.

La seconde méthode, au reste, n'a aucun inconvénient, pourvu que l'on n'oublie pas de retrancher 10 du logarithme définitif autant de fois qu'il a été introduit dans le calcul pour faciliter les soustractions.

12. *Compléments arithmétiques.* On emploie souvent encore pour opérer la *soustraction* d'un logarithme d'un autre la méthode des *compléments*, qui change cette soustraction en une addition. Ce procédé est fondé sur ce que M et N étant deux logarithmes ou même deux nombres quelconques et N devant être retranché de M, on a évidemment

$$M-N=M+(10-N)-10$$

$(10-N)$ est le complément de N. Donc, si au nombre M on ajoute le complément de N, et si du résultat on ôte 10, on aura $M-N$.

En général, il faut retrancher du logarithme final autant de fois dix que l'on a ajouté de compléments pour l'obtenir ; et pour avoir le complément d'un nombre, il suffit de retrancher son dernier chiffre de 10, et tous les autres de 9. Ainsi complément de $9.9570956=0.0429044$, et si l'on avait à retrancher 9.9570956 de 9.8456618, on écrirait. 9.8456618
0.0429044

et l'on aurait. . . . . $\bar{1}.8885662$

On opèrerait de même dans tous les cas semblables.

13. On démontre que :

Dans le système vulgaire dont la base est dix, si deux nombres sont décuples l'un de l'autre, leurs logarithmes ont mêmes parties décimales.

14. La différence entre les logarithmes de deux nombres consécutifs est d'autant plus petite que ces nombres sont plus grands. Il en résulte que, bien que les logarithmes ne soient pas proportionnels aux nombres, on peut, sans erreur sensible, supposer cette proportionnalité pour de grands nombres et dans une petite étendue ; ce qui autorise l'emploi des *parties proportionnelles* des tables.

15. Dans tout système de logarithmes, celui de la base a est *un*. En effet, l'équation fondamentale $a^x=y$ peut être écrite $a^{\log . y}=y$, puisque $x=\log . y$. Or si on y suppose $y=a$, il vient $a^{\log . a}=a$, équation qui ne peut avoir lieu qu'à la condition $\log . a=1$.

16. Dans tout système de logarithmes, le logarithme de *un* est zéro ; car l'équation ci-dessus pour le cas de $y=1$ devient $a^{\log . 1}=1$, et elle ne peut être satisfaite qu'à la condition $\log . 1=0$, ou $a^0=1$.

17. Une série de nombres en progression par quotient étant donnée, leurs logarithmes forment une progression par différence

18. Soit z le logarithme d'un nombre n dans le système dont la base est e, on a $e^z = n$; on demande le logarithme x de ce même nombre n dans le système dont la base est a, et pour lequel on a dès lors $a^x = n$. Désignant les logarithmes du premier système par log. hyp., et ceux du second par log., il vient

$$n = a^x = e^z; \quad x \log.a = z \log.e; \quad x = z\,\frac{\log.e}{\log.a}$$

$$x = \log.n = \log.\,\text{hyp}.\,n \times \frac{\log.e}{\log.a}$$

$$\log.\,\text{hyp}.\,n = \log.n \times \frac{\log.a}{\log.e}$$

19. Les logarithmes *népériens, naturels* ou *hyperboliques* (log. hyp.) ayant été calculés dans un système dont la base

$$e = 2.718281828459\ldots$$

et le logarithme de ce nombre e dans le système dont la base $a = 10$ étant

$$\log.e = 0.4342944819$$

on a, en remarquant que log. a = log. base = 1 les relations numériques suivantes qui permettent de passer du logarithme hyperbolique d'un nombre n à son logarithme vulgaire (log.) et réciproquement

$$\log.\,\text{hyp}.\,n = 2.30258092994 \times \log.n = \frac{\log.n}{m}$$

$$\log.n = 0.4342944819\ldots \times \log.\,\text{hyp}.\,n = m \log.\,\text{hyp}.\,n$$

Comme on compare tous les systèmes de logarithmes au système népérien ou hyperbolique, on a appelé le facteur constant ci-dessus $0.43429\ldots = \log.e = \log.\,2.71828\ldots = \dfrac{1}{\log.\,\text{hyp}.\,10} = m$ le *module* des tables ordinaires. — Le *module* des logarithmes hyperboliques, dont la base est e, est *un*; et en général b étant la base d'un système, son *module* $m = \dfrac{1}{\log.\,\text{hyp}.\,b}$. Quelques auteurs, *Borda* entre autres, désignent au contraire, sous le nom de *module* d'un système, le logarithme hyperbolique de sa base; nous ne nous conformerons pas à cette dernière définition qui paraît abandonnée. Les équations précédentes montrent encore que le rapport des logarithmes d'un même nombre pris dans les deux systèmes, est une quantité constante = le rapport des modules. Cette propriété est générale et s'applique à deux systèmes différents quelconques.

20. Je ne saurais, dans un livre destiné aux applications, m'arrêter sur les méthodes qui ont fourni les tables de logarithmes en usage, je me bornerai à ce sujet à reproduire les séries suivantes.

La première est due à *Mercator* (année 1688), *Newton* l'avait trouvée de son côté; on pourra consulter au reste l'*Introduction d'Euler à l'analyse de l'infini*.

m étant le module, u un nombre quelconque, on a :

$$\log.(1+u) = m\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \ldots\right\}$$

$$\log.(1-u) = m\left\{-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} - \ldots\right\}$$

retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$\log.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2m\left\{\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right\}$$

faisant $\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{z}{n}$ ce qui donne $u = \frac{z}{2n+z}$, il vient

$$\log.(n+z) = \log.n + 2m\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right\}$$

série qui fait connaître le logarithme de $n+z$, lorsque l'on connaît celui de n.

Si l'on y suppose $n=1$; $z=1$; $m=1$, on trouve à cause de $\log.1=0$

$$\log.\text{hyp}.2 = 0.693147181 \text{ et par suite } \log.2 = 0.301029996$$

LOGARITHMIQUE (*fig.* 7, *planche* LXXXIX). 1. Courbe dans laquelle les y sont les logarithmes des x, et dont l'équation est par conséquent

$$y = \log.x \qquad \text{ou} \qquad a^y = x\ldots\ldots\ (1)$$

a étant la base du système, et dès lors $\log.a = 1$.

2. *Construction par points*. Divisez l'axe des x en parties égales, qui représenteront les nombres 1, 2, 3. . . . . 10. — Prenez les logarithmes correspondants dans les tables pour les porter sur les ordonnées. Faites passer une courbe par les extrémités des ordonnées comme dans la *figure* 7 qui représente la *logarithmique vulgaire*, base $= a = 10$.

3. On voit que la logarithmique rencontre l'axe des x au point pour lequel $x=1$, que sa branche 1 L est infinie, et que celle 1 z a pour asymptote la partie négative A — Y de l'axe des ordonnées, de sorte que la courbe ne passe jamais à la gauche de cet axe.

4. On appelle également *logarithmique* la courbe (*fig*. 8, même

planche) dont les x sont les logarithmes des y, et dont l'équation devient alors

$$x = \log . y \qquad \text{ou} \qquad a^x = y. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

De même que la première, sa branche 1 L est infinie, mais c'est l'axe des x qui devient ici l'asymptote de la branche $1x$ de la courbe, et l'ordonnée à l'origine $= 1$. Si l'on prend $x = 1$, on a $y = a =$ la base. Dans cette *fig.* 8 on a pris $a = e = 2.718...=$ base des logarithmes népériens, de sorte que la courbe tracée est la *logarithmique hyperbolique*. Ses abscisses étant prises en progression par différence, les ordonnées correspondantes forment une progression par quotient.

En général, les différentes espèces de logarithmiques semblablement disposées ne diffèrent entre elles qu'à raison de la base ou du module.

5. *Sous-tangente.* Si l'on différentie l'équation 2, et que, par les méthodes exposées au mot COURBES, on cherche la valeur de la sous-tangente, on trouve

$$\text{sous-tangente PT} = y\frac{dx}{dy} = m = \text{module},$$

c'est-à-dire que *la sous-tangente est constante et égale au module pour tous les points de la logarithmique.*

Cependant si l'on traite l'équation (1) par les mêmes méthodes, on trouve pour la sous-tangente une ligne transcendante

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{xy}{m} = \frac{x \log . x}{m}$$

Mais, en considérant la sous-tangente par rapport à la convexité de la courbe, et la mesurant sur l'axe des Y, *fig.* 7, on retombe sur une valeur algébrique, et l'on a encore

$$\text{sous-tangente BT} = \frac{x\,dy}{dx} = m = \text{module}$$

6. Enfin, on trouverait

$$\text{rayon de courbure} = \frac{(x^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{mx}$$

LOIS *de Kepler* (Voy. *Astronomie*, pag. 70).

LOIS DES MOUVEMENTS. 1. Soit AB (*fig.* 1, *planche* XC) une pièce de machine quelconque animée d'un mouvement rectiligne dont on veut obtenir la *loi*. — Fixez à la pièce AB un style, un pinceau ou un crayon S, et, à l'aide d'un moyen convenable, faites passer sous la pointe de ce crayon une feuille de papier ou de carton MN animée d'un mouvement uniforme, perpendiculaire

à celui du style, après y avoir tracé à la hauteur du style, avant le mouvement de sa pièce, une horizontale T' T. Cette horizontale T'T est évidemment la trace que le style laisserait sur le carton, si ce carton se mouvait seul; on l'appellera l'*axe des temps*. Si, au contraire, le carton MN restant en repos, la pièce AB se mouvait seule, son style tracerait une droite OE qui serait dès lors l'*axe des chemins* ou des *espaces* parcourus. Or, en vertu des mouvements simultanés du carton et du style, il arrive que le point n_1, par exemple, que celui-ci eût occupé après une durée représentée par la longueur ot_1, s'il s'était mu seul, a été comme transporté en e_1; il a dévié en sens inverse du mouvement du carton de tout le chemin horizontal ot_1 que celui-ci a parcouru réellement; de même, n_2 n_3 . . . n_5 se trouvent transportés en e_2 e_3 . . . e_5 en vertu des chemins inverses ot_2 ot_3 . . . ot_5 réellement parcourus par le carton, et au lieu des deux axes perpendiculaires OT, OE que donneraient les mouvements successifs du style et du carton, leur simultanéité engendre une série de courbes telles que $o\,e_1\,e_5\,t_8$ T qui peignent aux yeux la *loi* réelle, physique, des mouvements de la pièce AB.

2. En effet, faisons maintenant abstraction de cette pièce, et supposons que la ligne $t'\,o\,e_1\,e_5\,t_8$ T . . . nous soit présentée comme la *courbe* ou la *loi du mouvement* d'un point dont nous ne savons rien si ce n'est qu'il était lié à une pièce qui se meut d'un mouvement rectiligne, que la longueur ot_8 représente une durée déterminée, quatre secondes, je suppose, et que les ordonnées successives de la courbe sont les chemins parcourus par la pièce depuis l'origine du temps. La discussion de cette courbe suffit pour nous révéler les circonstances les plus importantes du mouvement de cette pièce, peut-être même pour indiquer à quel genre de machines elle appartient. Pour les découvrir, partageons la ligne $o\,t_8$ en parties égales, huit par exemple. Chaque division correspondra dès lors à une demi-seconde, puisque le mouvement du carton qui porte la courbe a été, par hypothèse, uniforme. Cela posé, nous obtenons facilement toutes les notions suivantes :

Le mouvement de la pièce inconnue n'est pas seulement rectiligne, il est *alternatif*, — car le style parti du point o de l'axe oT des temps revient sur cet axe en t_8 à chaque période, après s'être élevé jusqu'en e_5;

La longueur de la course totale de la pièce est évidemment donnée par $t_5 e_5 = o n_5$ en montant, plus $e_5 t_5 = n_5 o$ en descendant;

La durée totale de cette course $= o t_8 = 4$ secondes,

La durée de l'ascension est plus grande que celle de la descente;

La course montante s'opère en un temps $o t_5 = 2$ secondes $\frac{1}{2}$, et la course descendante en $o\,t_8 - o\,t_5 = 1$ seconde $\frac{1}{2}$;

L'ascension ne s'opère pas d'un mouvement uniforme, — car les différences $(on_2 - on_1)$, $(on_3 - on_2)$, $(on_4 - on_3)$, $(on_5 - on_4)$ de deux ordonnées successives $t_1 e_1$, $t_2 e_2$, $t_3 e_3$, $t_4 e_4$, $t_5 e_5$ sont inégales ;

Ce mouvement d'ascension est *retardé*, car les différences ci-dessus vont toujours en diminuant pour des durées égales;

Le mouvement de descente, au contraire, est *accéléré*, car les espaces $n_5 n_6$, $n_6 n_7$, $n_7\ o$ verticalement parcourus par le style pendant les durées égales $t_5 t_6 = t_6 t_7 = t_7 t_8 = \frac{1}{8}$ seconde augmentent de plus en plus.

Les *vitesses* diminuent donc sans cesse pendant la montée, elles augmentent pendant la descente.

3. Veut-on la valeur absolue de la *vitesse* à un instant quelconque, après ot_1 par exemple? Le style étant alors nécessairement en e_1, menez par ce point une tangente indéfinie à la courbe, et une parallèle $e_1 a$ à l'axe des temps; portez sur cette parallèle une longueur $e_1 a$ égale à celle ot_8 qui représente *une* seconde; par le point a, élevez une perpendiculaire limitée par la tangente $e_1 z_1$, cette perpendiculaire az_1 est la vitesse v_1 du style, lorsqu'il est parvenu en e_1, car on a évidemment (pag. 777)

$$de_1 : dt :: z_1 a : 1 \text{ seconde} :: v_1 : 1'' \quad \text{ou} \quad v_1 = \frac{de_1}{dt}$$

On obtiendrait par la même méthode la vitesse en tout autre point, et l'on remarque que cette vitesse serait nulle aux points où, comme e_5, la tangente deviendrait parallèle à l'axe des temps; elle serait excessivement grande, au contraire, si la tangente à la courbe s'approchait de la perpendiculaire à ce même axe.

Nous voyons encore que le mouvement de la pièce est non-seulement alternatif, mais qu'il est de plus *intermittent*, — car le style se maintient à la fin de chaque période sur l'axe des temps pendant une durée $t_1 o$ ou t_8T égale une demi-seconde environ.

L'axe des temps présente, il est vrai, dans ces parties, un feston qui prouve que le style ne s'est pas rigoureusement maintenu sur cet axe pendant l'intermittence. Mais ce feston est lui-même l'indice certain d'une *vibration*, très-probablement due à un *choc* éprouvé par la pièce à la fin de chaque course. On distingue même vers l'origine de la courbe un *tremblottement* analogue qui indiquerait un nouveau choc au départ. Bien plus, si l'axe des temps était assez allongé, c'est-à-dire si le mouvement du carton qui porte la courbe avait été assez rapide, ces dentelures seraient tellement distinctes qu'il deviendrait facile de compter le nombre des vibrations, de mesurer même l'amplitude des plus apparentes, et d'obtenir ainsi sur les circonstances les plus délicates du mouvement des notions

claires, certaines, *visibles*, que le calcul seul laisserait à peine soupçonner.

Veut-on enfin la vitesse v_8 due au choc final? On mènera, comme ci-dessus, une tangente à la courbe en t_8; puis on prendra sur l'axe des temps la longueur $t_8\,t_8$ correspondante à *une* seconde, la perpendiculaire $t_8 z_8$ sera la valeur de v_8.

4. Mais on peut au reste obtenir la *loi des vitesses* de la pièce à chaque instant : après avoir déterminé comme on vient de le faire la vitesse en un certain nombre de points $o\,e_1\,e_2\,e_3\,e_4\,e_5\,e_6\,e_7\,t_8$, on portera (*fig.* 2) toutes ces vitesses comme ordonnées sur l'axe des temps pris pour axe des abscisses, et faisant passer par les extrémités de ces ordonnées une courbe $v_0\,v_5\,v_8$, cette courbe sera l'expression, la représentation de la *loi* qui lie aux temps écoulés, non plus les espaces parcourus, mais les vitesses acquises à la fin de chacun d'eux, courbe dont la discussion fournirait encore de nouvelles lumières sur le mouvement de la pièce AB.

5. Et d'abord, si les espaces parcourus entre deux époques quelconques, $t_2\,t_3$ par exemple, ne nous avaient pas été directement donnés par $(t_3 e_3 - t_2 e_2)$ *fig.* 1, nous pourrions les déduire indirectement de la courbe des vitesses, *fig.* 2. Remarquons en effet que, dans un mouvement quelconque (pag. 786) l'élément de chemin parcouru de est le rectangle de l'élément du temps dt par la vitesse v du mobile pendant cet instant; donc aussi la somme des éléments de chemin ou le chemin total e est la somme $\int$ des rectangles variables $v\,dt$

$$de = v dt; \qquad \int de = e = \int v\,dt$$

Pour trouver cette somme, imaginons par *chacun* des éléments égaux dt de la ligne $t_2\,t_3$ une ordonnée, elle sera la vitesse v correspondante à cet élément; le produit de cette ordonnée par dt sera le rectangle élémentaire $v\,dt$; et chacun des points de $t_2\,t_3$ donnant un rectangle analogue, la somme de tous ces rectangles ou $\int v\,dt$ couvrira le trapèze mixtiligne $t_2\,t_3\,v_3\,v_2$, dont *l'aire* exprimera dès lors le chemin parcouru par la tige entre les époques t_2 et t_3, à la condition de prendre ici pour unité de chemin parcouru le produit des lignes qui, dans la figure, représentent l'une, la *seconde*, l'autre le *mètre*. C'est en ce sens seulement qu'il peut être permis de dire que *l'aire comprise entre la courbe des vitesses l'axe des temps et deux ordonnées quelconques exprime le chemin parcouru par le mobile entre les époques indiquées par les pieds de ces ordonnées*. Il est évident d'ailleurs qu'on ne doit calculer ainsi les chemins

parcourus qu'autant que l'on n'aurait pas la courbe (*fig.* 1) qui lie les temps aux espaces, puisqu'elle donne directement ces espaces.

6. Mais la courbe des vitesses (*fig.* 2) a, sur la première, cet avantage qu'elle peut servir à déterminer à chaque instant les *accélérations* $\frac{dv}{dt}$ (pag. 780), ou le rapport $\frac{g}{P}$ F des forces F qui agissent dans la direction de la pièce, à la masse $\frac{P}{g}$ de cette pièce; de sorte que, si le poids P de AB était connu, l'effort moteur variable F pourrait être évalué pour chaque instant du mouvement par la construction suivante :

Supposons qu'il s'agisse d'évaluer cet effort F_6 ou l'accélération φ_6, lorsqu'après le temps ot_6 la pièce possède la vitesse v_6. Par le point v_6, menez une tangente $v_6 z$ à la courbe, puis une parallèle à l'axe des temps; prenez sur cette parallèle une longueur $v_6 a$ égale à celle qui représente *une seconde*. Par a, élevez une perpendiculaire az limitée à la tangente $v_6 z$, vous aurez

$$az = \varphi_6 : 1'' :: dv_6 : dt; \qquad \frac{dv_6}{dt} = \varphi_6 = g\,\frac{F_6}{P}$$

$$F_6 = \frac{P}{g}\,\varphi_6$$

On pourrait obtenir de même les efforts F_0, F_1, F_2, F_3 . . . . correspondants aux durées écoulées o, ot_1, ot_2, ot_3 ou aux chemins parcourus o, on_1, $n_1 n_2$, $n_2 n_3$, et prenant la série de ces espaces pour abscisses et les efforts correspondants pour ordonnées, on formerait une troisième courbe, dont la quadrature entre deux ordonnées quelconques, ferait connaître le *travail* $\int F\,de$ développé sur la pièce AB entre deux instants quelconques; mais on conçoit que, de tracés en tracés, les résultats deviendraient d'autant plus incertains qu'on s'éloignerait plus des données primitives. Il convient donc de revenir à la méthode expérimentale, et de lui demander directement la *courbe* ou la *loi du travail*. Voici le principe des ingénieux appareils qui la fournissent, principe suggéré par M. *Poncelet*, et dont M. *Morin* a tiré la série des *dynanomètres* qui, par ses soins, enrichissent chaque année le domaine de l'art d'une foule de données aussi pratiquement exactes qu'elles sont précieuses.

7. Soient (*fig.* 3, *planche* XC) ab, cd deux lames d'acier en tout égales, réunies par deux autres pièces ac, bd avec lesquelles elles sont articulées à leurs extrémités a, b, c, d. Imaginez que, par un moyen quelconque, on ait attaché à la lame cd un crayon o et un crayon semblable à la lame ab, crayons dont les deux pointes seraient très-rapprochées et placées toutes deux sur une même

droite parallèle aux lames. Ces deux crayons traceraient évidemment une seule et même droite Eo sur un papier MN qui passerait au-dessous d'eux de o vers E parallèlement à la direction des lames.

Supposons maintenant que l'anneau R étant attaché à un point fixe, on exerce sur l'anneau F à l'aide de poids exacts des efforts successivement égaux à 1, 2, 3, 4. . . . k kilog. Les lames, en fléchissant (*fig.* 4), écarteront les crayons de quantités successives $f_1 f_2 f_3 \ldots f$ qui croîtront en général un peu plus rapidement que ces poids. Cependant, si les dimensions des lames ont été réglées de telle sorte que les efforts auxquels elles doivent être soumises ne leur donnent point de trop grandes flèches de courbure, on pourra, sans erreur importante, regarder comme constant le rapport moyen $\frac{f}{k} = m$ des écartements aux poids qui les ont produits, et admettre dès lors que, à un écartement quelconque f des pinceaux of correspond un effort de mk kilog. Il convient, au reste, de déterminer directement le rapport m, tant avant qu'après chacune des expériences auxquelles l'instrument servira, et de lui attribuer la valeur moyenne.

Admettons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse (*fig.* 4) d'obtenir la *courbe* ou la *loi du travail* développé par des chevaux qui traînent une voiture. On peut concevoir tel mécanisme convenable, qui mettant en rapport avec le moyeu de la roue, une bande de papier continue MN, fasse parcourir à celle-ci des espaces $e_1 e_2 e_3 e_4$ proportionnels aux chemins décrits par un point de la circonférence du moyeu, et proportionnels dès lors aux arcs développés par la roue, c'est-à-dire aux véritables espaces parcourus par le véhicule. Mais, sous les efforts des chevaux tirant sur F et des résistances de la voiture et du sol réagissant dans le sens R, les crayons s'écarteront de nouveau ; l'un o, resté fixe, tracera la droite oE, ou l'axe des chemins, tandis que l'autre f, s'écartant d'autant plus que le tirage est plus grand, laissera sur la bande de papier un feston dont les ordonnées e_1F_1, e_2F_2, e_3F_3 . . . mesureront les efforts des chevaux en chacun des points de la route ; de sorte que, leur *travail* entre deux points quelconques e_1 e_4 sera dans un rapport constant et connu avec l'*aire* comprise entre les ordonnées correspondantes à ces points, la ligne oE des abscisses et le feston $F_1 F_2 F_3 F_4$ de la courbe du travail. On obtiendra donc facilement ce travail total T pour un chemin E d'une longueur et d'une nature déterminées, un kilomètre pavé ou empierré, par exemple ; et réciproquement, en divisant le travail total T par l'espace parcouru E, on aurait $\frac{T}{E} = F$ pour l'effort *moyen constant* que des chevaux devraient exercer pour traîner un véhicule d'une espèce donnée (sus-

pendu ou non suspendu) sur un chemin d'une certaine nature (pavé ou empierré) à une vitesse déterminée (le pas, le trot ou le galop).

8. On emploie souvent encore l'appareil à *plateau tournant* (*fig.* 5), soit pour obtenir les efforts à chaque instant, soit pour avoir la loi qui lie les espaces aux temps. Supposons ce dernier cas, et pour plus de clarté, appliquons l'appareil à la recherche du mouvement de la pièce A B qui nous a déjà occupés. S^1 est le crayon qui y est fixé, P est un plateau tournant autour d'un axe fixe A devant ce crayon, et en contact avec lui. Le mouvement du plateau est uniforme, c'est-à-dire, qu'un point quelconque de sa circonférence décrit des arcs égaux $o\,t_1$, $t_1\,t_2$, $t_2\,t_3$ . . . dans des temps égaux. Nous admettrons qu'il fait un tour entier en neuf secondes. En supposant que son diamètre n'ait que 1 mètre, sa circonférence aurait 3141 millimètres, un point de cette circonférence parcourrait donc 349 millimètres par seconde. Or, comme un millimètre est une division très-visible, le plateau tournant permettrait d'évaluer très-facilement ici les durées écoulées à $\frac{1}{349}$ de seconde près. Quant aux chemins, on voit qu'à l'origine du mouvement, lorsqu'ils sont nuls, le style trace le cercle intérieur $S_0\,S_1\,S_2$ . . . et le tracerait sans cesse, s'il restait immobile, en vertu du mouvement même du plateau. Mais la pièce A B, en se mouvant, éloigne le style de la circonférence, et celui-ci parvient en 1 sur le rayon t_1 lorsqu'il s'est élevé verticalement de $S_1 1$ après le temps $o\,t_1 = \frac{1}{2}$ seconde. Après $o\,t_2 = 1$ seconde, il s'est élevé verticalement de $S_2 2$, et occupe sur le prolongement du rayon t_2 le point 2 ; une seconde de plus, il est en 4 sur le prolongement du rayon t_4 ; enfin en 5, après $o\,t_5 =$ 2 secondes $\frac{1}{2}$, il a achevé sa course ascendante, et touche la circonférence intérieure ; il revient alors en 6, puis en 7, et arrive en 8 à la fin de sa course descendante. De t_8 en o, il y a intermittence, le style reste sur le cercle qu'il traçait étant au repos, on ne distingue que la trépidation ; enfin, il repart de S_0, coupe le rayon T_1, puis les prolongements des rayons T_2, T_3, T_4, . . . et arrive enfin en T_8, après avoir décrit une courbe semblable à la première, et dans le même temps. La rotation du plateau s'accomplissant ici dans une durée qui comprend *exactement* celle de deux courses totales du style, il n'y a point de *recroisements*, et ce style repasse perpétuellement par les mêmes points du plateau, traçant toujours les deux mêmes courbes par les mêmes points, si son mouvement reste toujours le même.

9. L'appareil à plateau tournant a, sur ceux que nous avons esquissés plus haut, l'avantage d'indiquer les durées écoulées avec une précision extrême, ce qui permet de l'employer à mesurer les plus grandes vitesses. La figure 7 indique la forme générale que *Grobert*, modifiant heureusement l'idée première de *Mattei*,

avait proposé de lui donner pour le faire servir à la mesure de la vitesse initiale des projectiles.

AB est un axe fixe sur lequel sont montés deux plateaux o*t*, OT égaux et parallèles tournant avec l'axe d'un mouvement uniforme, à l'aide d'un mécanisme convenable. On tire perpendiculairement au plateau *to*, et vers sa circonférence; la balle, au sortir de l'arme, le perce en un point quelconque *a*, traverse la distance *d* des plateaux, et perce le second plateau TO en un point *b*, dont la distance *angulaire* au point *a*, fait évidemment connaître la durée du trajet. Supposons, par exemple, 1 mètre de rayon à chacun des plateaux ou une circonférence de 6283 millimètres, une seconde pour la durée de quatre tours complets et 2m à la distance *d*. Admettons enfin, que les plans passant par l'axe et les rayons *ca*, C*b* d'entrée et de sortie de la balle soient inclinés l'un à l'autre d'une quantité qui, mesurée sur la circonférence, s'est trouvée égale à 131 millimètres. Chaque millimètre de la circonférence correspondant à une durée égale à $\frac{1}{4 \times 6283}$ ou $\frac{1}{25132}$ de seconde, la durée totale *t* du trajet entre les deux plateaux a été $\frac{131}{25132}$ de seconde, et la vitesse *v* pouvant être supposée ici sensiblement constante, on aurait pour la vitesse initiale $v = \frac{d}{t} = \frac{2 \times 25132}{131} = 383^{m}$ environ.

10. Concevez maintenant que l'axe des plateaux est vertical, que ces plateaux sont enveloppés par une surface cylindrique, et que, pendant la rotation uniforme de cette surface, un corps armé d'un pinceau en contact avec elle, *tombe* en y laissant sa trace, et vous aurez une idée de l'ingénieux appareil à l'aide duquel M. *A. Morin*, dans ses leçons du Conservatoire, démontre, ou plutôt *montre* toutes les circonstances du mouvement des corps libres à chacun des instants de leur chute.

11. Tels sont à peu près les principes des appareils et des méthodes pratiques si généralement employés aujourd'hui pour découvrir la *loi réelle des mouvements* les plus variés; mais on conçoit que réciproquement les éléments d'un mouvement étant connus, ils puissent être à leur tour exprimés par une courbe; de là une sorte de géométrie mécanique qui éclaire l'étude des mouvements un peu compliqués d'une lumière que l'emploi exclusif de l'analyse ne comporterait pas.

12. On pourra s'exercer utilement à ce genre de considérations en traçant les courbes qui expriment les lois de mouvements mathématiquement définis, en construisant, par exemple, les formules de l'article *Forces*. Ainsi, prenant des longueurs convenues pour représenter les temps écoulés *t* et les espaces parcourus *e*, on trou-

vera facilement que : le mouvement étant supposé uniforme, la courbe devient une droite — dont l'inclinaison relative $\frac{e}{t} = \frac{de}{dt}$ sur l'axe des temps est la vitesse v du point mobile ; — que la traduction géométrique de la formule $e = \frac{1}{2} g t^2$ (page 783), qui exprime un mouvement uniformément varié, serait une *parabole* ayant son axe principal parallèle à celui des espaces, etc. Prenant ensuite les *vitesses* du mouvement pour ordonnées, on retrouvera une ligne droite pour la courbe d'un mouvement uniformément accéléré, — droite dont l'inclinaison relative $\frac{dv}{dt}$ sur l'axe des temps sera l'accélération constante φ du point mobile. — L'espace e parcouru en vertu de ce mouvement, à une époque quelconque t, depuis l'origine o du temps, serait l'aire $\frac{1}{2} v t$ du triangle formé par la droite, l'abscisse du temps t, et la vitesse acquise v à la fin de ce temps. — Enfin, si le mouvement était uniforme, la courbe deviendrait encore une droite, mais cette droite serait parallèle à l'axe des temps et placée à une distance de cet axe égale à la vitesse constante u du mouvement du mobile. L'espace parcouru x pendant une durée de temps quelconque t serait le rectangle $u\,t$ de ce temps t et de la vitesse constante u (page 777).

13. Je ne développerai pas plus longuement ces considérations très-simples, et les terminerai en résolvant par ces méthodes graphiques le problème d'algèbre très-élémentaire de la page 670 : *trouver tous les instants où les deux aiguilles d'une montre sont en coïncidence.*

Portons sur un axe des temps oT (*fig.* 6, *pl.* XC) douze divisions égales (0, 1) (1, 2) (2, 3).... (11, 12) pour représenter les douze *heures* égales du cadran, et comme les distances de l'aiguille des heures à 0 heure ont ici la même mesure que les heures écoulées, les ordonnées qui représentent ces espaces seront, entre 0 heure et 6 heures, égales à leurs abscisses et la courbe du mouvement de l'aiguille des heures sera une droite o H inclinée sur l'axe des temps d'une quantité qui donne pour sa vitesse $v = \frac{e}{t} = 1$ division par heure ou $\frac{1}{12}$ du cadran. A partir de 6 heures, les ordonnées ou les distances à 12 heures décroissent avec le temps écoulé, parce que ces distances sont comptées en sens inverse des premières, dans le demi-cadran qui s'étend de 6 heures vers 12 heures. La courbe H, 12 est donc symétrique à la courbe o H, et son inclinaison est seulement inverse de la première.

Quant à l'aiguille des minutes, puisque dans une demi-heure elle parcourt le même chemin que l'autre aiguille en 6 heures, et, uniformément comme elle, à l'abscisse ou au temps $\frac{1}{2}$ correspond une ordonnée ou espace parcouru $(m, \frac{1}{2}) = (\text{H}\ 6)$; et comme après

s'être éloignée du point de départ *o* pendant une demi-heure, elle y revient en sens inverse, uniformément et dans le même temps, la courbe de son mouvement entre 0 heure et 1 heure sera évidemment un feston formé par deux droites inclinées en sens inverse, *om*, *m* 1. Mais ce mouvement étant identiquement le même entre 1 heure et 2 heures, entre 2 heures et 3 heures, etc., la courbe du mouvement de l'aiguille des minutes entre 0 et 12 heures, se composera évidemment de 12 festons en tout égaux, comme le montre la figure.

Il est évident maintenant que les *coïncidences* ne peuvent avoir lieu que lorsque les distances à 0 heure, croissant ou décroissant *dans le même sens*, sont rigoureusement égales. Elles n'ont donc lieu qu'aux points des deux courbes pour lesquels les ordonnées en croissant ou décroissant ensemble deviennent égales, c'est-à-dire à leurs douze points d'intersection *o c c c*... 12. Menant ces ordonnées, on lira sur l'axe des temps les heures des coïncidences qu'on sait être exactement

0^h; $1^h\,5^m\,\frac{5}{11}$; $2^h\,10^m\,\frac{10}{11}$; $3^h\,16^m\,\frac{4}{11}$. . . . . . $10^h\,54^m\,\frac{6}{11}$; 12^h

c'est-à-dire que, à partir de 0 heure, il s'écoule entre une coïncidence et la suivante $\frac{12}{11}$ d'heure, — que, abstraction faite des coïncidences 0 et 12 heures, il n'y en a que dix, aucune coïncidence ne pouvant avoir lieu entre la première ni entre la dernière heure, comme le montre d'ailleurs la figure.

Mais que peuvent signifier les douze intersections *sss s*... des deux courbes? Elles signifient que les constructions graphiques, aussi bien que l'analyse, complètent, redressent et résolvent les questions qui peuvent avoir plusieurs solutions. Elles indiquent notamment que, autour de chacune des heures marquées sur le cadran, il y a *deux* positions des aiguilles pour lesquelles leurs distances à *o* heure sont égales, l'une où ces distances égales étant *de même sens*, il y a *coïncidence*, l'autre où ces distances égales étant de *sens différents*, les aiguilles sont symétriquement placées par rapport à 12 heures, il y a *symétrie*. Ainsi, il y a symétrie à $0^h 55^m \frac{5}{13}$ ou, comme on dit vulgairement, à une heure moins quatre minutes $\frac{8}{13}$; il y a encore symétrie à $1^h 50^m \frac{10}{13}$, et ainsi de suite, jusqu'à $11^h 4^m \frac{8}{13}$, l'intervalle d'une *symétrie* à la suivante, étant constant et $= 55^m \frac{5}{13}$. La figure indique encore que, entre $5^h \frac{1}{2}$ et $6^h \frac{1}{2}$, deux symétries se succèdent sans laisser place entre elles à aucune coïncidence *c*, ce sont exactement celles de $6^h \pm 27^m \frac{9}{13}$. Enfin, sans calcul aucun, on voit que, entre 0^h et $5^h \frac{1}{2}$ environ, la durée, qui sépare une symétrie de la coïncidence suivante, va sans cesse en augmentant ; — que, à partir de la symétrie qui s'interpose à $6^h 27^m \frac{9}{13}$, cette durée diminue brusquement pour reprendre ensuite sa marche croissante, etc., etc. En un mot, la seule inspection du tracé projette sur toutes les phases de la question une clarté que

l'équation 1 2 $x = c \pm x$ de la page 670, n'y porterait pas immédiatement, mais dont elle précisera à son tour les détails avec une rigueur qu'un tracé ne saurait atteindre.

LONGITUDES (Voyez *Astronomie*, pag. 72 et *Coordonnées géographiques*, pag. 385).

LOUCHET. C'est peu exiger d'un ouvrier que de fixer à quinze mètres cubes le déblai qui doit représenter le travail de sa journée, dans une terre qui peut se fouiller immédiatement au *louchet* ou à la pelle, sans exiger l'emploi de la pioche.

LOXODROMIQUE. Courbe que tracerait sur le sphéroïde terrestre un vaisseau qui suivrait constamment un même *air* de vent intermédiaire aux quatre cardinaux. Cette courbe est à double courbure, de forme spirale; elle coupe successivement les méridiens sous un même angle, et fait dès lors un nombre *infini* de révolutions autour des pôles en s'approchant continuellement de ces points, sans pouvoir jamais les atteindre. En effet, si elle les atteignait, elle couperait tous les méridiens à la fois sous un même angle, ce qui est absurde.

LUMIÈRE. 1. Fluide impondéré dont les molécules jaillissent dans toutes les directions de chacun des points des corps dits lumineux. L'observation montre que, dans le vide ou dans un milieu physiquement et chimiquement homogène, la lumière se meut rigoureusement en ligne droite, de telle sorte que l'attraction terrestre ne paraît exercer sur elle aucune action sensible. Au contraire, dans les milieux hétérogènes qu'elle traverse obliquement, la lumière se meut suivant une ligne courbe, de sorte que, vus à travers l'atmosphère dont les couches sont nécessairement de densités inégales, les corps nous apparaissent en des points qu'ils n'occupent pas réellement.

2. L'*intensité* de la lumière projetée sur une surface par un point lumineux, décroît dans un milieu homogène comme le carré de sa distance à la surface augmente, et le décroissement absolu paraît considérable, même dans les milieux les plus transparents.

Dans l'air, par exemple, la lumière perd environ un tiers de son intensité en parcourant une longueur horizontale de 1500 mètres.

Un morceau de verre à glace de $0^{m}.08$ d'épaisseur affaiblit d'environ moitié la lumière qui le traverse normalement.

Herschell a toutefois trouvé, en opérant sur une lame de verre ordinaire à faces parallèles, parfaitement polie et d'une épaisseur à peu près égale à celle des oculaires à fort grossissement, que de cent mille rayons qui tombent perpendiculairement sur un pareil verre, il n'en absorbe que 5200 et en laisse passer 94800.

Trois mètres d'eau de mer en absorberaient environ les deux cinquièmes.

Un feu de un mètre de largeur, vu la nuit, d'une distance de douze lieues, n'apparaît que comme une étoile tertiaire.

Cependant, suivant M. *de Zach*, 200 grammes de poudre brûlés en plein air donnent une lumière qui, durant le jour, peut être aperçue de plus de 7 lieues, et, durant la nuit, de 40 à 50 lieues de distance, bien que l'observation se fasse hors de toute portée des instruments d'optique, et qu'il y ait même quelque montagne interposée.

3. La *vitesse* de la lumière dans l'espace est d'environ 308 millions de mètres ou 77000 lieues par seconde; elle emploie $8^m\ 13^s$ à parvenir du soleil à la terre, et plus de quatre heures pour venir d'*Uranus*. Un boulet de canon qui conserverait sa vitesse initiale, ferait moins de chemin en un an que la lumière en une seconde. On admet que la vitesse de la lumière est *uniforme*.

4. *Réflexion de la lumière*. Lorsqu'un rayon lumineux I O (*fig*. 6, *planche* LXXXVI) rencontre une surface polie M, il s'y réfléchit de telle sorte que le plan de réflexion coïncide avec le plan d'incidence, et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Ces angles sont ceux que forment le rayon incident IO, et le rayon réfléchi OO' avec la normale à la surface M au point O d'incidence.

Ce principe explique comment les miroirs plans M, M' doivent nous faire voir les images des objets dont ils peuvent recevoir les rayons lumineux, et comment ces images sont *symétriques* de ces objets par rapport au plan du miroir.

L'image *symétrique* d'un corps par rapport à un plan est celle qu'on obtiendrait en abaissant de tous les points du corps des perpendiculaires à ce plan — perpendiculaires qu'on prolongerait au delà du plan, chacune d'une quantité égale à elle-même. L'ensemble des extrémités de ces lignes formerait l'image *symétrique*. Des caractères d'imprimerie, qu'on présenterait devant une glace, ne pourraient donc être lus que de la droite vers la gauche,

5. *La théorie des instruments à réflexion* (pag. 973) repose toute entière sur l'égalité des angles d'incidence et de réflexion; on déduit facilement de ce seul principe le théorème suivant, qui leur est immédiatement applicable :

Lorsqu'un rayon lumineux IO (fig. 6, planche LXXXVI) *tombe sur un miroir plan* M, *s'y réfléchit, puis rencontre un deuxième miroir plan* M' *sur lequel il se réfléchit de nouveau, l'angle* y, *formé par la direction du rayon incident et par celle du dernier rayon réfléchi est double de l'angle* x *des miroirs.*

On a, en effet, pour l'angle extérieur a au triangle OO'A (*Géom.*, B. 9)

$$a = b + x$$

et dans ce même triangle

$$b + c + a + x = 180^\circ = c + 2b + 2x$$

mais dans le triangle OO'L

$$c + 2b + y = 180^\circ$$

donc

$$y = 2x$$

Et quand les miroirs M et M' sont parallèles, le premier rayon incident et le dernier rayon réfléchi sont aussi parallèles.

On démontrerait de même que s'il y avait quatre réflexions entre deux miroirs faisant un angle x, l'angle formé par le premier rayon incident et le dernier rayon réfléchi serait $= 4x$; — que pour six réflexions, il serait $= 6x$; — pour huit réflexions, $8x$, et ainsi de suite.

On démontrerait encore que, si un miroir plan tourne sur un axe, le mouvement angulaire de l'image est double de celui du miroir.

6. *La réflexion sur les surfaces courbes* s'opère en un point quelconque, comme elle aurait lieu sur le plan tangent à la surface courbe en ce point.

Donc un point lumineux placé au centre d'une sphère intérieurement polie, enverrait à tous les points de cette surface des rayons lumineux qui reviendraient au centre après la réflexion.

Placé au foyer d'un ellipsoïde, les rayons émanés de ce point lumineux se croiseraient tous à l'autre foyer, reviendraient au premier après une seconde réflexion, et ainsi de suite.

Un paraboloïde qui recevrait des rayons parallèles à son axe, les réfléchirait à son foyer ; et réciproquement il les réfléchirait parallèlement à son axe, s'ils émanaient de son foyer.

Pour les calottes sphériques, concaves ou convexes, l'arc générateur de la surface ne dépassant pas 20 à 30 degrés au plus, on aurait :

R étant le rayon de courbure du miroir,

D la distance d'un point lumineux au miroir, distance comptée sur la normale menée du point lumineux au miroir,

i distance du foyer ou de l'image au miroir après la réflexion, comptée sur la normale

$$\pm \frac{1}{i} = \frac{2}{R} \mp \frac{1}{D}.$$

Les signes supérieurs s'appliquant aux miroirs concaves, et les signes inférieurs aux miroirs convexes.

Lorsque i devient négatif, on a ce qu'on appelle un *foyer virtuel*, c'est-à-dire un point où les rayons réfléchis se rencontreraient s'ils étaient prolongés en arrière du miroir ; les miroirs convexes ne donnent que des foyers *virtuels*.

7. La réflexion de la lumière n'est jamais complète et, en dépit de l'opinion de Huygens, les miroirs métalliques les mieux polis en absorbent toujours une partie.

D'après *Bouguer* sur 1000 rayons tombant sur l'eau sous un angle avec la surface de $\frac{1}{2}$ degré, 721 seulement sont réfléchis; — il n'y en a plus que 211 sous un angle de 15°, — 65 pour 30°, — 18 sous un angle de 60° à 90°.

Sur 1000 rayons qui tombent sur la première surface d'une lame de verre à glace, 543 sont réfléchis sous l'angle de 5° avec la surface, — 300 pour 15°, — 112 pour 30°, — 25 pour des angles de 60° à 90°.

Le marbre noir poli, sur 1000 rayons incidents, en réfléchit 600 sous l'angle de 3° 15′, — 156 sous 15°, — 51 sous 30°, — 23 sous des angles de 60° à 90°.

Le mercure et les miroirs métalliques présenteraient, toujours d'après Bouguer, un décroissement moins rapide, et, sur 1000 rayons incidents, plus de 700 seraient réfléchis sous un angle très-petit avec la surface, et environ 600 ou plus de la moitié, lorsque cet angle est voisin de 90°, et je trouve dans les expériences de W. *Herschell* la confirmation de ce résultat.

D'après Herschell, si 100,000 rayons tombent à peu près perpendiculairement sur un miroir plan, parfaitement poli, et de l'espèce d'alliage qu'il employait dans ses télescopes, il s'en réfléchira 67300.

Enfin, Fresnel a trouvé que la quantité de lumière réfléchie par les corps diaphanes sous l'angle de 70° à 90°, est $\frac{1}{16}$ de la lumière incidente.

8. *Réfraction de la lumière* (*fig.* 7, *planche* LXXXVI). Un rayon lumineux IM qui passe *obliquement* d'un *milieu* XNY dans un autre XN′Y se dévie de sa route primitive ou se *réfracte*, l'un de ces milieux fût-il le vide.

Un milieu est différent d'un autre milieu par cela seul que leurs densités sont différentes.

IMN *angle d'incidence* est celui *a* que fait le rayon incident IM avec la normale MN au plan de séparation des deux milieux.

RMN′ = *e* = *angle de réfraction* est celui que forme le rayon réfracté MR avec le prolongement MN′ de la normale MN.

Lorsqu'il n'y a qu'une simple réfraction (elle est double pour certaines substances), 1° le plan de réfraction coïncide avec le plan d'incidence, il est normal à la surface de séparation des milieux; 2° le quotient que l'on obtient en divisant le sinus IO de l'angle d'incidence par le sinus RO′ de l'angle de réfraction est une quantité sensiblement constante pour deux mêmes milieux quelle que soit l'obliquité de l'incidence. N étant ce quotient constant relatif à deux mêmes milieux, quotient que l'on appelle leur *indice de réfraction*, on a donc :

$$N = \frac{\sin. a}{\sin. e}$$

c'est la loi de *Snellius* attribuée à tort à *Descartes*, qui l'a seulement confirmée.

Dans le passage de l'air à l'eau, on a, à très-peu près, $N = \frac{4}{3}$ ou $4 \sin. e = 3 \sin. a$.

Si le rayon lumineux partait de R, MR serait alors le rayon incident, MI le rayon réfracté et $\frac{\sin. e}{\sin. a} = \frac{1}{N} =$ *indice de réfraction inverse*, ou de l'eau à l'air, aurait naturellement pour valeur la fraction $\frac{3}{4} = \frac{1}{N}$.

Sin. a ne pouvant jamais être plus grand que 1, il en résulte que, pour le cas de l'eau et de l'air, sin. e ne peut pas devenir plus grand que $\frac{3}{4}$ ou 0.75000, et ce sinus étant celui de 48° 36′, cette valeur est l'*angle limite* pour ces fluides. Ainsi ceux des rayons émanés d'un corps lumineux qui, pour sortir de l'eau, se présenteront à la surface de séparation XY, sous un angle plus grand que l'*angle limite* 48° 36′ n'en sortiront pas et rentreront dans le liquide : réciproquement, quelque petit que soit l'angle formé avec la surface liquide par les rayons émanés d'un point lumineux placé dans l'air, ces rayons n'éclaireront pas directement l'angle liquide complémentaire de l'angle *limite*.

9. Je choisis dans la longue série des *Indices de réfraction* déterminés par les physiciens, ceux d'entre eux qui intéressent la pratique des ingénieurs. La plupart de ces résultats sont dus à M. *Brewster*.

Indices de réfraction par rapport au vide.

SUBSTANCES.	INDICES.	SUBSTANCES.	INDICES.
Vide.	1.000	Verre 1 plomb 2 flint. .	1.724
Air à 0° sous la pression 0m.76.	1.000294	Crown-glass.	de 1.525 à 1.533
Eau pure.	1.336	Flint-glass.	de 1.576 à 1.625
Eau salée..	1.343		
Glace..	1.310	Verre rouge foncé. . . .	1.729
Alcool.	1.374	— coloré en rouge par l'or.	1.715
Huile d'olive.	1.470		
Verre ordinaire.	1.525	— orangé.	1.695
Glace de Saint-Gobin. .	1.543	— opale.	1.635
Verre en feuilles.	de 1.514 à 1.542	— vert.	1.615
		— rose.	1.570
Verre 3 plomb 1 flint. .	2.028	— pourpre.	1.608
— 2 plomb 1 sable. .	1.987	— à bouteilles. . . .	1.582
— 2 plomb 1 flint. .	1.830	Humeur aqueuse de l'œil.	1 337
— 1 plomb 1 flint. .	1.787	Cristallin entier..	1.384

10. N et N′ étant les indices par rapport au vide de deux substances S, S′, l'indice de la seconde par rapport à la première est $\frac{N'}{N}$.

Ainsi, l'indice de l'eau par rapport à l'air serait $\frac{1.336}{1.000294}$, et, comme ce diviseur diffère très-peu de 1, on voit que les indices, par rapport au vide de la table ci-dessus, sont à très-peu près les indices par rapport à l'air, c'est-à-dire qu'ils peuvent être pris sans erreur sensible pour le quotient du sinus d'incidence dans l'air, par le sinus de la réfraction dans la substance indiquée à la table.

L'indice du verre ordinaire par rapport à l'eau serait donc $\frac{1.525}{1.336} = 1.141$, c'est-à-dire que si un rayon lumineux passait de l'eau dans le verre, le sinus de l'incidence dans l'eau serait $= 1.141 \times$ sinus de la réfraction dans le verre.

En général (mais non pas toujours), le rayon lumineux se rapproche de la normale dans le milieu le plus dense. Donc le sinus diminue en passant d'un milieu moins dense à un milieu plus dense, et l'indice est alors plus grand que l'unité. C'est le contraire lorsque le rayon passe d'un milieu plus dense à un milieu qui l'est moins. Il faut toutefois excepter de cette règle les matières combustibles. Ainsi, l'alcool, l'huile, l'éther, moins denses que l'eau, dévient plus que celle-ci les rayons lumineux, et l'eau elle-même ainsi que le diamant étant doués d'une influence plus grande que ne le supposent leurs poids spécifiques respectifs, *Newton* n'hésita pas à avancer que ces substances devaient contenir des principes combustibles; assertion que l'expérience confirma cent ans plus tard.

11. *Réfraction atmosphérique.* Lorsque l'atmosphère est parfaitement calme, la densité de ses diverses couches est d'autant plus grande qu'elles sont plus rapprochées de la surface terrestre. Il en résulte que lorsqu'un objet quelconque, plus ou moins éloigné du centre de la terre que celui qui l'observe, envoie à cet observateur un rayon lumineux suivant une direction qui diffère de la verticale, ce rayon doit alors s'infléchir suivant une courbe toujours concave à la surface terrestre. Ce rayon ne pénétrant dans les lunettes ou dans l'œil de l'observateur que, suivant la tangente à cette courbe au point qu'il occupe, l'objet lui apparaît en un lieu plus élevé qu'il n'est réellement, de toute la hauteur angulaire r, comprise entre la tangente à la trajectoire et la corde de cette courbe, corde que suivrait le rayon lumineux s'il se mouvait dans le vide.

Cet angle r est l'*angle de réfraction atmosphérique* qu'on appelle plus simplement la *réfraction*.

12. Lorsqu'on prend les HAUTEURS d'un astre, il faut donc corriger la hauteur observée de cet angle r, ou plus généralement prendre :

Hauteur vraie = hauteur apparente — réfraction
Distance vraie au zénith = distance observée + réfraction

La table suivante, empruntée à la *Connaissance des temps*, donnera la valeur moyenne de cette *réfraction astronomique*, lorsque

l'observation sera faite à la température 10° centigrades, et sous la pression barométrique 0m.760. Elle a été calculée par M. *Caillet*, d'après les formules et les hypothèses de *Laplace* (*Mécanique céleste*, t. 4, pag. 264 et 271).

TABLE Ire. — *Réfraction pour baromètre* 0m.760 *et thermomètre centigrade* + 10°.

Hauteur apparente.	Réfractions.	Différence pour 10'.	Hauteur apparente.	Réfractions.	Différence pour 10'.	Hauteur apparente.	Réfractions.	Différence pour 10'.	Hauteur apparente.	Réfractions.	Différence pour 10'.
0° 0'	33'47"9	112"7	7° 0'	7'25"6	9"3	14°	3'50"0	2"58	56°	0'39"3	0"24
10	31.55,2	104,8	10	7.16,3	9,0	15	3.34,5	2,28	57	0.37,9	0,24
20	30.10,4	97,2	20	7. 7,3	8,6	16	3.20,8	2,03	58	0.36,4	0,23
30	28.33,2	90,1	30	6.58,7	8,3	17	3. 8,6	1,82	59	0.35,0	0,23
40	27. 3,1	83,5	40	6.50,4	8,0	18	2.57,7	1,64	60	0.33,7	0,22
50	25.39,6	77,3	50	6.42,4	7,7	19	2.47,8	1,49	61	0.32,3	0,22
1. 0	24.22,3	71,6	8. 0	6.34,7	7,5	20	2.38,9	1,35	62	0.31,0	0,22
10	23.10,7	66,4	10	6.27,2	7,1	21	2.30,8	1,24	63	0.29,7	0,21
20	22. 4,3	61,6	20	6.20,1	7,0	22	2.23,4	1,14	64	0.28,4	0,21
30	21. 2,7	57,1	30	6.13,1	6,7	23	2.16,6	1,05	65	0.27,2	0,20
40	20. 5,6	53,1	40	6. 6,4	6,5	24	2.10,3	0,97	66	0.26,0	0,20
50	19.12,5	49,4	50	5.59,9	6,2	25	2. 4,4	0,90	67	0.24,8	0,20
2. 0	18.23,1	46,0	9. 0	5.53,7	6,1	26	1.59,0	0,84	68	0.23,6	0,20
10	17.37,1	42,9	10	5.47,6	5,9	27	1.54,0	0,79	69	0.22,4	0,19
20	16.54,2	40,1	20	5.41,7	5,6	28	1.49,3	0,74	70	0.21,2	0,19
30	16.14,1	37,4	30	5.36,1	5,6	29	1.44,8	0,69	71	0.20,1	0,19
40	15.36,7	35,1	40	5.30,5	5,3	30	1.40,7	0,65	72	0.18,9	0,19
50	15. 1,6	32,9	50	5.25,2	5,2	31	1.36,8	0,62	73	0.17,8	0,19
3. 0	14.28,7	30,8	10. 0	5.20,0	5,0	32	1.33,1	0,58	74	0.16,7	0,18
10	13.57,9	29,0	10	5.15,0	4,9	33	1.29,6	0,55	75	0.15,6	0,18
20	13.28,9	27,3	20	5.10,1	4,7	34	1.26,3	0,53	76	0.14,5	0,18
30	13. 1,6	25,7	30	5. 5,4	4,6	35	1.23,1	0,50	77	0.13,5	0,18
40	12.35,9	24,2	40	5. 0,8	4,5	36	1.20,1	0,48	78	0.12,4	0,18
50	12.11,7	22,9	50	4.56,3	4,4	37	1.17,2	0,46	79	0.11,3	0,18
4. 0	11.48,8	21,6	11. 0	4.51,9	4,2	38	1.14,5	0,44	80	0.10,3	0,18
10	11.27,2	20,5	10	4.47,7	4,2	39	1.11,9	0,42	81	0. 9,2	0,17
20	11. 6,7	19,4	20	4.43,5	4,0	40	1. 9,4	0,40	82	0. 8,2	0,17
30	10.47,3	18,4	30	4.39,5	3,9	41	1. 7,0	0,38	83	0. 7,2	0,17
40	10.28,9	17,5	40	4.35,6	3,8	42	1. 4,7	0,37	84	0. 6,1	0,17
50	10.11,4	16,6	50	4.31,8	3,7	43	1. 2,5	0,36	85	0. 5,1	0,17
5. 0	9.54,8	15,8	12. 0	4.28,1	3,6	44	1. 0,3	0,34	86	0. 4,1	0,17
10	9.39,0	15,1	10	4.24,5	3,6	45	0.58,3	0,33	87	0. 3,1	0,17
20	9.23,9	14,3	20	4.20,9	3,4	46	0.56,3	0,32	88	0. 2,0	0,17
30	9. 9,6	13,7	30	4.17,5	3,4	47	0.54,3	0,31	89	0. 1,0	0,17
40	8.55,9	13,1	40	4.14,1	3,2	48	0.52,5	0,30	90	0. 0,0	
50	8.42,8	12,5	50	4.10,9	3,2	49	0.50,7	0,29			
6. 0	8.30,3	12,0	13. 0	4. 7,7	3,2	50	0.48,9	0,28			
10	8.18,3	11,4	10	4. 4,5	3,0	51	0.47,2	0,28			
20	8. 6,9	11,0	20	4. 1,5	3,0	52	0.45,5	0,27			
30	7.55,9	10,5	30	3.58,5	2,9	53	0.43,9	0,26			
40	7.45,4	10,1	40	3.55,6	2,9	54	0.42,3	0,26			
50	7.35,3	9,7	50	3.52,7	2,7	55	0.40,8	0,25			
7. 0	7.25,6		14. 0	3.50,0		56	0.39,3				

Exemple de calcul.

Soit la hauteur observée d'une étoile = 3° 45′ 18″
il faut en retrancher savoir :
Pour 3° 40′. . . . . 12′ 35″.9
Pour 5′ d'après la colonne différence. . 12″.1
Une minute ou 60″ donnerait encore 2″.42
d'où, pour 18″. . . . 0″.726
} — 0° 12′ 48″.726

Hauteur vraie. . . . . . . = 3° 32′ 29″.274

13. Les ingénieurs peuvent le plus souvent négliger la correction due à la différence de la température et de la pression. Toutefois, lorsqu'une grande rigueur sera nécessaire, ils pourront prendre, dans la table suivante, le facteur correspondant à la pression, celui relatif à la température, et multipliant l'un par l'autre, leur produit deviendra le multiplicateur de la réfraction moyenne qu'on a trouvée comme ci-dessus.

Supposons que l'observation précédente ait été faite à la température 0, et sous la pression $0^m.72$, les facteurs correspondants donnent $1.039 \times 0.947 = 0.983933$ ou 0.984 pour le multiplicateur de la réfraction moyenne 12′ 48″.726 qui s'abaisse ainsi à 12′ 36″.426, ce qui élève la hauteur vraie à 3° 32′ 41″.574. Mais il règne une telle incertitude sur la valeur des réfractions, lorsque surtout les hauteurs sont faibles, que l'exactitude apportée par cette correction est peut-être plus apparente que réelle.

Table II. — *Correction des réfractions moyennes.*

Baromètre.	Facteur.	Baromètre.	Facteur.	Thermomètre centigr.	Facteur.	Thermomètre centigr.	Facteur.
$0^m.710$	0.934	$0^m.725$	0.954	— 29°	1.168	— 14°	1.097
711	936	726	955	28	1.163	13	1.093
712	937	727	957	27	1.158	12	1.089
713	938	728	958	26	1.153	11	1.084
714	939	729	959	25	1.148	10	1.080
715	0.941	730	0.961	— 24	1.144	— 9	1.076
716	942	731	962	23	1.139	8	1.071
717	943	732	963	22	1.134	7	1.067
718	945	733	964	21	1.129	6	1.063
719	946	734	966	20	1.125	5	1.059
720	0.947	735	0.967	— 19	1.120	— 4	1.055
721	949	736	968	18	1.115	3	1.051
722	950	737	970	17	1.111	2	1.047
723	951	738	971	16	1.106	— 1	1.043
$0^m.724$	0.953	$0^m.739$	0.972	— 15	1.102	0	1.039

Suite de la TABLE II.

Baromètre.	Facteur.	Baromètre.	Facteur.	Thermomètre centigr.	Facteur.	Thermomètre centigr.	Facteur.
0m.740	0.974	0m.765	1.007	+ 1°	1.035	+ 26°	0.944
741	975	766	08	2	1.031	27	0.940
742	976	767	09	3	1 027	28	0.937
743	978	768	11	4	1.023	29	0.934
744	979	769	12	5	1.019	30	0.931
745	0.980	770	1.013	+ 6	1.015	+ 31	0.927
746	982	771	14	7	1.011	32	0.924
747	983	772	16	8	1.007	33	0.921
748	984	773	17	9	1.004	34	0.918
749	986	774	18	10	1.000	35	0.915
750	0.987	775	1.020	+ 11	0.996	+ 36	0.912
751	988	776	21	12	0.993	37	0.908
752	989	777	22	13	0.989	38	0.905
753	991	778	24	14	0.985	39	0.902
754	992	779	25	15	0.982	40	0.899
755	0.993	780	1.026	+ 16	0.978	+ 41	0.896
756	995	781	28	17	0.975	42	0.893
757	996	782	29	18	0.971	43	0.890
758	997	783	30	19	0.968	44	0.887
759	999	784	32	20	0.964	45	0.884
760	1.000	785	1.033	+ 21	0.961	+ 46	0.881
761	01	786	34	22	0.957	47	0.878
762	03	787	36	23	0 954	48	0.876
763	04	788	37	24	0.950	40	0.873
0m.764	1.005	0m.789	1.038	+ 25	0.947	+ 50	0.870

14. *Réfraction terrestre.* Lorsque l'observateur et le point qu'il observe sont situés tous deux dans les limites de l'atmosphère, et surtout dans le voisinage de la surface terrestre, les réfractions deviennent très-irrégulières, et parfois tellement bizarres, que la trajectoire du rayon lumineux, au lieu d'être concave à la surface terrestre, devient convexe et montre alors les signaux *au-dessous* du lieu qu'ils occupent en effet. Il arrive même que des *réfractions latérales* se produisent, et que le rayon lumineux dévie, soit à droite, soit à gauche, du plan vertical, passant par l'œil et le point d'où il émane. Cependant, l'influence de la *réfraction* sur l'exactitude des nivellements géodésiques a fait rechercher si, dans les circonstances atmosphériques favorables, il était possible de lier par une sorte de moyenne constante m l'arc terrestre C, qui sépare la verticale d'un signal et celle du point dont on l'observe, avec l'angle de réfraction r qui élève habituellement ce signal au-dessus de son lieu réel. En d'autres termes, on a cherché les valeurs moyennes de m pouvant satisfaire à la formule empirique,

$$r = m\,C$$

15. *Delambre* a trouvé en France, pour les valeurs de m par des temps brumeux, et en hiver seulement 0. 15 — plus communément 0.08 à 0.10 en hiver, — 0.06 à 0.08 en été.— On a trouvé encore 0.038 à l'équateur, — 0.052 en Italie, — 0.065 en Laponie, — 0.072 en Angleterre. — 0.063 en Autriche, — 0.07 à 0.09 en Suisse, — 0.0783 à la mer en été et en automne, — et, faute de mieux, on s'accorde, en France, lorsque l'atmosphère est parfaitement calme, lorsque les angles de hauteur sont assez faibles, lorsque les densités des couches d'air peuvent être regardées comme constantes, à faire

$$r = 0.08\ C \quad \text{ou} \quad r'' = (0.08)\ C''$$

en exprimant en *secondes* l'arc terrestre C et l'angle r de réfraction. Nous verrons tout à l'heure comment m a pu être déterminé.

On tiendra donc suffisamment compte de la réfraction moyenne vers la surface du sol en France, dans les temps calmes, en prenant pour la valeur de cet angle le douzième environ $(\frac{10}{125})$ de l'arc compris entre les verticales de l'observateur et du signal.

Or, comme la seconde terrestre répond à une distance de $30^m.864$, on voit que la correction à faire sur la hauteur angulaire d'un signal placé à environ 1850 mèt., atteindrait à peine cinq secondes.

16. Les effets de cette réfraction peuvent être approximativement évalués en *mètres*, lorsque l'observateur et le signal sont l'un et l'autre très-rapprochés de la surface terrestre supposée sphérique. Ce cas se présentant souvent dans la pratique du NIVELLEMENT; nous nous y arrêterons un moment (*fig.* 8, *planche* LXXXVI).

L'axe prolongé d'un niveau N, lorsqu'il est réglé, est une tangente No' à la surface terrestre ou à une surface sphérique concentrique à celle-ci. Le point o' où cette tangente rencontre le signal ou la *mire*, détermine la hauteur ou cote de niveau Mo'. Pour obtenir cette cote, but direct du nivellement, on élève successivement le voyant de la mire jusqu'à ce qu'il apparaisse dans la direction de l'axe optique No' de la lunette. Or, en vertu de la réfraction r, cette *apparence* a lieu lorsque le voyant est en o, par exemple, avant qu'il ait atteint le point o' qui appartient à la tangente. Le porte-mire lit donc et inscrit une cote en mètres $Mo = a$ trop faible de la quantité $oo' = e$ dont la réfraction a élevé le voyant. A la cote a, il faut donc *ajouter* e pour avoir la cote réelle $Mo' = a + e$ que je fais $= h$. Or, si les points N M sont assez voisins de la surface terrestre pour être censés lui appartenir, h sera l'excès sur le rayon terrestre OM, de la sécante Oo' de l'arc terrestre NM, ou ce qu'on appelle dans l'art du nivellement l'excès du *niveau apparent* No' sur le *niveau vrai* NM. Cet excès h sous-tendant l'angle $o'NM$, comme e sous-tend l'angle de réfraction $r = oNo'$, et ces angles

étant très-petits, on peut, sans erreur notable, supposer la proportionalité

$$h : e :: o'NM : o'No :: \tfrac{1}{2}C : r :: \tfrac{1}{2}C : 0.08\,C$$

car l'angle o'NM formé par la tangente No' et la corde NM, a pour mesure la moitié de l'arc terrestre C, et de son côté $r = 0.08\,C$ en moyenne. De cette proportion, on tire pour la valeur de e en mètres

$$e = 0.16\,h$$

c'est l'approximation que l'on emploie dans le *nivellement*.

17. Pour obtenir e en fonction de la distance en mètres k de l'observateur au signal, on peut remarquer que la tangente No' (*Géom.*, D. 28) donne

$$(No')^2 = h(h + 2R)$$

en appelant R le rayon terrestre $= 6366198^m$. Négligeant d'une part la hauteur h devant le diamètre terrestre 2R, de l'autre prenant la longueur k de l'arc NM pour celle de sa tangente No', il vient

$$h = \frac{k^2}{2R} \qquad \text{d'où} \qquad e = \frac{0.08\,k^2}{R} = k^2 \times \frac{0.01257}{1\,000\,000}$$

ce qui montre que les *haussements* en mètres, dus à la réfraction en terrain horizontal, sont entre eux comme les carrés des distances du signal à l'observateur, et que le haussement absolu e atteint environ $0^m.01257$ pour la première distance de *un* kilomètre.

18. *Déterminer le coefficient* m *de la réfraction* pour une localité et dans des circonstances atmosphériques déterminées : — On choisit (*fig.* 9, *planche* LXXXVI) deux points N, M visibles l'un de l'autre, et dont la distance horizontale $k = Nm$ soit bien connue. De la station M, on relève la distance zénithale apparente z' du point N, puis de celui-ci et sous les mêmes influences atmosphériques, on prend la distance zénithale apparente z du point M. La valeur angulaire de la réfraction r pouvant être considérée alors comme n'ayant pas varié dans l'intervalle des relèvements, on peut faire la somme des distances zénithales *vraies*

$$ZNM + Z'MN = z + z' + 2r$$

or (*Géom.*, B. 9) $\quad ZNM = M + C; \quad Z'MN = N + C$

donc $\quad z + z' + 2r = M + N + C + C = 180° + C$

$$r = \frac{C + 180° - (z + z')}{2}$$

et divisant les deux membres par C on a pour le rapport moyen constant m

$$m = \frac{C + 180° - (z + z')}{2C}$$

on obtiendra la valeur angulaire de C en degrés en divisant la longueur connue $Nm = k$ par la longueur du degré local (pag. 75), et par suite une valeur de m plus localement exacte que la moyenne 0.08, qui ne conviendrait certainement ni aux plaines des Landes en été, ni dans la Camargue, ni dans les plaines de la Sologne ou de la Corse, ni dans les mines, ni probablement à la mer (Voyez l'article *Nivellement*).

LUNE. (Voyez *Astronomie*, pag. 80).

M.

MACHINES. 1. Agents matériels et par conséquent *inertes*, destinés à transmettre le travail d'un *moteur* à un *outil* ou *opérateur*, dont la fonction consiste à vaincre utilement certaines résistances suivant certains chemins, c'est-à-dire à faire un certain ouvrage.

2. *Les machines ne sauraient ni augmenter ni diminuer le travail* qu'elles reçoivent du moteur; elles transportent ce travail, elles le distribuent ou le transforment, elles changent au besoin la valeur la direction ou le sens de ses deux facteurs constituants: *effort et chemin* décrit; mais c'est à la condition que le produit de ces facteurs restera constant, ou que l'augmentation de l'un d'eux sur un point déterminé de la machine, y soit exactement compensée par la diminution de l'autre. Mal conçues, elles égarent le travail moteur, et au lieu de le transmettre tout entier à l'outil, elles le détournent en le distribuant partiellement sur des points qui devraient rester fixes. Parfois même, elles rendent ce travail destructeur, elles l'emploient à user leurs propres organes, à les fléchir, à les faire vibrer, à secouer leurs appuis, à disjoindre leurs assemblages, à ébranler le sol et jusqu'aux murailles de l'atelier. Mais de même qu'elles ne peuvent augmenter en rien le travail moteur, il n'est pas en leur puissance de le diminuer et lorsque le calcul sait le poursuivre jusques à ses dernières transformations, le travail dépensé sur une machine se retrouve tout entier dans la mesure des effets qu'il a produits. Car le travail est une quantité qui, une fois née, ne peut plus s'éteindre que dans un ouvrage fait, et dès qu'un *kilogrammètre* aura été développé quelque part, il ne rentrera dans le néant qu'à la condition de produire un travail utile ou nuisible, destructeur ou indifférent d'ailleurs, mais toujours équivalent à lui-même.

Essayons, en les généralisant, de classer tous les effets possibles du travail moteur dépensé sur une machine en mouvement, et d'établir ainsi le compte général de son emploi.

3. *Equation générale d'une machine en mouvement*,

Soit $T_m =$ le travail moteur moyen livré à une machine quelconque pendant un temps connu t, ou le produit Ee de l'effort moteur moyen E par le chemin e décrit pendant la durée t, dans la

direction propre de cet effort, par son point d'application sur la machine.

Ce produit $T_m = Ee$ est nécessairement égal à la somme de tous les travaux résistants, savoir :

$T_o = Qq =$ travail dépensé sur l'opérateur ou l'outil pendant la durée t; ce travail étant pris comme ci-dessus, c'est-à-dire égal au produit de l'effort moyen Q de l'outil par le chemin q que son point d'application a parcouru, pendant le même temps t, dans la direction de cet effort.

$T_r = Rr =$ travail moyen pris comme ci-dessus et absorbé par toutes les résistances R étrangères à l'effet utile que l'on cherche à produire. C'est en bloc la somme des travaux absorbés par les frottements, par la résistance des milieux, par les chocs, les vibrations, les ébranlements du sol, par la flexion, l'extension, la compression inutiles des organes de la machine, travaux que nous ne savons pas évaluer tous exactement.

4. *Travail des pièces à mouvement alternatif.* Mais la composition de la machine peut être telle que certaines pièces de son mécanisme s'élèvent ou s'abaissent pendant la période t et absorbent dès lors un certain travail pour leur élevation, ou au contraire viennent en aide au travail moteur par leur descente. P étant le poids total de ces pièces à mouvement alternatif, h la hauteur verticale absolue comptée de bas en haut dont leur centre de gravité commun s'est élevé, et k la hauteur absolue comptée de haut en bas dont ce centre s'est abaissé pendant la période considérée, la somme des travaux montant et descendant, c'est-à-dire contraire et favorable au travail moteur sera évidemment $= P(h-k)$.

5. *Travail de l'inertie.* Enfin, pendant cette même durée t, le travail moteur et la somme des travaux résistants peuvent avoir varié en sens inverse l'un de l'autre, en oscillant entre les limites de leurs valeurs moyennes T_m, T_o, T_r. Suivant que le travail moteur a été momentanément plus grand ou plus petit que le travail des résistances, la vitesse des pièces mobiles de la machine a nécessairement augmenté ou diminué. Cette variation n'a pu avoir lieu sans avoir mis en jeu leurs *forces d'inertie* (page 785), et dès lors sans qu'un travail ou contraire ou favorable au travail moteur ait été développé, soit donc m la masse ou p le poids de l'une quelconque des particules mobiles de la machine dont la vitesse u a pu varier ; $\frac{p}{g}\frac{du}{dt}$ sera la FORCE qu'elle aura opposée à la variation du de sa vitesse pendant l'élément du temps dt; si dx est le chemin élémentaire qu'elle a parcouru pendant cet élément du temps dans la direction de la force, $m\frac{du\,dx}{dt} = mu\,du$ sera le travail élémentaire dépensé pendant dt par

son inertie ou contre elle. Si nous appelons v_0 la valeur de la vitesse, dont elle était animée au commencement de la période t et v celle de la vitesse qu'elle possède à la fin de cette période

$$\int_{v_0}^{v} m u\, du = \tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \frac{p v^2}{2g} - \frac{p v_0^2}{2g}$$

sera le travail dû à l'inertie de $m = \frac{p}{g}$ pendant la durée t. Prenant le signe Σ pour indiquer la somme de tous les produits semblables qui entrent dans le système mobile,

$$\Sigma \frac{p v^2}{2g} - \Sigma \frac{p v_0^2}{2g} = \Sigma \frac{p}{2g} (v^2 - v_0^2)$$

exprimera, en général, le travail de l'inertie de la machine, pendant la période t et ce travail sera évidemment positif ou négatif suivant que la vitesse v_0 au commencement de la période sera plus petite ou plus grande que la vitesse finale v.

6. *Travail de l'inertie des pièces de rotation.* Dans le cas très-général où les pièces mobiles tourneraient autour d'axes fixes, on aurait

$$v = \omega \rho \qquad \text{et} \qquad v_0 = \omega_0 \rho$$

en prenant ω et ω_0 pour les vitesses angulaires finale et initiale du système tournant et ρ pour la distance de la particule quelconque m à son axe de rotation ; le terme général ci-dessus deviendrait alors

$$\Sigma \frac{p}{2g} (v^2 - v_0^2) = \Sigma \frac{p}{2g} \rho^2 (\omega^2 - \omega_0^2)$$

c'est évidemment sous cette dernière forme, que le travail de l'inertie des pièces de rotation devra figurer dans l'équation ci-dessous, qui donne enfin le compte général de l'emploi du travail moteur moyen T_m pendant la période t :

$$\left.\begin{aligned} T_m &= T_o + T_r + P(h-k) + \Sigma \frac{p}{2g}(v^2 - v_0^2) \\ Ee &= Qq + Rr + P(h-k) + \Sigma \frac{p v^2}{2g} - \Sigma \frac{p v_0^2}{2g} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

7. C'est la relation connue sous le nom d'*équation des forces vives* et qui a été donnée par M. *Poncelet*, il y a bien vingt-cinq ans. Nous allons, à l'exemple de notre illustre maître, étudier successivement l'influence de ses différents termes, en faisant tous nos efforts pour ne pas rester trop au-dessous du beau modèle de discussion, que l'on devra consulter d'ailleurs et qui forme la première section de ses célèbres cahiers de Metz.

8. Mettons d'abord cette équation sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} T_o = T_m - T_r - P(h-k) - \Sigma \frac{p}{2g}(v^2 - v_o^2) \\ Qq = Ee - Rr - P(h-k) - \Sigma \frac{p}{2g}(v^2 - v_o^2) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

La machine marchera d'autant mieux ou sera évidemment d'autant plus parfaite que le travail T_o qui parviendra jusqu'à l'outil, se rapprochera plus du travail moteur T_m. Elle atteindrait donc la perfection si, le mode de travail de l'outil étant convenablement réglé d'ailleurs, on avait $T_o = T_m$, c'est-à-dire, si la somme des termes négatifs de l'équation (2) devenant égale à zéro, le travail moteur se transmettait tout entier à l'opérateur. Cette condition étant irréalisable en pratique d'une manière permanente (19), on y atteindra cependant un degré de perfection compatible avec la nature des matériaux en rendant la somme de ces termes *minimum* par la composition et la bonne disposition de la machine. Tentons d'indiquer les moyens d'y parvenir tout en précisant plus rigoureusement encore la signification et le vrai sens de tous les termes de l'équation.

9. *Influence des pièces qui montent et descendent ou du terme* $P(h-k)$. Remarquons d'abord que nous ne comprenons pas parmi ces pièces celles que la machine aurait pour but spécial de mouvoir verticalement, car ce travail entrerait alors nécessairement dans le terme T_o ou Qq. Tels seraient, par exemple, le manche et la tête d'un marteau de forge, les pilons d'un bocard, outils ou opérateurs dont le soulèvement est évidemment l'objet même du travail moteur. En général, le terme $P(h-k)$ n'embrasse, à quelques exceptions près, que les organes de transmission du mouvement, parmi lesquels nous citerons les balanciers excentriques de certaines machines à vapeur, les châssis dans les scieries verticales, les tiges et les pistons dans les pompes, etc.

Cela posé, il y a plusieurs manières de rendre nul le terme en question. Le plus simple et le meilleur consisterait évidemment à éviter l'emploi de pièces à mouvement alternatif, et c'est précisément ce que l'on a fait dans les scieries où l'on a substitué la scie circulaire à la scie droite; P devenant zéro, le terme disparaît. Lorsque, en vertu de considérations économiques ou de sujétions, les pièces à mouvement alternatif sont inévitables, on peut encore opposer à la masse de ces pièces d'autres masses douées d'un mouvement oscillatoire précisément contraire, ou des contrepoids qui maintiennent le centre de gravité commun à une hauteur constante ; h et k devenant zéro à la fois, le terme disparaît encore, mais T_r s'accroissant en vertu de l'excédant de frottement que cause la sur-

charge, le calcul seul peut indiquer quand il y a avantage à adopter ces dispositions.

Enfin, on peut du moins faire en sorte que le centre de gravité des pièces mobiles monte et descende périodiquement de quantités égales $h=k$, et alors le travail $(-Ph)$ absorbé par l'ascension est restitué pendant la descente sous la forme $(+Pk)$, mais c'est évidemment à la condition que le poids P n'aura pas varié pendant l'oscillation, c'est-à-dire que aucune des pièces mobiles n'aura quitté le système P, pendant la durée du mouvement alternatif. Bien que les termes $-Ph+Pk$ se compensent ainsi l'un par l'autre, dans l'intervalle de chaque période, l'emploi des pièces à mouvement alternatif, même lorsque ce mouvement est horizontal, n'en est pas moins à éviter, en ce qu'elles mettent en jeu des forces d'inertie qui deviennent un obstacle à l'*uniformité* du mouvement dont il convient, par d'autres motifs encore, de se rapprocher quand on ne peut pas l'atteindre (17).

Dans tous les cas, sous peine d'augmenter les causes de destruction, en même temps que le terme T_r par l'effet des chocs (22), les pièces à mouvement alternatif devront au moins être conduites de telle sorte que leurs vitesses deviennent nulles d'elles-mêmes, coïncidemment avec le changement périodique du sens de leur mouvement.

10. Observons maintenant, quant à la signification du terme $P(h-k)$, qu'il peut parfois comprendre accidentellement non plus seulement quelques pièces du mécanisme, mais la machine elle-même toute entière, et même ses accessoires. Ce serait le cas d'une locomotive remorquant un convoi en pente; P serait alors le poids de l'une et de l'autre, h la hauteur verticale dont le centre de gravité de l'ensemble aurait été élevé en montant la rampe et k la quantité dont il se serait abaissé en descendant la pente. On voit bien en effet, que l'ascension s'est faite aux dépens du travail moteur, mais que, au contraire, la descente lui est venue en aide; c'est à ce double caractère que l'on reconnaîtra en général les poids P qui doivent entrer dans le terme $P(h-k)$. Dès lors, si l'on pouvait admettre dans le cas d'un bateau à vapeur marin, que ses mouvements verticaux sont uniquement dus aux oscillations des vagues, la partie du terme $P(h-k)$ qui se rapporte à l'ensemble du navire et de sa machine, ne devrait point entrer dans l'équation du travail moteur, bien que le centre de gravité du système s'élève et s'abaisse alternativement. Ces remarques suffiront sans doute pour éveiller l'attention et mettre en garde contre les fausses applications que l'on pourrait faire de la formule générale.

11. *Influence du terme* $\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$. Nous avons vu que ce terme exprimait le travail de l'inertie de toutes les pièces mobiles de

la machine, entre le commencement et la fin de la période t. Résistant aussi longtemps que la vitesse augmente, mouvant à partir de l'instant même où elle commence à diminuer, ce terme diffère essentiellement de ceux qui l'accompagnent en ce que, par l'effet même du mouvement de la machine, il devient nécessairement ou *nul* ou *alternatif* après un certain temps; de sorte que le travail qu'il exprime ou disparaît de l'équation après une période plus ou moins longue, ou devient successivement et alternativement contraire et favorable au travail de l'outil. C'est ce que nous allons essayer de montrer.

12. *La vitesse des pièces mobiles du système a une limite supérieure.* Soit en effet T_z=la somme $T_o+T_r+P(h-k)$ de tous les travaux moyens résistants indépendants de l'inertie et $\pm t_m$ la variation positive ou négative de la différence des travaux moyens moteur et résistant, l'équation pourra être mise sous la forme

$$(T_m - T_z) = \pm t_m = \pm \Sigma \frac{p}{2g}(v^2 - v_o^2)$$

qui montre plus évidemment que le terme dû à l'inertie disparaîtra, (puisque l'on aura alors $v_o=v$,) aussitôt que la différence $\pm t_m$ entre le travail moteur et la somme T_z des travaux résistants deviendra nulle.

Or il est facile de voir d'abord que $+t_m$ ne peut augmenter indéfiniment à moins qu'on ne suppose, ce qui n'a jamais lieu dans la pratique, que la source du travail moteur débitera, de période en période, des quantités de travail de plus en plus grandes, et par exemple, que le volume d'eau versé sur la roue hydraulique ou le poids de vapeur injectée sous le piston d'une machine, croîtront indéfiniment d'une seconde à la seconde suivante, toutes choses restant égales d'ailleurs. Laissant donc de côté ces hypothèses purement théoriques, remarquons que $\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2)$ n'augmente qu'à la condition que $+t_m$ diminue, non-seulement parce que ce travail excédant se transforme en force vive, en s'épuisant sur les pièces mobiles de la machine, mais encore parce que ces pièces mobiles comprenant l'outil ou l'opérateur, elles ne peuvent acquérir une plus grande vitesse sans qu'il y ait plus d'ouvrage fait, sans que T_o augmente dès lors aussi bien que T_r qui comprend le travail des frottements, sans que enfin, T_z grandissant en même temps que $\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2)$ la différence $(T_m - T_z) = + t_m$ ne devienne plus petite à la fin qu'au commencement de la période, et sans que finalement, elle ne devienne nulle après un nombre plus ou moins grand de périodes semblables.

13. Si la vitesse, acquise alors, persistait, et elle persisterait si T_m conservait perpétuellement la valeur prise alors par T_z, elle deviendrait la vitesse de régime de la machine qui se mouvrait

ainsi d'un mouvement rigoureusement uniforme, c'est-à-dire dans les meilleures conditions; et le terme en question disparaîtrait de l'équation à partir de ce même instant.

14. *Départ des machines*. C'est ainsi, c'est-à-dire en vertu d'un excès initial $+ t_m$ du travail moteur moyen sur la somme des travaux moyens résistants que les machines *commencent* à se mettre en mouvement, et cet excès naît, pour ainsi dire, naturellement au moment du départ; car, à ces premiers instants, le travail de l'outil, l'ouvrage fait, les frottements et les autres résistances d'abord faibles ou nuls ne croissent que successivement à mesure que la vitesse des pièces mobiles augmente, tandis que le travail moteur reçoit ordinairement dès l'origine tout au moins sa valeur de régime dont l'excès $+ t_m$ sur le travail des résistances se transforme alors en force vive et disparaît en s'épuisant contre les parties mobiles qu'il anime.

15. *La vitesse des pièces mobiles du système a une limite inférieure*. Après avoir montré que la vitesse des pièces mobiles atteint nécessairement un *maximum* qu'elle ne peut dépasser, supposons que, à partir de ce *maximun*, la différence (T_m — T_r) change de signe et devienne $- t_m$, la somme des travaux résistants T_r l'emportant alors de t_m sur le travail moteur T_m. Voici que, à partir de cet instant, le terme $\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2)$, qui contient le travail de l'inertie accumulé dans les pièces mobiles, change lui-même de signe, et que, en même temps qu'il vient ainsi en aide au travail moteur T_m, la vitesse des pièces mobiles diminue, ce qui entraîne la diminution de l'ouvrage fait ou celle du travail T_o de l'outil, puis celle des résistances T_r. Or T_m augmentant tandis que T_r diminue, la différence (T_r — T_m) disparaît nécessairement après un temps plus ou moins long, et alors la vitesse des pièces mobiles a atteint son *minimum*.

16. Donc, la vitesse des pièces mobiles ne peut, en général, ni croître ni décroître indéfiniment; et le mouvement d'une machine, lorsqu'il ne devient pas uniforme, oscille nécessairement entre des limites inférieure et supérieure qu'il atteint alternativement sous l'influence régulatrice des forces d'inertie.

17. *Avantages du mouvement uniforme. — Comment on s'en rapproche*. Nous venons de voir que le terme $\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2)$ devenait nécessairement nul ou alternatif; il n'influerait donc pas directement sur la quantité de travail livré à l'outil, et si les variations de la vitesse pouvaient toujours s'opérer insensiblement, sans chocs, sans changements brusques, la machine une fois mise en mouvement travaillerait, à la régularité près, aussi avantageusement que si ce mouvement était parfaitement uniforme. Mais c'est ce qui n'a pas lieu en général, et il convient toujours de se rapprocher du mouvement uniforme, quand on ne peut l'atteindre. Outre qu'il

permettrait aux diverses pièces du mécanisme de se conduire mutuellement sans secousse, il conserverait à l'outil aussi bien qu'au recepteur pendant toute la durée de leur mouvement l'effort et le chemin qui conviennent à leur *maximum* d'effet. Mais les inégalités habituellement périodiques ou les intermittences des travaux moteur et résistant l'excluent trop souvent. Alors les organes de la machine, ses engrenages par exemple, n'éprouvant pas tous au même instant le même degré de variation de leurs vitesses, il arrive que ceux qui conduisaient se trouvent brusquement conduits, qu'ils se heurtent, se compriment; de là des chocs, des déformations, des flexions qui vont augmenter le terme T_r quand ils n'amènent pas des ruptures; de là aussi la nécessité de resserrer du moins le plus possible les deux limites de la vitesse. Or la formule mise sous la forme

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{T_m - T_2}{\Sigma \frac{p}{g}}$$

montre évidemment que, pour une même différence entre le travail moteur et la somme des travaux résistants indépendants de l'inertie, la variation $(v^2 - v_0^2)$ sera d'autant plus faible que la masse Σm des pièces mobiles sera plus grande. On resserrerait donc les écarts de la vitesse en augmentant la masse de ces pièces, mais les conditions d'établissement d'une bonne machine sont souvent exclusives l'une de l'autre, et ce qu'on gagne en régularité par l'augmentation des masses est en partie compensé par l'accroissement du travail des frottements que cause l'augmentation des poids mobiles.

18. Si les pièces mobiles tournaient autour d'axes de rotation, l'équation ci-dessus prendrait la forme (6)

$$\tfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{T_m - T_2}{\Sigma\left(\rho^2 \frac{p}{g}\right)}$$

elle montre que l'on peut alors régulariser le mouvement de la machine non plus seulement par l'augmentation des masses ou des poids mobiles, mais surtout en rejetant ces masses à une plus grande distance ρ de leur axe de rotation. Tel est l'objet des VOLANTS dont la théorie est développée à l'article qui leur est consacré.

19. Remarquons enfin au sujet du terme

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = T_m - T_2$$

que, en faisant à la fois $v = o$ et $T_m = o$, on aurait

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 = T_2$$

pour la valeur du travail que l'inertie pourrait encore dépenser contre les résistances, à partir du moment où la vitesse étant v_0,

tout travail moteur cesserait entièrement d'agir sur la machine. En d'autres termes, $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$ serait la mesure du travail que les résistances devraient développer, avant qu'elles aient pu ramener la machine au repos. D'où l'on voit qu'il n'est pas impossible en général que pour un temps limité et ordinairement très-court le travail de l'outil égale et même surpasse le travail livré à une machine en mouvement (8).

20. *Influence du terme* T_r. Ce terme ne peut être rendu nul dans aucune espèce de machine réelle. Il n'en est aucune, en effet, dont le mouvement ne développe des frottements, qui ne rencontre, de la part du milieu dans lequel elle se meut, une résistance plus ou moins énergique, qui ne fléchisse, n'étende, ne comprime plus ou moins ses organes. Il en est d'autres, telles que les marteaux qui, par la nature même de leur travail, donnent lieu à des chocs inévitables, et dès lors à des déformations et à des ébranlements qui absorbent une partie quelquefois considérable du travail moteur T_m. Entre tous les travaux résistants que renferme le terme complexe T_r, il n'est guère que ceux dus aux frottements et aux chocs que l'on sache évaluer avec quelque certitude, nous les désignerons respectivement par $T_f = F f$ et T_c de sorte que le terme T_r se décomposera en

$$T_r = T_f + T_c + T_x$$

T_x désignant la somme des travaux résistants que nous ne pouvons pas évaluer directement.

21. *Travail des frottements.* $T_f = F f$. Lorsque la machine est construite et fonctionne, la pratique n'a plus d'autre moyen de diminuer ce terme qu'un graissage suffisant des surfaces frottantes; et le choix des enduits est ici d'une importance qui n'est pas suffisamment évidente dans les tableaux d'expériences sur le frottement que l'on possède (page 815 et suivantes). Ainsi une longue pratique montre qu'il y a des suifs aux huiles des différences notables, en faveur de celles-ci et l'on a pu s'assurer que là où le bas prix de l'huile d'*olive* commune en permet l'emploi, elle est de beaucoup préférable à tous les autres enduits pour le graissage des gros axes.

Si la machine est en projet, et si l'on est encore maître de régler la disposition et les dimensions de ses organes, on diminuera évidemment le travail des frottements : 1° en faisant en sorte que tous les efforts agissent autant que possible tangentiellement aux lignes décrites par leurs points d'application respectifs, et que la normale commune aux surfaces frottantes soit tangente à la direction du mouvement; 2° en diminuant les poids mobiles et surtout les diamètres des axes de rotation, sans atteindre toutefois la limite à laquelle ceux-ci cesseraient d'avoir un degré d'inflexibilité convenable;

3° en fixant, s'il est possible, les points d'application de la puissance et de la résistance par rapport à chacun des axes conformément aux importants théorèmes que nous avons donnés (page 101), d'après M. *Moseley*.

22. *Des chocs dans les machines et du travail* T_c. Nous savons par le théorème de Carnot (page 327), que l'effet d'un choc entre deux corps libres qui ne réagissent pas après leur déformation est une consommation de travail qui a pour mesure la moitié de l'accroissement de la force vive que l'un des corps a acquis, plus la moitié de la diminution de force vive que l'autre corps a subie. Nous renverrons aux applications, et notamment au mot *Marteaux*, les développements que doit recevoir ce théorème général pour devenir utilement applicable aux machines; mais nous devons insister ici sur la nécessité, alors que les chocs sont inévitables, d'en tenir toujours compte dans le calcul de la machine et dans l'hypothèse même que ce théorème admet, c'est-à-dire en regardant les corps comme entièrement dénués d'élasticité. Outre que cette supposition tend à faire estimer la consommation de travail due au choc, dans le sens où une erreur sur sa valeur réelle est moins dangereuse, elle est aussi celle qui se rapproche le plus des effets naturels. En effet, les machines n'admettent en général dans leur composition aucun solide *parfaitement* élastique. Quand bien même cette élasticité parfaite existerait, il faudrait pour qu'il n'y eût aucune absorption de force vive, qu'aucun ébranlement ne persistât dans les corps après leur séparation; il faudrait encore que le débandement des pièces fléchies par le choc, non-seulement fût complet, mais encore s'exerçât d'une manière utile (page 336) et par exemple, que le manche du martinet fléchi par le choc de la came restituât en se redressant le travail résistant que la flexion a absorbé. Ces circonstances n'ont jamais lieu. Les organes qui se choquent inévitablement dans les machines devront donc, en général, être considérés comme ne réagissant pas, utilement du moins, après le choc, et dès lors, conformément à la théorie exposée page 326, il conviendra, si rien ne s'y oppose, de donner à l'organe choquant ou au système dont il fait partie une masse considérable par rapport à celle de la pièce qui subit les chocs. Il en résultera à la fois plus de régularité dans la marche de la machine, et une moindre consommation de travail par l'effet du choc, mais aussi des frottements plus énergiques et souvent le grave inconvénient de rendre la machine moins promptement obéissante aux accroissements et aux décroissements presque subits de travail que certaines fabrications exigent et parmi lesquelles je citerai le forgeage de pièces façonnées; mais on ne peut tout concilier dans la composition des machines.

23. *Le terme* T_x comprend tous les autres travaux résistants étrangers à l'effet que l'on veut produire. Bien qu'il ne puisse pas

être évalué en général, on pressent facilement que ce terme diminuera cependant d'autant plus que les parties de la machine qui ne sont point destinées à se mouvoir, que ses bâtis, ses supports seront plus fixes — que les organes de transmission seront plus roides, moins flexibles, moins extensibles, moins compressibles, moins mobiles, que leur forme, en un mot, sera plus invariable, et que le jeu de leurs articulations sera moindre. Il convient donc non-seulement que les machines reposent sur des fondations inébranlables et roides, mais encore que les parties fixes et mobiles du système reçoivent des dimensions bien supérieures à celles qu'exigerait rigoureusement leur résistance aux efforts qu'elles pourraient subir sans se rompre; supérieures même à celles que l'on pourrait déduire de la théorie de la RÉSISTANCE des matériaux. Car, encore une fois, toute flexion, toute vibration, tout ébranlement, tout mouvement, en un mot, absorbe ou a absorbé du travail, et jamais la machine à vapeur, portée par le navire qu'elle ébranle dans toutes ses parties, ne travaillera aussi utilement que si elle fonctionnait sur le sol ferme d'un atelier. C'est donc la *roideur* encore plus que la force qu'il faut avoir en vue dans la recherche des formes et des positions à donner aux supports et aux organes des machines, et la pratique, l'observation, l'expérience, l'étude des constructions existantes sont encore aujourd'hui des guides beaucoup plus sûrs que les considérations théoriques dans ce genre de recherches. La théorie introduisait, il y a quelques années, le rail inférieurement renflé suivant un arc d'ellipse; l'expérience a montré que si cette forme satisfaisait, en effet, à la condition d'économie de matière et de résistance *maximum* à la rupture, elle péchait par le défaut de roideur, et le rail parallèle a dû être préféré au rail ondulé, quoiqu'il exigeât un peu plus de matière. (Voyez les expériences de *Barlow*.) Enfin, la théorie s'est montrée complétement insuffisante dans la recherche des formes capables d'assurer la roideur de ces tubes gigantesques jetés sur le *Conway* et le détroit de *Menai*. (Voyez *Account of the construction of the Britannia and Conway tubular bridges by* William Fairbairn.)

24. *De la simplicité dans les machines*. La multiplicité des organes est évidemment encore une cause influente de la déperdition du travail moteur, et il convient, en général, de l'éviter. Mais, ainsi que le remarque *Navier*, si la *simplicité*, en tant qu'elle signifie l'emploi du plus petit nombre possible de parties mobiles, est une condition essentielle de la bonne composition d'une machine, il ne faut pas cependant lui donner trop d'importance. La machine la plus *simple* n'est pas toujours la plus convenable. « Par « exemple, un traîneau est plus simple qu'une voiture; cependant « cette dernière est préférable. Quand on veut élever l'eau d'un puits « avec un seau, ce qu'il y a de plus *simple* est de le tirer avec une

« corde. Il vaut pourtant mieux passer la corde sur une poulie, et « mieux encore l'enrouler sur un arbre tourné par une manivelle, « parce que, avec ces derniers procédés, un homme montera plus « d'eau dans le même temps sans se fatiguer davantage. On voit, « par ces exemples familiers, que la perfection d'une machine ne « consiste pas précisément à avoir le moins de parties qu'il est « possible, et qu'elle aura toujours le degré de *simplicité* conve- « nable, pourvu qu'elle ne présente aucune pièce que l'on ne « puisse supprimer sans augmenter la fatigue du moteur ou dimi- « nuer la quantité de travail effectuée. »

25. *Travail de l'outil.* T_0. Bien que le nombre de kilogrammètres que ce terme représente soit regardé comme sensiblement constant dans l'équation, on pressent facilement qu'il peut cependant correspondre à des quantités d'ouvrage fait qui varieront avec la qualité de l'outil, avec sa nature, avec son mode d'action surtout. On pourrait, par exemple, parvenir sans doute à réduire du blé en farine, en le concassant sous des pilons, cependant il est préférable de le moudre sous une meule tournante. On peut étirer du fer en barres par le choc réitéré d'un marteau, on l'étire plus promptement, on lui donne des dimensions plus rigoureusement exactes par l'action continue des laminoirs, mais la qualité faiblit et l'économie du procédé n'est assurée qu'à la condition d'un développement considérable de la fabrication. On dessèche certaines substances en les soumettant aux efforts énergiques de la presse hydraulique ; on les dessèche encore par un mouvement de rotation rapide, qui lance les molécules liquides qu'elles renferment tangentiellement aux circonférences décrites. Plus de cent machines hydrauliques plus ou moins diverses peuvent servir à l'élévation des eaux. Cependant, suivant que tel ou tel mode d'action aura été préféré, on obtiendra pour un même travail mécanique dépensé T_0 plus ou moins de blé moulu, plus ou moins de fer étiré, plus ou moins de matières desséchées, plus ou moins d'eau élevée, ou la même quantité élevée à des hauteurs plus ou moins grandes. Lorsque ce mode d'action ou de fabrication sera déterminé, la théorie pourra encore fournir des indices précieux sur la forme et la vitesse de l'opérateur, qui rendront l'ouvrage fait *maximum*. Mais le concours d'une pratique éclairée sera d'une nécessité indispensable, toutes les fois qu'il s'agira de décider quel entre des machines ou des procédés connus ayant une même destination, convient le mieux aux circonstances, à la localité, satisfait le plus économiquement aux conditions de qualité requises, tout en ménageant le travail mécanique T_0 qui se paie. A une saine théorie, à une savante pratique, il faudra encore associer le génie de l'invention, et ce qui est plus rare, un grand bon sens pour pouvoir tenter avec quelque chance de succès durable, la modification de procédés connus et surtout l'introduction de procédés nou-

veaux. C'est cette alliance de lumières et d'expérience qui constitue tout l'art de faire des recherches en mécanique, art qui ne saurait dès lors se réduire en principes.

26. *Le travail moteur* T_m prend sa source, soit dans le transport de l'air atmosphérique, soit dans la chute ou le mouvement de l'eau, soit dans l'expansion et la condensation de la vapeur; de là trois grandes classes de *récepteurs* dont il est séparément traité aux mots *Moulins à vent, Roues hydrauliques, Machines à vapeur*. Le poids et les efforts musculaires des animaux forment une quatrième source distincte de travail moteur, et sans contredit la plus ancienne. Le *manége* est le genre de récepteur auquel on applique habituellement le travail des quadrupèdes (cheval, âne, mulet, bœuf). Quant à l'homme, les systèmes qu'il anime sont extrêmement variés, et la pédale du remouleur, la barre du cabestan, le chef des garants dans les mouffles, la manivelle du cric, la poignée du levier, etc., sont indifféremment les points d'application des efforts que dirigent son intelligence et son adresse.

On est presque toujours conduit par des considérations purement économiques et industrielles dans le choix à faire entre ces divers agents moteurs, et ce choix fixe ordinairement à son tour la forme du recepteur. On n'a plus alors à déterminer (du moins après ce que nous avons dit des autres termes de l'équation) que le rapport à établir entre les deux facteurs Ee de T_m, pour obtenir le *maximum* d'effet utile, et aussi à faire en sorte que le récepteur prenne effectivement la vitesse qui convient à ce *maximum*. Mais il faut bien se garder de confondre, ainsi que cela a lieu trop généralement, la vitesse dont il vient d'être question avec celle que détermine la théorie des récepteurs, et qui correspond au *maximum* de travail transmis à ce récepteur lui-même. En effet, et comme le premier, je crois, *Coriolis* l'a fait remarquer avec raison à l'égard des roues hydrauliques, le travail que l'on veut rendre *maximum* dans la pratique n'est pas précisément celui que reçoit la roue, c'est celui T_0 de l'opérateur ou de l'outil; or ce dernier est toujours inférieur au premier de toutes les pertes dues aux frottements au moins, et parfois aux chocs. Il en résulte que la vitesse de la roue qui convient au *maximum* d'effet utile est toujours différente de celle qui donnerait le *maximum* de travail transmis à ce récepteur. Soit pris pour exemple l'expression $\frac{P}{g}(V-v)v$ du travail que peut transmettre à une roue à aubes planes le choc continu d'une masse d'eau $\frac{P}{g}$ atteignant avec une vitesse V les aubes qui se meuvent elles-mêmes avec une vitesse v. Les méthodes connues donnent $v = \frac{1}{2}V$ pour la vitesse des aubes qui assurera le *maximum*

de travail du récepteur. Cependant, si l'on tient compte des frottements de la roue, et si l'on représente par F une force qui, appliquée au point de l'aube qui a la vitesse v, produirait un travail égal à celui que le frottement de cette roue consomme, on n'aura plus que

$$\frac{P}{g}(V-v)v - Fv$$

pour le travail qui parviendra à la pièce que cette roue conduit, et la vitesse v des aubes qui rendra ce dernier travail *maximum* deviendra

$$v = \frac{V}{2} - g\frac{F}{2P}$$

Ainsi non-seulement elle sera plus petite que $\frac{1}{2}$ V, mais elle dépendra et de l'intensité du frottement de la roue et de la masse d'eau qui la choque, c'est-à-dire qu'elle variera pour chaque cas particulier, le système de récepteur restant cependant le même.

Je terminerai ces considérations purement mécaniques en rappelant aux jeunes ingénieurs qui pourraient l'oublier que l'établissement d'une machine ne saurait être pour celui qui la paie rien autre chose qu'une spéculation, et qu'elle n'a dès lors de raison d'être qu'à la condition de faire un travail utile que l'on ne ferait pas sans elle, ou que l'on ferait moins bien et à plus grands frais. que, en un mot, *la meilleure machine est celle qui produit un effet déterminé pour le moindre prix.*

MACHINES A VAPEUR. Voyez *Vapeur*.

MACHINES SOUFFLANTES. D'après les théories exposées à l'article *Ecoulement* (page 599), on obtiendra, par approximation, la vitesse de sortie u et le poids P de l'air qui s'écoule en une seconde du réservoir ou régulateur d'une machine soufflante où l'air serait soumis à une tension constante $(b+T)$, par les relations :

$$u = \sqrt{2g\frac{D}{\Pi}T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$P = ma\sqrt{2g\Pi DT} \qquad = \Pi . mau \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1.709\,(b+T)}{(1+0.003665\,\theta)};\quad \frac{D}{\Pi} = \frac{7955\,(1+0.003665\,\theta)}{(b+T)} \quad \ldots \quad (3)$$

dans lesquelles b est la hauteur du baromètre, T celle de la colonne de mercure qui mesure l'excès de tension de l'air du réservoir, Π le poids du mètre cube d'air à la température θ qui y est dès lors soumis à la pression constante d'une colonne de mercure d'une

hauteur totale $= (b + T)$; D le poids 13599 kil. du mètre cube de mercure, supposé constant à toute température, a la section de la *buse* ou de l'orifice d'écoulement, et enfin m le coefficient de contraction de cet orifice et qui a pour valeurs approchées $m = 0.65$; $m = 0.93$; $m = 0.94$ suivant que l'orifice est percé en mince paroi ou que la buse est cylindrique, ou qu'elle est d'une conicité moindre que 10° à 12° (Voyez page 599).

La formule (1) suppose que le gaz s'écoule à la manière d'un liquide dont le mètre cube pèserait Π, et qu'il franchit l'orifice a en conservant cette même densité, c'est-à-dire sans que ses molécules, au passage, s'écartent les unes des autres en vertu de leur ressort ou de la force élastique dont elles jouissent cependant. Il est donc assez probable que les valeurs de u que donnera la formule pècheront par défaut, la densité de l'air sortant péchant elle-même par excès.

Quant au travail rigoureusement nécessaire pour chasser définitivement le poids d'air P avec la vitesse u, on peut admettre que dans les machines à pistons du moins, il se compose de deux termes, l'un qui comprend le travail de compression qui d'abord y amène l'air de la tension b à la tension $b + T$, l'autre qui est nécessairement la demi-force vive $\frac{P}{2g} u^2$ dont on suppose le fluide animé au moment où il quitte la machine. Or, v étant le volume d'air à la densité Π qui s'écoule en une seconde, et V le volume primitif qu'occupait v sous la pression atmosphérique b et à la même température θ que celle du réservoir, on a évidemment, s'il n'y a pas de fuite autour du piston,

$$v\Pi = P \qquad \text{et} \qquad Vb = v(b + T) \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

D'où, pour le travail d'expulsion, l'une quelconque des expressions suivantes :

$$\frac{P}{2g} u^2 = vDT = \left(\frac{b}{b+T}\right) VDT = Db(V - v) = \frac{\Pi m a}{2g} u^3 . . \quad (5)$$

Ajoutant le travail de la compression que nous avons trouvé (page 596, formule 65), égal à

$$Db\,V \log.\text{hyp}.\frac{V}{v} = D(b + T)\,v \log.\text{hyp}.\left(\frac{b+T}{b}\right) = 2.3026\,Db\,V \log.\frac{V}{v} \quad (6)$$

Il vient pour le travail T_0 du piston

$$T_0 = Db\left\{V - v + V \log.\text{hyp}.\frac{V}{v}\right\} = Db\left\{V - v + 2.3026\,V \log.\frac{V}{v}\right\} \quad (7)$$

remarquant que log. hyp. $\frac{V}{v}$ diffère peu de $\frac{V - v}{v}$; on aurait, avec

un peu moins d'approximation, la valeur plus simple

$$T_o = \frac{Db}{v}(V - v)^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Pour obtenir le travail total de l'opérateur ou piston, il faudrait ajouter à ce terme : 1° le travail dû au frottement de ses garnitures; 2° celui de sa tige dans la boîte à étoupes; 3° celui qu'exige le soulèvement des soupapes, et l'on pourrait négliger quelques autres résistances moins influentes.

Les buses des machines soufflantes sont généralement mises en communication avec le régulateur ou réservoir par des tuyaux d'une grande longueur. Il en résulte toujours une perte de tension à laquelle il faut avoir égard dans les projets, et que l'on évaluera par les formules 82 et 83 de la page 602.

Résultats d'observations. La machine soufflante du fourneau de Grand-Fontaine, à Framont (Vosges), est à un seul cylindre en fonte à double effet et à balancier. Elle est mise en mouvement par une roue hydraulique sur laquelle le cours d'eau verse par seconde 156 kil. d'eau; la hauteur de chute est très-voisine de 10 mètres; d'où, travail dépensé sur la roue $= 1560$ *km.* On présume que cette roue transmet à la machine 780*km.* environ. Le diamètre du piston $= 1^{m}.28$, son aire $= 1^{mm}.286$ — son épaisseur $= 0^{m}.095$, le diamètre de sa tige $= 0^{m}.08$, la course *utile* du piston $=$ son diamètre $= 1^{m}.28$. Le volume d'une cylindrée est donc $= 1^{mmm}.646$, et le poids de l'air d'une cylindrée supposé à zéro et sous la pression $0^{m}.76$ de l'atmosphère $= 2^{k}.138$; le diamètre de l'orifice de la buse $= 0^{m}.054$; sa section $a = 0^{mm}.002289$ et $ma = 0^{mm}.002152$. Sous l'influence du travail dépensé sur la roue et indiqué plus haut, la manivelle fait 44 tours juste en cinq minutes, c'est-à-dire que 88 cylindrées sont vidées dans le même temps, et l'excès de tension T dans ces circonstances, s'élevait près de la buse à $T = 0^{m}.035$ moyennement (page 600). Il aurait donc dû sortir par la buse en une seconde $\frac{88 \times 2.138}{5 \times 60} = 0^{k}.627$ air. — Cependant, en calculant P par la formule (2), on ne trouve que

$$\Pi m a u = P = 0^{k}.192 = 0^{k}.627 \times 0.306 ;$$

u étant théoriquement $= 82^{m}.8$, $u^2 = 6870.92$ et $\Pi = 1^{k}.359$.

On a d'ailleurs $Db = 10335^{k}.24$

$$V = \frac{0^{k}.192}{1.299} = 0^{mmm}.14780 ; \quad v = \frac{0^{k}.192}{1.359} = 0.14128$$

$$V - v = 0.00652 ; \quad \frac{V}{v} = 1.04615 ; \quad \text{log. hyp.}\, \frac{V}{v} = 0.04510$$

V log. hyp. $\frac{V}{v} = 0.006666$; d'où pour le travail utile d'expulsion $67^{km}.386$, et pour le travail de compression 68.895, et enfin, travail utile, total $= 136^{km}.281$.

Mais, en fait, on a comprimé par seconde un volume $V' = 0^{m}.482678$, plus de trois fois et un quart aussi grand que V ; on l'a réduit à un volume $v' = 0^{mmm}.461369$ et, grâce à l'état des garnitures du piston et aux fuites, cet air ainsi comprimé a passé en partie de l'autre côté du piston, ou s'est échappé inutilement par d'autres points avant d'avoir atteint l'orifice de la buse. L'outil ou le piston a donc réellement opéré un travail à peu près =

$$Db\left(V' - v' + V' \text{ log. hyp. } \frac{V'}{v'}\right) = 445^{km}.45$$

dont $136^{km}.28$ seulement étaient utilisés.

Sous cette chute, avec un volume d'eau moindre, une *trompe* eût produit plus d'effet, et eût coûté trente-cinq mille francs de moins environ, sans compter une économie considérable sur l'entretien, le graissage et les réparations.

Cette machine à pistons, réparée plus tard, a marché un peu plus avantageusement; toutefois, en calculant assez exactement toutes les résistances passives, j'ai presque toujours obtenu

$$5\,\frac{P}{2g}\,u^2 \text{ kilogrammètres}$$

pour le travail dépensé par le cours d'eau pour obtenir $\frac{P}{2g}u^2$ à la buse.

D'Aubuisson, d'après les observations qu'il avait faites sur des systèmes analogues, n'évalue le travail à emprunter au cours d'eau, lorsqu'il agit sur une roue à auget bien établie, qu'à $4\,\frac{P}{2g}u^2$ kilogrammètres.

Pour une machine soufflante en bois à deux pistons carrés, chacun à simple effet de $(1^{m}63)^2$ avec course utile $= 0^{m}.63$, j'ai trouvé que 21 coups de piston simples par minute, suffisaient pour maintenir l'excès de tension T dans le régulateur à une hauteur $= 0^{m}.040$ mercure ; ce régulateur alimentant alors *deux* buses de $0^{m}.044$ diamètre chacune. La température θ variait de 12° à 15° ; la pression b était $= 0^{m}.73$; le poids P^1 d'air engendré par les pistons, était pour chaque seconde $= 0^{k}.685$; le poids correspondant P calculé par la formule (2) était $= 0^{k}.327$ d'où $P = 0.478\ P^1$. Ainsi, et bien que la machine fût parfaitement graissée et entretenue, le poids d'air lancé dans le fourneau, tel du moins que la formule le donne, n'était pas la moitié du poids d'air engendré.

Ventilateurs. Si l'on pouvait admettre que l'air projeté par la

force centrifuge vers la circonférence extérieure des ailettes y acquière ainsi un excès moyen de tension $= T$; puis, qu'ainsi comprimé, il soit projeté dans le tuyau d'émission par les ailettes qui passent successivement devant l'origine de ce tuyau, les formules (1) et (2) donneraient encore, par approximation, la vitesse u et le poids P d'air écoulé par seconde. En outre, le travail de compression et celui d'expulsion ou de projection se trouveraient assez bien exprimés par les valeurs (5) et (6). Mais ces hypothèses sont-elles permises? j'avouerai que, après une étude assez attentive du mode d'action des ventilateurs, je ne suis pas encore parvenu à le saisir nettement.

Résultats d'observations. Les observations suivantes, dues à M. *Saint-Léger*, se rapportent à un ventilateur dont les quatre ailes légèrement convexes, avaient à très-peu près les dimensions suivantes; rayon extérieur $= 0^m.66$; rayon intérieur $= 0^m.32$; largeur des ailes $= 0^m.33$; la température $\theta = 0$; la pression atmosphérique $b = 0^m.76$; les poids P ont été calculés, avec ces données, par la formule

$$P = 493\, d^2 \sqrt{(0.76 + T)\, T}$$

analogue à celle de la page 600.

Diamètre des buses ou *d*.	Nombre de tours par minute *n*.	Tension en colonne d'eau.	Tension en mercure ou T.	Poids d'air soufflé par seconde ou P.	*Observat.*
m.		m.	m.	k.	
0.065	712	0.175	0.0128	0.210	
0.0905	700	0.155	0.0114	0.378	
0.102	550	0.10	0.0073	0.383	
0.102	675	0.145	0.0106	0.456	
0.102	700	0.155	0.0114	0.463	
0.130	650	0.11	0.0081	0.657	
0.130	712	0.125	0.0092	0.700	
0.130 0.130	575	0.085	0.0062	1.150	Les deux buses soufflant à la fois.
0.130 0.130	637	0.095	0.0069	1.212	*Idem, idem.*
0.192	300	0.022	0.0016	0.634	
0.192	504	0.057	0.0042	1.029	
0.192	558	0.066	0.0049	1.112	
0.192	504	0.062	0.0046	1.078	
0.192	567	0.068	0.005	1.124	
0.192	570	0.07	0.0051	1.135	
0.192 0.192	426	0.028 0.035	0.0021 0.0026	1.536	*Idem, idem.*
0.192 0.192	474	0.044 0.055	0.0032 0.0040	1.903	*Idem, idem.*
0.192 0.192 0.192	423	0.038 0.034 0.028	0.0028 0.0025 0.0021	2.360	Les trois buses soufflant à la fois.

le ventilateur soufflait dans l'air et non dans le cubilot. On sait (p. 600), que toutes choses restant égales, lorsqu'on engage vivement la tuyère d'un ventilateur dans un fourneau en feu, la vitesse des ailes augmente très-sensiblement.

De l'ensemble de ses expériences, M. *Saint-Léger* a conclu que : entre les limites 276 et 712 pour le nombre n de tours des ailes par minute; $0^{mm}.0033$ et $0^{mm}.0800$ pour l'aire totale des orifices d'écoulement :

1° Les *volumes* d'air écoulés, mesurés à la température 0 et sous la pression $0^{m}.76$ ont été, pour un ou plusieurs orifices constants, proportionnels à la vitesse des ailes ;

2° Quand la vitesse des ailes était constante, les volumes écoulés ont été proportionnels à la surface totale des orifices des buses.

n étant le nombre de tours des ailes en une *minute*, a l'aire totale des orifices d'écoulement, M. *Saint-Léger* propose la formule empirique

$$V = 0.05417\, na$$

pour obtenir le volume V, en mètres cubes à zéro, et sous la pression $0^{m}.76$ qui s'écoule en une *seconde*.

Cette formule ne saurait évidemment être applicable qu'aux ventilateurs ayant des dimensions et prenant des vitesses très-peu différentes de celles qui ont été données ci-dessus; de sorte, qu'elle ne jetterait aucune lumière sur les bases d'un projet différent.

En pareil cas, je crois que l'on pourrait regarder la vitesse de la circonférence extérieure des ailes, comme un maximum que la vitesse u du fluide à la buse ne saurait dépasser. Appelant ω la vitesse angulaire des ailes, R leur plus grand rayon, on aurait donc, par approximation, $\omega R = u$, et les formules (1) et (3) donneraient alors, pour obtenir l'excès de tension T dont on approchera, sans toutefois l'atteindre, la relation

$$\frac{T}{b} = \frac{\omega^2 R^2}{156077 - \omega^2 R^2} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{b\,\omega^2 R^2}{156077 - \omega^2 R^2}$$

qui fournit cette autre approximation

$$P = 1.709\, b m a \omega R \left(1 + \frac{T}{b}\right)$$

pour les cas pratiques, où la largeur des ailes ne dépasse pas trois fois et demi le diamètre de la buse. On a supposé la température $\theta = 0$.

Le ventilateur convient surtout aux fourneaux qui exigent à la fois un grand volume d'air et une faible tension, aux CUBILOTS par exemple. Cette machine soufflante paraît avoir été inventée, en 1728, par un mécanicien nommé *Téral*.

La trompe. Les formules (1) (2) et (3) sont applicables à la trompe comme aux autres machines soufflantes; quant au travail qu'elle dépense en effet, pour lancer par seconde un poids d'air P avec la vitesse u, on peut l'évaluer moyennement à

$$10 \frac{P}{2g} u^2 = 5 \frac{P}{g} u^2 = 10 \, D b \, (V - v)$$

avec cette condition, toutefois, que la chute d'eau ne soit pas inférieure à 4 ou 5 mètres. Du moins, n'ai-je jamais vu de trompes établies sur des chutes inférieures (*).

Si l'on rapproche cette quantité de travail de celle qu'il faudrait dépenser sur une roue à augets mouvant une machine à piston en fonte, pour obtenir un même effet utile $\frac{P}{2g} u^2$, on voit qu'il en est à peu près le double; mais si l'on tient compte des prix respectifs de premier établissement, des frais de réparation et d'entretien, on peut affirmer que, pour lancer un même poids d'air avec une même vitesse, la dépense en argent pour une trompe et pour une machine à piston en fonte, mue par une roue à augets, sera dans le rapport de 1 à 30 environ, et plus grand encore si la chute atteint huit à neuf mètres. Aucune machine soufflante ne donne, d'ailleurs, un vent aussi régulier que celui des trompes, car lorsqu'elles sont bien calfatées, le mercure reste suspendu dans les branches du manomètre, aussi parfaitement immobile que s'il y était congelé. *D'Aubuisson*, qui comme nous-même avait été à même de voir fonctionner cette excellente machine, la caractérisait ainsi : « Elle est la « plus simple et la plus facile à construire de toutes les machines « soufflantes, — elle exige le moins de frais d'entretien, — elle est « celle dont l'action se modère et se régularise le plus aisément, — « enfin, elle est susceptible de donner autant de vent et un vent « aussi fort que peuvent l'exiger les divers feux des usines métal- « lurgiques alimentés avec le charbon de bois. » L'air qu'elle projette est, il est vrai, saturé de vapeur d'eau, mais cette circonstance, dont il faut tenir compte pour les feux de forge, n'aurait aucune influence sur le travail dans les hauts-fourneaux.

Résultat d'observation. Le diamètre de la buse étant $= 0^m.035$, la chute totale $8^m.80$, le manomètre indique une tension en mercure T $= 0^m.081$, lorsque la dépense d'eau $=$ 137 litres par seconde. J'ai montré que cette dépense d'eau pouvait, en général, être calculée par la formule théorique, sans coefficient de réduction.

(*) J'ai donné, dans mes *Etudes sur l'art d'extraire le fer de ses minerais*, une description très-détaillée et un dessin exact et à grande échelle de cette singulière machine soufflante, et j'ai la ferme confiance que les ingénieurs qui auraient à établir une telle machine, et qui voudront bien prendre mon modeste travail pour guide, ne s'égareront pas.

Le diamètre de la buse étant $0^m.035$, la chute totale $7^m.40$, le manomètre donne une tension $T = 0^m.0767$, lorsque la dépense d'eau est 233 litres par seconde.

Le diamètre de la buse étant toujours égal à $0^m.035$, *D'Aubuisson* avait trouvé que, entre les limites $T = 0^m.027$ et $T = 0^m.0812$, cet excès de tension T, pour une même trompe, croissait à peu près proportionnellement aux dépenses d'eau.

J'ai cru remarquer que la hauteur des arbres avait beaucoup plus d'influence sur l'augmentation de la tension T, que la charge sur l'orifice des étranguillons. Il en résulterait qu'une chute étant donnée, il y aurait avantage à augmenter dans certaines limites la hauteur des arbres aux dépens de la tête d'eau ou charge sur les étranguillons.

MAGNÉSIE. Terre alcaline caustique, blanche, très-légère, onctueuse au toucher, infusible, qui n'absorbe pas l'eau comme la chaux, presque insoluble dans l'eau froide, moins soluble encore dans l'eau bouillante, se combinant facilement avec tous les acides, et formant ainsi des sels qui sont les uns solubles, les autres insolubles dans l'eau. 100 de magnésie ou d'oxyde de magnésium contiennent magnésium 61.29 + oxygène 38.71.

On obtient de la magnésie bien caustique, en calcinant à la chaleur blanche la magnésie des pharmaciens.

On n'a point de méthode sûre pour séparer complétement la magnésie de ses combinaisons. On l'obtient en grande partie en ajoutant à la liqueur acide qui la contient, une dissolution de phosphate de soude, puis de l'ammoniaque pure qui rende la liqueur alcaline, et laissant reposer le tout dans un endroit chaud, il se dépose, après un assez long espace de temps, un précipité cristallin de phosphate ammoniaco-magnésien, qui filtré, ne doit pas être lavé trop longtemps, parce qu'il se dissout un peu dans l'eau pure. On fait sécher ce précipité, puis on le fait rougir pour en chasser l'eau et l'ammoniaque, et il passe ainsi à l'état de phosphate magnésique neutre, contenant 36.67 pour 100 de magnésie. *Rose* recommande de prendre pour la quantité de magnésie, les 0.4 du précipité calciné, afin de compenser la perte due au lavage.

MAGNÉTISME. Voyez au mot *Aiguille aimantée*, page 11, la partie de la doctrine du magnétisme qui intéresse la pratique des ingénieurs. — Voyez encore MÉTAUX.

MANÉGE. Le travail moyen des divers animaux attelés au manége, est évalué comme suit, depuis un grand nombre d'années : un cheval allant au pas exerce un effort moyen constant = 45 kil. en faisant parcourir au point d'application de cet effort $0^m.90$ par se-

conde, — il peut supporter ce travail tous les jours pendant 8 heures, divisées en 2 relais; d'où travail exercé en une seconde $=40^{km}.5$, et travail total par journée $=$ 1166400 km.

Le même cheval, allant au trot, fait parcourir 2^{m} par seconde au point d'application de l'effort moyen qu'il exerce; mais cet effort est réduit à 30 kil., et la durée du travail journalier doit elle-même s'abaisser à 4 heures 1/2; d'où travail exercé en une seconde $= 60^{km}$., et en une journée 972400 km.

Un bœuf, attelé de même, exerce un effort moyen $=$ 60 kil., lorsqu'il fait parcourir au point d'application de cet effort $0^{m}60$ par seconde, et travaille ainsi huit heures sur vingt-quatre en deux relais; d'où travail exercé en une seconde $=$ 36km, et en une journée 1036800 km.

Un mulet, attelé de même, exerce un effort $=$ 30 kil., fait parcourir au point d'application $0^{m}.90$ par seconde, et peut travailler ainsi huit heures sur vingt-quatre en deux relais, d'où travail exercé en une seconde $=$ 27km, et en une journée 777600 km.

Un âne, enfin, exerce un effort moyen $=$ 14km., fait parcourir au point d'application $0^{m}.80$ par seconde, peut travailler ainsi huit heures sur vingt-quatre en deux relais, d'où travail exercé en une seconde $=11^{km}.2$, et en une journée 322500 km.

On ne connaît pas les rayons des manéges qui ont fourni ces résultats, et la longueur de ces rayons exerce une très-grande influence sur l'effet produit, et principalement sur la fatigue que l'animal éprouve. Obligé comme il l'est de faire un tour entier sur lui-même pour chaque circonférence qu'il fait décrire au point d'application de son effort, il résulte, de ce double mouvement de translation et de rotation, ce que *Desaguliers* appelait un *entortillement* qui doit lui causer une gêne excessive dans les cercles à petits rayons, en diminuant encore l'effet produit par suite de l'obliquité du tirage.

Voici quelques observations un peu différentes de M. *Hachette*, et pour lesquelles les rayons des manéges sont donnés :

A Antony, près Paris, un cheval exerçait un effort $=$ 100 kil. sur l'extrémité d'un rayon $= 3^{m}.575$, faisait parcourir $0^{m}.37$ par seconde au point d'application de cet effort, travaillait ainsi dix heures par jour, d'où travail journalier dépensé $=$ 1332000 km., il élevait ainsi du fond d'une carrière 36000 kil. de plâtre de $23^{m}.4$, d'où travail utile $=$ 842400 km $= 0.63 \times$ travail dépensé.

Trois chevaux, attelés à la fois au manége de la brasserie du Bon-Pasteur, dont le rayon $= 3^{m}$, exerçaient chacun un effort $=$ 100 kil., et faisaient parcourir au point d'application $0^{m}.81$ par seconde, ils travaillaient ainsi 4 heures 1/2; d'où travail journalier dépensé par cheval $= 81^{km} \times 16200'' =$ 1312200 km.

Ce manége élevait au moyen d'une pompe, pendant le même temps, 41540 kil. d'eau, à $42^m.88$ de hauteur; soit travail utile journalier pour un cheval = 593745 km. = 0.45 × travail dépensé sur le manége et la pompe.

Je ne reproduis pas une troisième observation de M. Hachette sur le manége des Invalides, tant elle me paraît contestable. Les deux observations précédentes sont elles-mêmes un peu incertaines, l'auteur les ayant accompagnées de calculs qui ne s'accordent pas toujours avec les données; celle qui suit, rapportée par M. *Combes*, d'après M. *Bobert*, mérite sans doute plus de confiance.

Le manége est ce qu'on appelle sur certaines mines un *baritel*, machine fort analogue au manége dit des maraîchers. Son rayon = $8^m.178$; celui des tambours embrassé par les cordes = $1^m.692$; le diamètre des poulies ou *molettes* sur lesquelles les cordes passent pour se rendre au puits d'extraction = $1^m.97$; elles pèsent $187^k.6$ chacune, le diamètre de leurs axes = $0^m.07$; le poids d'une tonne vide = 178^k22 ; le poids du contenu de la tonne, 562 kil.; le poids du cable sur une longueur égale à celle du puits = $324^k.37$.

Deux chevaux sont attelés à la fois et travaillent six heures par jour en deux relais.

Chaque cheval exerce un effort moyen $= \frac{99.08 + 33.46}{2} = 66^k.27$; la vitesse du point d'application = $1^m.39$; d'où travail dépensé par cheval, en une seconde $92^{km}.11$, et dans sa journée, 1989690^{km}, chiffre bien supérieur à celui qui est généralement admis, et qui peut être dû à la grandeur du rayon du manége. Le travail journalier, utilisé par la machine, est pour chaque cheval = 1316023 = 0.66 × travail dépensé.

MANGANÈSE. Métal obtenu isolé, en 1774, par Scheel et Gahn, assez semblable à la fonte blanche, mais moins dur que celle-ci. Il n'est fusible qu'à une très-haute température, s'oxyde rapidement par le grillage à l'air et passe ainsi, si on le calcine énergiquement, à l'état d'*oxyde rouge*, contenant manganèse 0.7275 + oxygène 0.2725. Tous les oxydes du manganèse passent eux mêmes à l'état d'oxyde rouge, par une calcination suffisamment prolongée au contact de l'air. La présence du manganèse dans les combinaisons ou les mélanges se reconnaît aisément à la couleur verte qui se développe lorsqu'on les chauffe au rouge avec la potasse caustique au creuset de platine.

Nous avons indiqué (page 36) deux méthodes pour séparer le manganèse de ses dissolutions.

MANIVELLE. 1. Organe que l'on rencontre dans un grand nombre de machines sous la forme indiquée *planche* XIX, *fig.* 4; il reçoit ordinairement le mouvement moteur à l'aide d'une BIELLE

(*fig.* 1 et 2, même *planche*) ou, au contraire, il le transmet à cette pièce, de sorte qu'il convient d'étudier la *manivelle* et la *bielle* réunies, et comme un système unique ayant pour objet principal de changer un travail circulaire continu en un travail alternatif ou réciproquement.

2. Nous avons déjà, avec M. *Willis*, longuement étudié cette importante combinaison mécanique à l'article *Bielle* (p. 127), mais seulement au point de vue toujours borné de la *cinématique;* nous allons la considérer ici avec MM. *Poncelet* et *Moseley* sous un aspect plus pratique, c'est-à-dire en tenant compte des *forces* qui agissent sur le système, et dont la cinématique se condamne à faire abstraction. Nous n'étudierons pas toutes les combinaisons de ce système que peut offrir la pratique des arts, mais nous nous efforcerons, en procédant du simple au composé, d'indiquer la marche que l'on pourra suivre pour obtenir les équations des efforts et des travaux, dans les cas qu'il ne nous est pas permis de développer ici.

3. *Bielle verticale, effort constant.* Supposons d'abord que la bielle cA (*fig.* 1, *planche* XCI) agisse sur le bouton c de la manivelle Cc dans une direction constante, verticale par exemple, avec un effort constant P_1. Soient θ l'arc variable de rayon *un* compris à un instant quelconque entre la verticale Co et la direction du bras b de la manivelle; P_2 la résistance verticale agissant à l'extrémité d'un rayon horizontal a_2, l'équation des moments donne entre les efforts P_1 P_2 les relations

$$P_1\, a_1 = P_1 b \sin.\theta = P_2\, a_2\,; \qquad P_1 = \frac{P_2 a_2}{b \sin.\theta}. \;.\;.\;.\quad (1)$$

qui montrent que P_1 devrait être infini lorsque c passe aux points o et π pour lesquels $\sin.\theta = o$. Ces points sont ceux qu'en théorie on nomme les *points morts* de la manivelle. Elle ne les franchirait pas, et il pourrait y avoir rétrogradation du système dans l'hypothèse que nous considérons, si l'inertie de la bielle de la manivelle et du système tournant ne lui venait en aide. $P_1\, a_1$ acquiert d'ailleurs sa valeur maximum Pb, lorsque le bras coïncide avec l'horizontale QQ' pour laquelle on a $\sin.\theta = \pm 1$

4. Multipliant les deux membres de l'équation (1) par $d\theta$ accroissement élémentaire de θ, on a entre les travaux instantanés de P_1 P_2 l'égalité

$$P_1 b \sin.\theta\, d\theta = P_2\, a_2\, d\theta. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (2)$$

qui intégrée entre les limites $\theta = o$ et $\theta = \Theta$ donne pour les travaux T_1 T_2 de P_1 P_2

$$P_1\, b\,(1 - \cos.\Theta) = T_1 = P_2\, a_2\, \Theta = T_2. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (3)$$

5. Pour un demi-tour $oQ\pi$, $\theta = \pi$, $\cos.\pi = -1$

$$P_1\, 2b = P_2 a_2 \pi. \quad \ldots \quad (4)$$

Si de π en $\pi Q' o$, la force P_1 changeait de sens en conservant sa direction verticale, on aurait évidemment pour le travail relatif à un tour entier

$$P_1\, 4b = 2\pi P_2 a_2. \quad \ldots \quad (5)$$

et la force tangentielle constante F qui, appliquée au bouton c de la manivelle, ferait, dans le même temps, le même travail que la force verticale P_1 serait, dans l'un et l'autre cas, donnée par la condition

$$F\pi b = P_1 2b; \quad F = \frac{2}{\pi} P_1 = 0.6366197. \times .. P_1 .. \quad (6)$$

elle est un peu moindre que les $\frac{2}{3}$ de P_1.

6. *On tient compte des poids et des frottements du système.* Rapprochons-nous des faits réels et, avec M. *Moseley*, restituons à la bielle et à la manivelle les poids respectifs B et M ordinairement considérables dont elles jouissent, et qui chargent les axes C, c au centre et au bouton. Soient

ρ_1 ρ_2 les rayons respectifs de ces axes,

φ_1 φ_2 les *angles* du frottement qui leur correspondent,

$\rho_1 \sin.\varphi_1$, $\rho_2 \sin.\varphi_2$ seront les moments respectifs du frottement autour de ces axes relatifs à une charge d'*un* kilogramme.

P_1 est toujours la puissance verticale, et P_2 une force verticale qui fait équilibre à P_1 sur le système en s'opposant à la rotation, et qu'on suppose agir de haut en bas.

Décomposons le poids propre M de la manivelle supposé réuni à son centre de gravité, en une composante verticale W_2 passant par le centre de rotation C, et une autre composante verticale $M - W_2$ appliquée au bouton c. A cette dernière composante ajoutons le poids B de la bielle, et faisons pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} M - W_2 + B = W_1. \ldots \\ \text{et } M + B = W = W_1 + W_2. \ldots \end{array}\right\} \quad (7)$$

W étant ainsi le poids total de la bielle et de la manivelle.

Supposons enfin que P_1 est toujours $> (P_2 + W)$ et que le mouvement du système est uniforme. Ecrivant l'équation des moments autour de C, et remarquant que

$$a_1 = b \sin.\theta. \quad \ldots \quad (8)$$

il vient

$$(P_1 \pm W_1) b \sin.\theta = P_2 a_2 + (P_1 \pm W_1) \rho_2 \sin.\varphi_2 + \{P_1 \pm (P_2 + W)\} \rho_1 \sin.\varphi_1 \quad (9)$$

d'où, en transposant et réduisant

$$P_1 \{b \sin.\theta - \rho_2 \sin.\varphi_2 - \rho_1 \sin.\varphi_1\} = P_2 [a_2 \pm \rho_1 \sin.\varphi_1]$$
$$\pm W \rho_1 \sin.\varphi_1 \mp W_1 [b \sin.\theta - \rho_2 \sin.\varphi_2] \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

équation qui lie les efforts mouvant et résistant; les signes supérieurs correspondant au cas où la manivelle descend, et les signes inférieurs au cas où P_1 agit en montant.

7. En mettant cette équation sous la forme

$$P_1 = \frac{P_2 [a_2 \pm \rho_1 \sin.\varphi_1] \pm W \rho_1 \sin.\varphi_1 \mp W_1 [b \sin.\theta - \rho_2 \sin.\varphi_2]}{b \sin.\theta - (\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1)} \ldots (11)$$

on voit que l'équilibre exigerait que P_1 fût *infini* pour toutes les positions qui donnent

$$\sin.\theta = \frac{\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b} \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

de sorte que, en y faisant abstraction des forces d'inertie, le système présenterait autant de *points morts* qu'il y a de positions du bras pour lesquelles l'équation (12) est satisfaite. Or, dans une révolution complète, sin. θ prenant *quatre* fois toutes les valeurs comprises entre 0 et 1, coïncidera quatre fois avec la valeur de la fraction qui forme le second membre, et il y a dès lors *quatre points morts* dans une révolution entière, fait qui paraît n'avoir point échappé aux praticiens, et que la théorie de M. *Moseley* met en évidence pour la première fois. On voit même que la valeur de P_1 étant, sinon infinie, du moins excessivement grande entre les deux points morts supérieurs et les deux points morts inférieurs, toute position de la manivelle entre ces limites respectives ou voisine de ces limites peut être, en pratique, et abstraction faite des forces d'inertie, considérée comme correspondante à un *point mort*.

8. *Equations du travail.* Pour obtenir le rapport entre les travaux simultanés T_1, T_2 de P_1, P_2 appelons toujours $d\theta$ l'arc élémentaire de rayon *un* décrit par le bras b de la manivelle, $a_2\,d\theta$ sera le chemin décrit dans le même temps par le point d'application de P_2 dont le travail élémentaire deviendra $dT_2 = P_2 a_2 d\theta$; multiplions par $a_2 d\theta$ les deux membres de l'équation (10), intégrons cette équation entre les limites $\theta = \pi - \Theta$ et $\theta = \Theta$, il vient :

$$P_1 [2\,b \cos.\Theta - (\pi - 2\,\Theta)(\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1)] =$$
$$= \left[1 \pm \frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2}\right] T_2 \pm W \rho_1 \sin.\varphi_1 (\pi - 2\,\Theta)$$
$$\pm W_1 [2\,b \cos.\Theta - (\pi - 2\,\Theta)\rho_2 \sin.\varphi_2] \ldots \quad (13)$$

Remarquant que $2\,b \cos.\Theta$ est le chemin décrit par le point d'application de P_1 dans la direction de cette force pendant que le bras

passe de l'angle Θ à l'angle $\pi - \Theta$, de sorte que $P_1\, 2b \cos.\Theta$ est le travail T_1 dépensé sur le bouton c, pendant la durée du travail résistant T_2, il vient après avoir substitué à la place de P_1 sa valeur

$$P_1 = \frac{T_1}{2b\cos.\Theta} = \frac{T_1}{2b}\,\text{séc.}\Theta \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

et en réduisant :

$$T_1\left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)\text{séc.}\,\Theta\left(\frac{\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b}\right)\right] =$$

$$= \left[1 \pm \frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2}\right] T_2 \pm W\,(\pi - 2\,\Theta)\,\rho_1 \sin.\varphi_1$$

$$\mp W_1\,[2b \cos.\Theta - \rho_2 \sin.\varphi_2\,(\pi - 2\,\Theta)] \ldots \quad (15)$$

les signes supérieurs correspondant toujours au cas où la manivelle descend, et les signes inférieurs au cas où elle monte.

9. Cette équation (15) qui paraît d'abord fort compliquée, est en même temps très-générale, et elle se simplifie beaucoup, ainsi qu'on va le voir, dans toutes les applications pratiques. Ainsi, ajoutons les deux valeurs qu'elle embrasse sous ses doubles signes, faisons $T_d + T_m =$ la somme des travaux de P_1 pendant la descente et pendant la montée de la manivelle, t_d et t_m les travaux respectifs de P_2 pendant cette même descente et cette même montée, il vient pour une révolution complète

$$(T_d + T_m)\left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)\text{séc.}\,\Theta\left(\frac{\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b}\right)\right] =$$

$$= (t_d + t_m) + (t_d - t_m)\,\frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

équation qui suppose toujours que P_1 et P_2 agissent verticalement, et que dans chaque demi-révolution P_1 ne travaille qu'en décrivant l'arc $(\pi - 2\Theta)$.

10. Si la machine est à double effet $t_d - t_m = 0$ et le dernier terme disparaît. Si (ce qui est le cas le plus ordinaire) la force P_1 travaille, en outre, *constamment*, Θ devient 0 et faisant alors $T_d + T_m = T_M =$ travail moteur et $t_d + t_m = T_R =$ travail résistant, on obtient, pour un nombre quelconque de révolutions complètes, l'expression simple

$$T_M\left\{1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b}\right)\right\} = T_R \ldots\ldots \quad (17)$$

d'où, en négligeant les puissances supérieures de $\sin.\varphi_1 \sin.\varphi_2$

$$T_M = \left\{1 + \pi\left(\frac{\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{2b}\right)\right\} T_R \ldots\ldots \quad (18)$$

11. Ces expressions étant indépendantes du poids W de la bielle, on voit que ce poids n'a pas d'influence sur les travaux relatifs à un tour entier ; ou, plus exactement, tant que P_1 et P_2 agiront verticalement et que l'on aura $P_1 > (P_2 + W)$ l'augmentation du travail consommé par les frottements dus au poids de l'équipage pendant la descente, est compensée par la diminution qui a lieu pendant la montée.

12. *Les forces* P_1 P_2 *ayant des directions quelconques, mais parallèles*, les formules (17) (18) seront encore applicables, si le frottement dû au poids de la manivelle peut être négligé.

13. La condition $P_1 > (P_2 + W)$ que ces formules supposent aura d'ailleurs lieu pour toutes les positions possibles de la manivelle, si elle a lieu pour sa position horizontale, position qui, en négligeant ici les frottements, fournit elle-même la relation

$$P_1 b = P_2 a_2 \quad \text{ou} \quad P_2 = P_1 \frac{b}{a_2} \text{. . . . . (19)}$$

elle sera donc toujours satisfaite si l'on a

$$P_1 > P_1 \frac{b}{a_2} + W \quad \text{ou} \quad P_1 \left\{ 1 - \frac{b}{a_2} \right\} > W \text{. . (20)}$$

ce qui exige que le bras de levier a_2 de la résistance soit plus grand que la longueur b de la manivelle, et d'autant plus grand que le premier membre de la dernière inégalité excèdera plus W. Ces conditions étant généralement réalisées dans la pratique, nous renverrons à l'ouvrage de M. *Moseley* pour l'examen du cas où P_1 serait $< P_2 + W$, remarquant toutefois que, même alors, l'équation (15) serait encore vraie, mais seulement pendant la descente.

14. *Si le système menait un volant*, comme dans les machines à vapeur à double effet et à balancier, on aurait, en appelant Q le poids de ce volant, ρ le rayon de son axe, φ l'angle du frottement de cet axe, E le chemin total décrit par le piston de la machine pendant un temps quelconque, $\frac{E}{2b}$ pour le nombre de coups de piston accomplis dans le même temps, $2b$ étant nécessairement la longueur de la course.

$$2\pi \rho Q \text{ tang.} \varphi \times \frac{E}{2b} = \pi Q E \frac{\rho}{b} \text{ tang.} \varphi \text{. . . . . . (21)}$$

serait donc le travail du frottement du volant, et dès lors, pour ce même temps que l'on suppose comprendre un nombre quelconque de révolutions complètes, on aurait

$$T_M = \left\{ 1 + \pi \left(\frac{\rho_2 \text{ sin.} \varphi_2 + \rho_1 \text{ sin.} \varphi_1}{2b} \right) \right\} T_R + \pi Q E \frac{\rho}{b} \text{ tang.} \varphi \text{. . (22)}$$

pour la valeur du travail moteur T_M qu'il faudrait dépenser sur le système, afin qu'un travail résistant T_R pût être effectué par la pièce de la machine que l'arbre de la manivelle conduit directement, et T_M et T_R étant toujours supposés parallèles.

15. *Manivelle double* (*planche* XCI, *fig.* 2). Ce système bien connu se retrouve surtout dans les machines des bateaux à vapeur, dont l'arbre moteur porte deux coudes dont les plans forment un angle droit et auxquels deux bielles, assez longues pour être considérées comme conservant sensiblement les positions verticales et parallèles, impriment le mouvement de rotation qui se transmet directement aux roues.

16. Etudions d'abord la période pendant laquelle les deux bielles agissent *chacune* avec un effort P_1 d'un même côté du centre C. Au moment où la manivelle la plus élevée forme avec la verticale supérieure un angle θ, la seconde inclinée de $\frac{\pi}{2}$ sur la première formera, avec Co, l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$, dont le sinus $= \cos.\theta$. Conservant les notations déjà employées, cherchons le bras de levier b_1 de la puissance $2P_1$ qui aurait un moment égal à la somme des moments des efforts $P_1 + P_1$ appliqués en B et E.

Remarquant que l'on peut multiplier un terme quelconque par $1 = \sqrt{2} \times \cos.\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times \sin.\frac{\pi}{4}$, il vient

$$b_1 = \frac{b}{2}(\sin.\theta + \cos.\theta) = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\sin.\theta\cos.\frac{\pi}{4} + \cos.\theta\sin.\frac{\pi}{4}\right);$$

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}\sin.\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right). \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (23)$$

c'est la valeur (8) de a_1, à cela près que la longueur b du bras de la manivelle y est divisée par $\sqrt{2}$ et que θ y est remplacé par $\theta + \frac{\pi}{4}$. Donc, en faisant ces substitutions dans l'équation (10) et multiplant tous ses termes par 2, on obtiendra l'équation des efforts dans le système à manivelle double, qui devient ainsi, pour cette période, identique avec celle relative à une manivelle simple dont le bras aurait même longueur divisée par $\sqrt{2}$, et dont la direction couperait toujours en deux parties égales l'angle droit mobile BCE. Mais cette équation n'a lieu qu'autant que les deux bras sont à la fois d'un même côté de la verticale, c'est-à-dire autant que l'angle θ_1 compris entre la verticale et le bras *moyen* imaginaire a pour limite inférieure $\frac{\pi}{4}$, et pour limite supérieure $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, limites dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Substituant donc dans la double équation (13) $\frac{\pi}{4}$ à Θ; $\frac{b}{\sqrt{2}}$ à b, multipliant tous ses termes par 2 et faisant la somme de ses deux valeurs, en appelant t_2 le travail résistant relatif à *une* seule manivelle, il vient

$$4\,P_1 \left[b - \frac{\pi}{2}(\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1)\right] = 4\,t_2 \ldots \quad (24)$$

équation dans laquelle $4\,t_2$ est le travail transmis à la résistance pendant la montée et la descente, mais seulement durant les périodes où les deux manivelles sont à la fois d'un même côté quelconque de la verticale. A ce travail partiel il faut donc ajouter, pour avoir celui qui est relatif à une révolution entière, les travaux accomplis pendant que le bras moyen imaginaire parcourt les deux *quadrans* pour lesquels la verticale du centre passe entre les deux bras réels.

Or, dans cette situation des bras réels, les efforts P_1 et P_1 en tant qu'ils se transmettent à l'axe central C, sont parallèles et de sens contraires, de sorte que cet axe n'est plus soumis qu'à la pression toujours positive $+ 2\,(P_2 + W)$. L'équation des moments pendant cette période devient ainsi, en appelant θ_1 l'angle formé par la direction du bras moyen avec la verticale

$$2\,P_1 \left[\frac{b}{\sqrt{2}} \sin.\theta_1 - \rho_2 \sin.\varphi_2\right] = 2\,P_2\,[a_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1]$$

$$+ 2\,W \rho_1 \sin.\varphi_1 \mp 2\,W_1 \left[\frac{b}{\sqrt{2}} \sin.\theta_1 - \rho_2 \sin.\varphi_2\right] \quad (25)$$

1° multipliant tous ses termes par $a_2\,d\theta_1$ — 2° intégrant d'abord entre $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_1 = o$; puis entre $\theta_1 = \pi$ et $\theta_1 = \frac{3}{4}\pi$ ou mieux prenant deux fois l'intégrale entre les premières limites qui est la même que pour les deux autres, on parvient à une équation dont on divisera tous les termes par $a_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1$; 3° en négligeant dans cette équation les produits de $\sin.\varphi_1$ par $\sin.\varphi_2$ et les puissances supérieures de chacune de ces quantités, ce qui permet de considérer le multiplicateur $\dfrac{1}{a_2\left[1 + \dfrac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2}\right]}$ comme sensiblement $= \dfrac{1}{a_2}\left[1 - \dfrac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2}\right]$, elle se simplifiera, en conservant le double signe $\pm$ à son dernier terme; 4° faisant la somme des deux valeurs qu'elle implique, afin d'ajouter le cas de la descente à celui de la

montée, et y introduisant à la place de cos. $\frac{\pi}{4}$ sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$, le terme à double signe disparaîtra. 5° Ajoutant alors à l'équation (24) celle

$$4 P_1 \left\{ b(\sqrt{2}-1) - b \frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2} (\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{2} \rho_1 \sin.\varphi_2 \right\} = 8 t_2 + 2\pi W \rho_1 \sin.\varphi_1 \ldots \ldots \quad (26)$$

à laquelle on parvient, et dans laquelle $8\,t_2$ exprime le travail total de la résistance pendant les périodes où les bras réels *ne sont pas* du même côté de la verticale, on obtient une équation résultante que pour abréger je ne reproduis pas. 6° Appelant $T^1{}_M$ le travail moteur des forces $2 P_1$ pendant une révolution complète du bras moyen, $T^1{}_R$ le travail résistant pendant la même période, remarquant que

$$2 P_1 \times \frac{4b}{\sqrt{2}} = T^1{}_M \quad \text{d'où} \quad 4 P_1 = \frac{T^1{}_M}{b\sqrt{2}} \ldots \ldots \quad (27)$$

substituant cette valeur de $4 P_1$ dans l'équation résultante, il vient enfin pour l'équation du travail dans ce système pendant une révolution complète

$$T^1{}_M \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2}\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b}\right) \right\} = T^1{}_R + 2\pi W \rho_1 \sin.\varphi_1 \ldots \ldots \quad (28)\ (*)$$

17. Cette formule suppose que les puissances et les résistances travaillent verticalement. Toutefois, si le frottement dû aux poids des bielles et des manivelles pouvait être négligé, et dès lors W supposé $= 0$, l'équation (28) s'appliquerait encore au cas où les forces auraient des directions quelconques, pourvu qu'elles fussent parallèles.

Si l'on divise cette équation par le coefficient de $T^1{}_M$, on a, en négligeant les termes en sin. φ_1 sin. φ_2 qui ont plus d'une dimension

$$T^1{}_M = T^1{}_R \left\{ 1 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\rho_1 \sin.\varphi_1}{a_2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2\rho_2 \sin.\varphi_2 + \rho_1 \sin.\varphi_1}{b}\right) \right\} + 2 W \pi \rho_1 \sin.\varphi_1 \ldots \ldots \quad (29)$$

18. *Cas des bielles courtes.* La bielle l est parfois tellement courte par rapport au bras b de la manivelle qu'il n'est plus possible de négliger son obliquité, et de la considérer comme agissant suivant une direction constante. Tel serait le cas dans le système de la

(*) J'ai vérifié ces longs calculs avec quelque soin, et j'ai été conduit à introduire dans le dernier terme de cette équation le facteur 2, qui m'a paru omis dans l'équation de M. *Moseley*.

figure 3, *planche* XCI. Nous supposerons, pour fixer les idées, que le bras de la manivelle b reçoit son mouvement de rotation continu d'une bielle courte l directement articulée en A sur la tige du piston d'une machine à vapeur, tige qui se meut elle-même d'un mouvement rectiligne alternatif et dont l'articulation A est guidée par une glissière courant dans des coulisses rectilignes fixes. Cette combinaison se retrouve dans les locomotives et dans un grand nombre de machines fixes modernes.

19. *Faisons d'abord abstraction des frottements du guide;* appelons P_2 l'effort dirigé suivant l'axe de la bielle que le bouton oppose à la rotation du bras de la manivelle à un instant quelconque du mouvement, P_1 l'effort de la tige du piston à ce même instant, h la distance, à ce même instant, de l'articulation A au centre C de la manivelle, β l'angle BAC = inclinaison de la bielle sur la verticale h, et θ l'angle du bras de la manivelle avec CA = h. Le triangle ABC donne (*Géom.*, B. 32) les relations :

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= h^2 + b^2 - 2bh\cos.\theta \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h &= b\cos.\theta \pm \sqrt{l^2 - b^2\sin.^2\theta} = b\cos.\theta + l\cos.\beta \ . \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{car} \quad Bm = l\sin.\beta = b\sin.\theta \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{d'où} \ \sin.\beta = \frac{b}{l}\sin.\theta \quad \text{et} \quad \cos.\beta = \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\theta} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

on a donc en différentiant

$$dh = -(b\sin.\theta\, d\theta + l\sin.\beta\, d\beta) \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Or $-dh$ et $bd\theta$ sont évidemment les chemins élémentaires simultanément décrits par les points A et B, et nous savons par le théorème de *Willis* (p. 128) que ces chemins sont entre eux réciproquement comme les cosinus des angles de la bielle avec les directions respectives du mouvement; on aura donc, en faisant BF tangente en B

$$\left.\begin{aligned} \frac{-dh}{bd\theta} &= \frac{\cos.FBO}{\cos.\beta} = \frac{\sin.OBC}{\cos.\beta} = \frac{\sin.(\theta+\beta)}{\cos.\beta} \\ &= \frac{\sin.OBC}{\sin.ABm} = \frac{\sin.OBC}{\sin.AOC} = \frac{CO}{b} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

20. Mais l'équilibre dynamique exige que P_1 et la force tangentielle variable $P_2\sin.(\theta+\beta)$ que nous faisons = F soient dans le rapport inverse de leurs vitesses virtuelles, c'est-à-dire des chemins élémentaires estimés dans leurs directions propres; on a donc

$$\frac{\sin.(\theta+\beta)}{\cos.\beta} = \frac{F}{P_1} = \frac{OC}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$P_1 \times OC = Fb \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

de sorte que P_1 agit à chaque instant pour faire tourner le système, avec un moment qui est le produit de cette force par la distance au centre C du point O, où la direction de la bielle rencontre le diamètre perpendiculaire à la direction des coulisses.

On a d'ailleurs $P_1 = P_2 \cos.\beta$ tant que l'on fait abstraction des frottements du guide A, qu'il n'est cependant jamais permis de négliger lorsque la bielle est très-courte.

21. *Pour tenir compte des frottements du guide* A, on remarquera que la direction de la résultante R des efforts P_1 P_2 est nécessairement inclinée sur la normale aux coulisses d'un angle z égal à l'angle φ du frottement. En effet (p. 379), puisqu'il y a, à chaque instant, réaction des coulisses, z ne peut être $> \varphi$, et puisqu'il y a glissement du guide sur ces coulisses, z ne peut être $< \varphi$, donc $z = \varphi$ et P_1 P_2 R étant en équilibre, on a

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sin.\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin.\left\{\frac{\pi}{2} - (\beta - \varphi)\right\}} = \frac{\cos.\varphi}{\cos.(\beta - \varphi)} \ldots\ldots (36)$$

22. Au reste, on arriverait encore au même résultat en observant que l'effort P_2 de la bielle donnerait une composante $P_2 \cos.\beta$ dans la direction et en sens inverse de P_1, plus une composante $P_2 \sin.\beta$ perpendiculaire à P_1 qui serait détruite par la réaction des coulisses, mais qui donnerait lieu toutefois à un frottement $P_2 \sin.\beta \operatorname{tang}.\varphi$, de sorte que l'on aurait

$$P_1 = P_2 \cos.\beta + P_2 \sin.\beta \operatorname{tang}.\varphi = P_2 \left(\frac{\cos.\beta \cos.\varphi + \sin.\beta \sin.\varphi}{\cos.\varphi}\right) \quad (37)$$

ou comme ci-dessus (36)

$$P_1 = P_2 \operatorname{séc}.\varphi \cos.(\beta - \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

23. Si l'on suppose P_2 constante et que P_1 varie suivant la condition qu'il y ait équilibre, T_1 et T_2 étant toujours les travaux simultanés respectifs de ces forces, on a facilement

$$\begin{aligned} dT_1 &= -P_1\, dh = + P_2 \operatorname{séc}.\varphi \cos.(\beta - \varphi)\,[b \sin.\theta\, d\theta + l \sin.\beta\, d\beta] \\ &= P_2 \operatorname{séc}.\varphi \left\{b \sin.\theta \cos.(\beta - \varphi)\, d\theta + l \sin.\beta \cos.(\beta - \varphi)\, d\beta\right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT_2 &= -P_2\, dh \cos.\beta = + P_2\,[b \sin.\theta\, d\theta + l \sin.\beta\, d\beta] \cos.\beta \\ &= P_2 \left\{b \sin.\theta \cos.\beta\, d\theta + l \sin.\beta \cos.\beta\, d\beta\right\} \ldots\ldots\ldots (40) \end{aligned}$$

24. Intégrant les dernières expressions de dT_1 et dT_2 entre les

limites $\int_0^\pi$ pour l'angle θ, et les limites correspondantes $\int_0^0$ de l'angle β, ce qui rend nulles les intégrales relatives à ces dernières limites, il vient (Intégrales, §§ 24 et 25), et en ayant égard aux relations (30, 31, 32) du triangle BAC

$$T_2 = P_2 b \int_0^\pi \left[1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \sin.\theta\, d\theta = -P_2 \frac{b^2}{l} \int_0^\pi \left[\frac{l^2}{b^2} - 1 + \cos.^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} d.\cos.\theta$$

$$T_2 = P_2 \frac{b^2}{l} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{b^2} - 1\right) \text{log. hyp.} \left(\frac{l-b}{l+b}\right) \right\} \ldots\ldots \quad (41)$$

$$T_1 = P_2\, b \text{ séc.}\varphi \int_0^\pi \sin.\theta \cos.(\beta - \varphi)\, d\theta$$

$$= T_2 + P_2 \frac{b^2}{l} \text{tang.}\varphi \int_0^\pi \sin.^2\theta\, d\theta$$

$$T_1 = T_2 + P_2 . \frac{\pi b^2}{2l} \text{tang.}\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Eliminant P_2 et réduisant, on a pour l'équation des travaux T_1, T_2 accomplis en A et en B pendant un nombre quelconque de demi-tours entiers de la manivelle, et en tenant compte du frottement du guide

$$T_1 = T_2 \left\{ 1 + \frac{\pi \text{ tang.}\varphi}{2 - \left(\frac{l^2}{b^2} - 1\right) \text{log. hyp.} \left[\frac{l-b}{l+b}\right]} \right\} \ldots\ldots \quad (43)$$

25. La valeur du coefficient du frottement $f = \text{tang.}\varphi$ n'étant qu'approximativement connue, je pense qu'on obtiendra T_1 avec une exactitude suffisante pour la pratique, en faisant

$$\text{log. hyp.} \left[\frac{l-b}{l+b}\right] = \frac{(l-b)-(l+b)}{l+b} - \ldots = \frac{-2b}{l+b}$$

ce qui réduira le dénominateur à $2\frac{l}{b}$ et donnera la formule approchée très-simple

$$T_1 = T_2 \left\{ 1 + \frac{\pi b}{2l} \text{tang.}\varphi \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

26. Prenant avec Coulomb $\text{tang.}\varphi = 0.1$ pour le coefficient du frottement de fer sur fer avec enduit de suif renouvelé, on aurait ainsi $T_1 = 1.06\, T_2$ ou $1.04\, T_2$ suivant que l serait $= 2.5b$ ou $3b$ de sorte qu'à cette dernière limite le frottement du guide augmente de $\frac{1}{25}$ le travail total.

MANOMÈTRE, mot dérivé de μανος, *rare*, et par lequel on désigne les instruments qui servent à mesurer le degré de *rareté*, de *raréfaction* et, par extension, de *densité* ou de *condensation* des fluides élastiques. On connaît un très-grand nombre de manomètres assez différents en principe, parmi lesquels le plus généralement répandu est le *manomètre à air libre* représenté en T (*fig.* 8, *planche* L). Le seul d'entre eux qui donne lieu à quelque calcul, et dont nous ayons dès lors à nous occuper ici, est le manomètre dit *à air comprimé* représenté, quant à son principe, *fig.* 4, *planche* XCI, et qui ne diffère du manomètre à air libre qu'en ce que, après avoir reçu comme celui-ci une certaine quantité de mercure *mpqo*, son orifice supérieur S a été ensuite hermétiquement fermé, la partie *o*S du tube d'une longueur arbitraire mais connue L emprisonnant alors de l'air atmosphérique à la pression barométique *b* et à la température *t*.

Admettons que, dans cet état, le manomètre soit mis en communication par sa branche ouverte avec un réservoir R, contenant un gaz ou une vapeur, dont on veut connaître la tension totale T; T étant la hauteur de la colonne de mercure qui ferait équilibre à la force élastique qui presse intérieurement les parois du réservoir R en tous leurs points.

Cette tension T agissant en *m* abaissera le mercure en *p* dans une branche, et si le tube est parfaitement calibré comme il le doit être, le niveau du mercure s'élèvera en *n*, dans l'autre branche, d'une quantité *on* précisément égale à *mp*, de sorte que la dénivellation totale sera $2mp = qn = h$.

Dans cet état de choses, la tension totale T du réservoir aura évidemment pour mesure la colonne de mercure *h* augmentée de celle qui ferait équilibre au ressort de l'air comprimé de S en *n*. Cet air qui, à la pression atmosphérique *b* et à la température *t*, occupait d'abord une longueur L, ayant passé à une longueur moindre $(L - \frac{1}{2}h)$ et peut être à une température t' différente de *t* ferait équilibre par son ressort (p. 93) à une colonne de mercure

$$= \frac{(1+\alpha t')\,b\,L}{(1+\alpha t)\,(L-\frac{1}{2}h)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

α étant le coefficient 0.003665 de la dilatation de l'air par degré. On a donc pour la valeur de la tension totale dans l'espace R

$$T = h + \frac{(1+\alpha t')\,b\,L}{(1+\alpha t)\,(L-\frac{1}{2}h)} \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

et si l'on a eu le soin de construire ou de fermer l'instrument par

le haut à une température t égale à celle t' du lieu où il sera mis en observation, la formule (2) se simplifiera et deviendra

$$T = h + b \frac{L.}{L - \frac{1}{2} h} \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Si l'on voulait graduer le manomètre en fonction des tensions T, et à partir du niveau naturel mo du mercure ou du zéro de l'instrument, on aurait la relation suivante qui se déduit directement de la précédente

$$\frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \left\{ L + \frac{T}{2} - \sqrt{\left(L - \frac{T}{2}\right)^2 + 2 L b} \right\} \ldots (4)$$

de sorte que, pour obtenir une graduation en *atmosphères*, on ferait successivement $T = b \ldots 2b \ldots nb$ et l'on aurait

$$\frac{1}{2} h = 0 \ldots \frac{1}{2} \left\{ L + b - \sqrt{L^2 + b^2} \right\} \ldots \text{etc.}$$

Le manomètre à air comprimé, destiné à mesurer la tension de la vapeur dans les chaudières, reçoit habituellement une forme qui le rend moins fragile, et dont la *figure* 5, *planche* XCI, donnera une idée. Une boîte métallique renferme une quantité de mercure, dont le niveau naturel AB n'atteint jamais l'orifice supérieur R du tube OR qui met la surface du mercure en communication directe avec la vapeur de la chaudière; le tube manométrique Spq plonge par sa partie inférieure dans ce bain de mercure, jusqu'à une petite distance de son fond, sa ligne zéro correspondant alors au niveau naturel AB. Pour obtenir cette dernière condition, le tube Spq a dû être plongé alors qu'il était encore ouvert par le haut S, et, afin de rendre ses indications plus exactes, il convient de ne le fermer en S qu'après avoir rempli sa partie supérieure Smo d'air sec à la pression $b = 0.76$ et ayant la température t' à laquelle il sera soumis pendant son service, et qui dépasse ordinairement 40°.

Négligeant les effets de la dilatation du mercure, du verre et de la boîte métallique, remarquons que la tension totale T de la chaudière en se transmettant à la surface AB du niveau naturel, abaissera ce niveau de l dans la boîte jusqu'en A' B', et l'élèvera au contraire dans le tube d'une quantité h telle que ω étant la section constante du tube S, et A la section totale et constante du mercure dans la boîte, on aura

$$\omega h = (A - \omega) l \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{\omega}{(A - \omega)} h \ldots (5)$$

de sorte que la tension totale T sera mesurée par une colonne de mercure $h + l = \frac{A}{(A - \omega)} h$ augmentée de celle qui fait équilibre

au ressort de l'air emprisonné en Sn, et qui se réduit à $b\frac{L}{(L-h)}$, lorsque l'on a fait $t=t'$, comme on le suppose ici. Donc

$$T=\frac{A}{(A-\omega)}h+\frac{bL}{(L-h)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Faisant pour abréger $\frac{(A-\omega)}{A}=m$ on aura pour graduer l'instrument, en partant du niveau naturel AB ou du zéro mo du tube

$$h=\tfrac{1}{2}\left\{L+mT-\sqrt{(L-mT)^2+4mLb}\right\}.\,. \quad (7)$$

relation qui se simplifiera immédiatement pour chaque cas particulier, et dans laquelle on ferait successivement $T=b$. . . . $2b$. . . . $3b$. . . . nb pour graduer le tube en *atmosphères*, suivant l'usage.

MARÉES. Oscillations périodiques de la mer en vertu desquelles elle inonde et abandonne successivement les côtes.

Le *flux* ou *flot* est le mouvement vers la côte, le *reflux*, *jusant* ou *ebe* est le mouvement inverse.

Après le flot, la mer est *pleine*, c'est la *haute mer ;* lorsque après s'être retirée, elle est parvenue à sa plus grande dépression, on l'appelle *basse mer*. Dans quelques localités, la mer reste stationnaire après le flot, on dit alors qu'elle est *étale*.

La durée de l'étale varie beaucoup avec les localités ; presque nulle en certains points, de sept à huit minutes sur d'autres, elle se prolonge, pour certains ports, de plus de deux heures, au Havre et à Honfleur par exemple.

La période moyenne de deux marées est d'environ 24 heures 50 minutes $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que si, aujourd'hui, la mer est pleine à 7 heures du matin dans un lieu donné, elle sera encore pleine demain au même lieu, vers $7^h.50^m.30^s$.

Mais il y aura entre ces deux hautes-mers une haute mer intermédiaire vers la demi-période à peu près, de sorte que l'intervalle moyen entre deux pleines mers consécutives, au même lieu, est d'environ 0.52 de jour. Le moment de la basse mer ne divise toutefois qu'à peu près également cet intervalle moyen, car la mer emploie toujours plus de temps à descendre qu'à monter. Cependant, on admet que, en général, la mer est deux fois haute et deux fois basse en 24^h50^m sur un même point, bien qu'il ne manque pas d'exceptions à la règle.

Les vitesses des courants de flot et de jusant sont généralement d'autant plus considérables que la dénivellation de la marée a été plus grande. Un cheval au galop ne peut, à la basse mer, fran-

chir la longueur de la plage de Saint-Michel sans être atteint par la marée ascendante ; sur les parages du Cotentin, la vitesse du flot est encore de trois à quatre mètres ; sur d'autres points, elle s'abaisse à 1m.50.

La différence des niveaux de haute à basse mer n'est pas moins variable. Elle change avec les lieux, et, pour un même lieu, avec les circonstances atmosphériques, et surtout les positions du soleil et de la lune. De 6m.41, à Brest, à l'époque des syzygies équinoxiales, elle n'est que de 2m.80 à l'entrée de l'Adour, et s'élève à 12m.30 à Granville, atteint à peine 1m dans la Méditerranée, et 1m.60 dans le golfe de Venise. C'est la moitié de ces dénivellations extrêmes que l'on appelle l'*unité de hauteur* du lieu où elles ont été observées, et le *niveau moyen* y devient ainsi un plan élevé de l'*unité de hauteur* au-dessus des plus basses mers ou du *zéro* des cartes marines.

L'*unité de hauteur* = 3m.12 à Calais ; 3m.96 à Boulogne ; 2m.68 à Dunkerque ; 4m.40 à Dieppe ; 3m.57 au Havre, etc.

En général, la plus grande dénivellation des eaux, pour chaque point, a lieu *vers* le temps des nouvelles et des pleines lunes de chaque mois, et particulièrement de celles des équinoxes. Ce sont les marées dites de *vives eaux*, *malines* ou *reverdies*. La plus petite dénivellation a lieu *vers* l'époque des *quadratures*, et particulièrement vers les quadratures des solstices ; ce sont les marées de *mortes eaux*.

Les attractions exercées par la masse du soleil, et surtout par celle de la lune sont les causes influentes de la production des marées. La théorie fixe à 1 et 2.35 le rapport des actions respectivement exercées par ces deux astres à leurs moyennes distances ; elle explique un peu vaguement, par l'inertie, le retard des marées sur l'instant où la résultante des attractions luni-solaires a atteint son maximum, retard en vertu duquel l'événement ne se produit que 36 heures environ après le moment de la plus grande intensité ; elle attribue aux résistances locales, aux obstacles qui, sur la côte, s'opposent à la marche des eaux, un autre retard constant pour chaque port, et qui y est connu en heures et minutes sous le nom d'*établissement du port* ; enfin, et bien que, en dépit de travaux illustres, elle se trouve parfois en désaccord avec les faits observés, on lui doit des méthodes simples pour calculer, avec beaucoup d'approximation pour certains points, et l'heure et la grandeur des marées, phénomènes qui n'intéressent pas moins les travaux maritimes que la navigation. Si nous ne reproduisons pas ici ses utiles formules, c'est que leur calcul exige des *données* qu'on ne trouve que dans *la Connaissance des temps* ou dans l'*Annuaire des longitudes*, et que ce dernier ouvrage, que tous les ingénieurs possèdent, expose chaque année ces méthodes avec détails (Voyez MERS).

MARIOTTE (Edme), né en Bourgogne, prieur de Saint-Martin-

sous-Beaune, reçu à l'Académie des sciences, en 1666 (année de la fondation), mort le 12 mai 1684.

La loi connue en France sous le nom de *Loi de Mariotte* a reçu en Angleterre celui de *Loi de Boyle* (*Boylean law*).

MARTEAUX. (*Planche* XCI, *fig.* 6 et 7). L'article suivant est le résumé de la théorie des marteaux enseignée par M. *Poncelet* à l'Ecole de l'artillerie et du génie de Metz, dès l'année 1828. Mon illustre maître a bien voulu m'autoriser à en enrichir l'*Aide-mémoire des Ingénieurs*, qui lui doit déjà plusieurs théories très-importantes.

Quelle que soit l'espèce de marteau, M. *Poncelet* partage l'action de chacune des cames en trois périodes :

La première, relative à la durée du choc ou de la compression mutuelle de la came et de la braie pendant le choc;

La deuxième, commençant à l'instant où finit le choc et se terminant à celui où la came quitte la braie. Pendant cette deuxième période, la came et la braie marchent avec une vitesse commune;

La troisième a pour origine l'instant où la came quitte la braie; elle finit au moment où la came suivante vient de nouveau choquer le manche.

En outre, il suppose que le choc de la came contre le manche a toujours lieu dans un plan horizontal, passant par les axes de rotation C, C' de l'arbre à came et de la hurasse (*fig.* 6, *planche* XCI).

Cela posé, soient, pendant la *période du choc*,

N l'effort de compression exercé par la came sur le manche,

ω la vitesse angulaire de l'arbre à cames à l'instant du choc que l'on considère,

ω' celle du manche au même instant,

$R = Ct$, $R' = C't$ les distances respectives du point de contact t de la came aux axes de rotation C de l'arbre à cames et C' du marteau,

f' la tangente de l'angle du frottement des tourillons de la hurasse,

ρ' leur rayon,

f, ρ les quantités semblables pour l'arbre à cames,

m' la masse totale du marteau, de sa tête, de ses ferrures, etc.,

dm' un élément quelconque de cette masse,

r' la distance de cet élément quelconque à l'axe C',

m, dm, r les quantités analogues dans le système de l'arbre à cames C,

l la distance C'G du centre de gravité du marteau à l'axe C'.

La durée du choc est tellement courte par rapport au temps pendant lequel on considère le mouvement que, pendant cette période du choc, il est permis de négliger toutes les forces autres que les

forces d'inertie ou de compression. Le moment NR' de l'effort de compression peut donc être égale à celui des forces d'inertie augmenté de celui du frottement développé par ces mêmes forces. Or pour une variation $d\omega'$ de la vitesse angulaire du marteau, la FORCE d'inertie (pag. 785) de dm' est $r'\frac{d\omega'}{dt}dm'$, son moment par rapport à l'axe C' est $r'^2\frac{d\omega'}{dt}dm'$, et le moment des forces d'inertie totales du système du marteau devient

$$\frac{d\omega'}{dt}\int r'^2 dm' = \frac{d\omega'}{dt}M'R'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en faisant le moment d'inertie du manche de la tête des ferrures, etc., ou $\int r'^2 dm' = M'R'^2$; M' est donc une masse qui, réunie à l'extrémité du rayon R' en t, donnerait au système du marteau le moment d'inertie dont il jouit en effet; on a ainsi, par définition,

$$M' = \frac{\int r'^2 dm'}{R'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La pression sur les tourillons du marteau pendant le choc est due à N et à la résultante des forces d'inertie. Or cette dernière peut être assimilée à la force d'inertie de la masse totale m' supposée réunie à son centre de gravité G, elle devient ainsi $\frac{d\omega'}{dt}m'l$, et comme elle est toujours sensiblement parallèle à N, la pression sur les tourillons de la hurasse pendant le choc est

$$N \pm \frac{d\omega'}{dt}m'l \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

le signe inférieur s'appliquant aux marteaux frontaux et aux marteaux à l'allemande qui sont, comme on sait, soulevés de l'autre côté de l'axe C'. La relation d'équilibre autour de l'axe de la hurasse à un instant quelconque du choc devient ainsi

$$NR' = \frac{d\omega'}{dt}M'R'^2 + f'\rho'\left\{N \pm \frac{d\omega'}{dt}m'l\right\} \ldots\ldots (4)$$

On en déduit pour la valeur de la compression pendant le choc

$$N = \frac{d\omega'}{dt}\left\{\frac{M'R'^2 \pm f'\rho' m'l}{R' - f'\rho'}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Raisonnant pour l'arbre à cames C comme on l'a fait pour le marteau, remarquant que, pendant la courte durée du choc, N peut être considérée comme la seule force qui presse les tourillons;

faisant $\int r^2\,dm = MR^2$, de sorte que, de même qu'en (2), M est une masse déterminée par la condition

$$M = \frac{\int r^2\,dm}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

on obtient facilement la relation suivante pour l'équation d'équilibre autour de l'arbre à cames, à un instant quelconque du choc

$$\frac{d\omega}{dt} MR^2 = NR + f\rho N = N(R + f\rho). \quad \ldots \quad (7)$$

d'où l'on tire cette autre valeur de N

$$N = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{MR^2}{(R + f\rho)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Eliminant cet effort inconnu N entre (5) et (8), on a

$$MR^2 . d\omega = \frac{(R + f\rho)}{(R' - f'\rho')} \left\{ M'R'^2 \pm f'\rho' m' l \right\} d\omega'. \quad . \quad (9)$$

Le multiplicateur de $d\omega'$ dans le second membre revient à

$$\frac{\left(1 + \frac{f\rho}{R}\right) R}{\left(1 - \frac{f'\rho'}{R'}\right) R'} \left\{ 1 \pm \frac{f'\rho' m' l}{M'R'^2} \right\} M'R'^2 = \left[\frac{1 + \frac{f\rho}{R}}{1 - \frac{f'\rho'}{R'}} \right] \left\{ 1 \pm \frac{f'\rho' m' l}{M'R'^2} \right\} M'RR'$$

faisant pour abréger

$$\left[\frac{1 + \frac{f\rho}{R}}{1 - \frac{f'\rho'}{R'}} \right] \left\{ 1 \pm \frac{f'\rho' m' l}{M'R'^2} \right\} = K. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

en observant que K, qui ne contient que des données constantes, diffère toujours très-peu de *un*, l'équation (9) prend la forme

$$d\omega . MR^2 = d\omega' . KM'RR'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Intégrant d'une part entre $\int_{\omega}^{\Omega}$ ou la plus grande et la plus petite vitesse angulaire Ω et ω de l'arbre à cames, et de l'autre entre $\int_{0}^{\omega'}$ en remarquant que $\omega' = \frac{\omega R}{R'}$ puisqu'après le choc la vitesse $\omega' R'$ du point de contact est la même que celle ωR de la came, on a

$$(\Omega - \omega) MR^2 = KM'RR'\omega' = KM'R^2\omega. \quad \ldots \quad (12)$$

expression d'où l'on déduit pour le rapport des vitesses angulaires de l'arbre à cames avant et après le choc

$$\omega = \frac{\Omega M}{M + KM'} = \frac{\Omega}{1 + \frac{KM'}{M}} \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

K étant toujours peu différent de l'unité, on voit que la vitesse angulaire ω après le choc différera d'autant moins de celle Ω qui avait lieu au commencement du choc que la masse M' sera plus petite par rapport à M. Or il arrive toujours, en pratique, que la masse de l'arbre à cames et de son équipage excède et souvent de beaucoup la masse totale du marteau. On peut donc admettre, sans avoir à craindre aucune erreur notable, que la vitesse angulaire Ω', que l'on déduit de l'observation du nombre de tours accomplis par l'arbre à cames dans un temps donné, est sensiblement égale à la moyenne arithmétique entre les vitesses angulaires inconnues Ω et ω, ce qui les détermine l'une et l'autre (13) :

$$\Omega' = \frac{\Omega + \omega}{2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

$$\Omega = \frac{2\Omega'(M + KM')}{2M + KM'}; \qquad \omega = \frac{2\Omega' M}{2M + KM'} \ldots \ldots (15)$$

et permet d'établir la consommation de travail faite par l'arbre à cames (pag. 1090) pour chaque choc.

En effet, la force vive du système avant le choc se réduisait à celle $\Omega^2 MR^2$ de l'arbre à cames ; après le choc, elle se compose de celle $\omega^2 MR^2$ que possède encore cet arbre augmentée de celle $\omega'^2 M' R'^2$ que le marteau a acquise. La perte de force vive due au choc serait donc la différence

$$\Omega^2 MR^2 - \omega^2 MR^2 - \omega'^2 M' R^{2\prime} \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

mais le choc, en même temps qu'il a donné lieu à cette perte de force vive, a de plus imprimé au système du marteau une force vive $+ \omega'^2 M' R'^2$, qui a vaincu son inertie, et doit être considérée dès lors comme correspondant à un travail utile. Le travail total de l'arbre à cames pour chaque choc, celui que le moteur doit lui restituer s'élève donc en effet à

$$\frac{(\Omega^2 - \omega^2) MR^2}{2} = \frac{2\Omega'^2 MR^2 M'K}{2M + KM'} \ldots \ldots \ldots (17)$$

ou à la moitié de la différence des forces vives de l'arbre à cames, avant et après le choc. Donc, s'il y a n cames sur l'arbre et μ révolutions de l'arbre par minute, le travail T_1 consommé par seconde pendant la première période deviendra

$$T_1 = \frac{n\mu}{60} \cdot \frac{2\Omega'^2 MM' R^2 K}{(2M + KM')} = \frac{n\mu}{30} \cdot \frac{\Omega'^2 MM' R^2 K}{(2M + KM')} \ldots (18)$$

Deuxième période. Poursuivons le mouvement de la came depuis la fin du choc jusqu'au moment où elle quitte le manche. La vitesse variant très-peu pendant la levée du marteau, il n'y a pas à tenir compte de l'inertie. Soient donc (*fig.* 6 et 7, *planche* XCI)

a l'angle formé par $l = C'G$ avec l'horizontale, quand le marteau est au repos,

α l'angle dont le marteau s'est écarté de sa position initiale, à un instant quelconque de la levée,

S l'effort normal que la came doit exercer sur la braie pour vaincre toutes les résistances,

$Q = m'g$ le poids du marteau, de son manche, de ses ferrures, etc.

On a pour la pression du marteau sur son axe de rotation

$$\sqrt{(Q \pm S\cos.\alpha)^2 + S^2 \sin.^2\alpha} = 0.96\,(Q \pm S\cos.\alpha) + 0.4\,S\sin.\alpha \ldots \quad (19)$$

le signe inférieur étant toujours celui qui convient aux marteaux allemands et frontaux qui sont soulevés *en avant* de leur axe, et le signe supérieur aux marteaux à queue ou montés en *martinets* (*fig.* 6 et 7).

Observant (*fig.* 7) que le moment du frottement de la came par rapport à l'axe C' est nul, puisque la partie du manche sur laquelle elle agit est censée dirigée vers cet axe, on a facilement pour l'équation des moments autour de C'

$$SR' = Ql\cos.(a+\alpha) + f'\rho'\left\{0.96\,(Q \pm S\cos.\alpha) + 0.4\,S\sin.\alpha\right\} \ldots \quad (20)$$

multipliant par $d\alpha$, puis intégrant entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha'$ pour avoir le travail que S développe pendant toute la durée du contact, on obtient pour la valeur moyenne S' de S

$$S' = \frac{\int_0^{\alpha'} SR'\,d\alpha}{R'\alpha'} \ldots \ldots \quad (21)$$

en remarquant que $R'\alpha'$ est le chemin parcouru par le point d'application de cet effort moyen, ou

$$S' = \frac{Q(h + 0.96 f'\rho'\alpha')}{R'\alpha' \mp [0.96\sin.\alpha' \pm 0.4\,(1-\cos.\alpha')]} \ldots \quad (22)$$

en faisant $l\left\{\sin.(a+\alpha') - \sin.a\right\} = h =$ levée du centre de gravité du marteau, les signes supérieurs s'appliquant toujours aux marteaux *à queue* ou montés en martinets.

On a donc enfin pour le travail total de la came pendant une

levée, entre la fin du choc et le moment où elle quitte le manche,

$$S'R'\alpha' = \frac{Q[h + 0.96 f' \rho' \alpha'] R'\alpha'}{R'\alpha' \mp [0.96 \sin.\alpha' \pm 0.4(1 - \cos.\alpha')]} \ldots \quad (23)$$

Or le moteur que, pour fixer les idées, on peut supposer être une roue hydraulique, doit à chaque instant développer une quantité de travail égale à celle de toutes les résistances. En désignant par

P' l'effort moyen que cette roue exerce à la distance R_1 de l'axe de rotation,

f_1 la tangente de l'angle du frottement entre la came et le manche.

θ l'angle décrit par l'arbre à cames à un instant quelconque de la levée au-dessous du plan CC' et θ' sa plus grande valeur,

N_1 le poids de l'arbre à cames et de son équipage, y compris la roue.

la pression sur les tourillons C de ce système pourra être exprimée avec assez d'approximation par

$$N_1 + P' \mp S' \ldots \quad (24)$$

le signe supérieur correspondant toujours aux marteaux à queue. On aura donc facilement en multipliant par $d\theta$ les moments par rapport à C la relation suivante entre les quantités de travail élémentaires autour de cet axe

$$P'R_1 d\theta = S'R d\theta + f_1 S'R d\theta \frac{(R+R')}{RR'} \cdot \frac{R'\alpha'}{2} + f\rho \left\{ N_1 + P' \mp S' \right\} d\theta \ (^*) \quad (25)$$

(*) On voit que le travail élémentaire exprimé par le second terme du deuxième membre a été assimilé par M. *Poncelet* à celui du frottement d'un engrénage. Pour rapprocher l'expression ci-dessus de celle qui est donnée à la formule 2e de la page 659, il faut remarquer 1°, que l'arc d'approche étant nul, m y devient zéro; 2° que fdT est le $f_1 S'R d\theta$ de la formule (25); 3° enfin, que l'on a évidemment

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n'} :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'} \quad \text{d'où} \quad \pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) = \left(\frac{R+R'}{RR'}\right)\frac{\pi R'}{n'}$$

$$\text{et} \quad n'R'\alpha' = 2\pi R' \quad \text{ou} \quad \frac{\pi R'}{n'} = \frac{R'\alpha'}{2}$$

puisque $R'\alpha'$ est considéré comme le *pas*. Dans le cas des marteaux à l'allemande le facteur

$$\frac{(R+R')}{RR'} \cdot \frac{R'\alpha'}{2}$$

pourrait conserver la même forme, mais l'engrénage étant alors du genre de ceux appelés *coniques*, les R et R' du terme ci-dessus devraient pour plus de rigueur exprimer les rayons moyens de *développement* (pag. 655).

Je profite de cette note pour faire remarquer que la non-conformité du terme ci-dessus avec celui des cahiers lithographiés de M. *Poncelet* est due à une erreur du lithographe qui a omis le R diviseur.

Intégrant entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \theta'$ pour avoir le travail que P' développe pendant la durée de cette période; remarquant en outre que l'on a en général $R\theta = R'\alpha$ d'où $\theta' = \frac{R'\alpha'}{R}$, il vient pour la valeur moyenne P'

$$P' = \frac{S' R \left[1 + f_1 \frac{(R+R')}{RR'} \cdot \frac{R'\alpha'}{2} \right] + f\rho \left\{ N_1 \mp S' \right\}}{R_1 - f\rho} \ldots (26)$$

d'où l'on déduira pour la quantité de travail que le moteur doit développer pendant la seconde période

$$P' R_1 \theta' = P' R_1 \frac{R'\alpha'}{R} \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

ou pour celui T_2 par seconde

$$T_2 = \frac{n\mu}{60} P' R_1 \theta' \text{ kilogrammètres} \ldots \ldots (28)$$

Troisième période. On obtient immédiatement l'effort moteur P'' qui doit vaincre les résistances pendant la marche à vide, en faisant $S' = 0$ dans la valeur (26) de P'; il vient

$$P'' = \frac{f\rho N_1}{R_1 - f\rho} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Quant au chemin décrit par le point d'application de P'' pendant cette période, il s'obtient en remarquant que n étant le nombre de cames, l'intervalle qui les sépare à la distance R de l'axe est $\frac{2\pi R}{n}$. Par conséquent l'arc parcouru à vide à cette distance, est

$$\frac{2\pi R}{n} - R\theta' = \frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'$$

de sorte que l'arc décrit par P'' à la distance R_1 devient

$$\frac{R_1}{R} \left\{ \frac{2\pi R}{n} - R'\alpha' \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

et le travail T_3 par seconde relatif à cette troisième période devient lui-même

$$T_3 = \frac{n\mu}{60} P'' \frac{R'}{R} \left\{ \frac{2\pi R}{n} - R'\alpha' \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (31)$$

Ce qui donne pour le travail moteur total T_m que la roue doit transmettre par seconde (18) (28) (31).

$$T_m = T_1 + T_2 + T_3 \quad \text{ou}$$

$$T_m = \frac{n\mu}{60} \left\{ \frac{2\Omega'^2 M M' R^2 K}{2M + KM'} + P' R_1 \theta' + P'' \frac{R_1}{R} \left(\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha' \right) \right\} \quad (32)$$

De nombreuses observations ont constaté depuis plus de vingt ans l'exactitude pratique de cette théorie. (*Voyez* V^e section du *Cours de machines lithographié* de M. Poncelet.)

MASSE. Lorsque nous voulons obtenir soit l'accélération φ, soit la vitesse v, soit l'accroissement de vitesse dv qu'une force F supposée constante imprimera à un corps d'un poids connu P, nous nous demandons, en fait, 1° quelle accélération g, quelle vitesse $g \times t$ ou quel accroissement de vitesse $g \times dt$, ce même corps supposé libre recevrait soit en une seconde, soit dans le temps t, soit seulement dans l'élément du temps dt de l'action de son propre poids, puis 2° les expériences de Galilée nous ayant démontré la grande loi de la *proportionnalité* entre les forces et les vitesses (p. 778), nous cherchons, parfois sans en avoir conscience, le quatrième terme des *proportions* :

$$P : g :: F : \varphi \qquad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{g}{P} F = \frac{F}{M}$$

$$P : g \times t :: F : v \qquad \text{d'où} \quad v = \frac{g}{P} F t = \frac{F}{M} t$$

$$P : g \times dt :: F : dv \quad \text{d'où} \quad dv = \frac{g}{P} F dt = \frac{F}{M} dt$$

et, ainsi que nous l'avons fait remarquer (p. 784), c'est la nécessité de rapporter les circonstances d'un mouvement quelconque aux mesures *absolues* que nous donne seule la chute des graves (p. 338) qui introduit dans toutes ces proportions et expressions l'inévitable rapport $P : g$ ou quotient $\frac{P}{g} = M$.

Ce rapport ou quotient du poids P d'un corps divisé par la vitesse $g = 9.8088$ qu'il acquerrait après être tombé librement dans le vide au bout d'une seconde, nous le désignons par M, et nous l'appelons la *masse* du corps dont le poids est P.

Un même corps, suivant qu'il occupe une latitude ou une autre, ou qu'il est porté sur une même verticale en deux points différents, a en effet deux poids différents $P P'$, mais les vitesses g, g' qui correspondent à ces deux points variant elles-même comme ces poids, il en résulte que sa masse M reste constante, et que l'on a

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = M$$

La *masse* n'est donc pour nous rien autre chose qu'un pur rapport ou quotient dérivant de *proportions* analogues à celles qui ont été posées ci-dessus. Et nous ne savons pas ni n'avons heureusement aucun besoin de savoir si, comme le veulent les physiciens et les

métaphysiciens, la masse $M = \frac{P}{g}$ d'un corps de poids P est en effet la *quantité de matière* dont il se compose.

MASTICS et LUTS. 1. Je réunis sous ce titre les composés plastiques dont on revêt les surfaces et les joints qui doivent s'opposer au passage des liquides, des gaz, des vapeurs et parfois de l'humidité ou du calorique. L'*adhésivité* dont jouissent la plupart de ces composés permet encore de les employer pour réunir ou souder entre elles certaines matières homogènes ou hétérogènes, telles que la pierre à la pierre, le verre au métal, etc., etc.

2. *Lut ordinaire*. Ce lut qui sert surtout à recouvrir les bouchons de liége des appareils de chimie, se compose de farine de graine de lin broyée dans un mortier avec la quantité de colle d'amidon suffisante pour former une pâte bien homogène. On en applique une petite couche sur les bouchons, et on la recouvre de quelques bandes de papier Joseph trempées, pour plus de sûreté, dans la colle forte.

3. *Cavendish* broyait des amandes dans un mortier et les incorporait dans de la colle forte légère. Ce lut resiste à la pression d'une colonne d'eau d'environ $0^{m}.10$.

4. *Lut à la chaux*. On l'emploie non-seulement pour fermer les joints des appareils, mais aussi pour le raccommodage des vases de verre et de terre.

On le prépare en malaxant rapidement de la chaux vive en poudre fine avec un blanc d'œuf délayé dans son volume d'eau. Quelquefois, on remplace le blanc d'œuf par une dissolution de colle forte assez légère pour demeurer liquide à froid.

Il faut employer ce lut à l'instant même où l'on vient de le préparer, car il durcit très-promptement.

On enlève assez facilement ce lut après l'avoir entortillé pendant quelque temps avec des chiffons humides, auxquels on peut ajouter au besoin un peu d'acide hydrochlorique.

5. *Lut gras*. Ce lut est le meilleur que l'on connaisse pour assurer les joints des appareils distillatoires. Il résiste à un assez haut degré de chaleur; il est peu pénétrable aux acides et aux liqueurs spiritueuses. Il adhère avec force aux métaux, au grès, au verre, pourvu que ces substances soient parfaitement sèches.

Pour le préparer, on calcine de l'argile, on la broie, on la tamise, on la met dans un mortier de fonte, et on l'incorpore peu à peu avec de l'huile siccative en la battant avec un pilon, jusqu'à ce que le mélange bien homogène et bien ductile ait pris la consistance d'une pâte ferme. On l'applique comme le lut ordinaire (2), et on le recouvre de bandes de toiles imbibées de lut à la chaux (4).

6. *L'huile siccative* s'obtient en faisant bouillir de l'huile de lin ou d'œillet, avec un seizième de son poids de litharge en poudre.

On continue l'ébullition à un feu modéré jusqu'à ce que l'écume commence à roussir. On retire alors le mélange du feu. On laisse reposer l'huile et on la décante.

7. *Pour luter l'extérieur des vases*, c'est-à-dire les recouvrir d'une couche légère de matières propres à les garantir contre le ramollissement ou contre les effets des changements subits de température, on emploie : argile réfractaire 10 + argile fusible 1 + sable 2 + crottin de cheval $\frac{1}{16}$. On bat le tout avec un peu d'eau; puis on en ajoute assez pour l'amener à consistance de crême. On plonge le vase, la cornue par exemple, dans ce liquide épais; on l'y fait tourner afin de la recouvrir également; on la tient ensuite au-dessus du feu pour sécher cette première couche, puis on la re plonge dans le mélange; puis on sèche de nouveau, et l'on replonge encore jusqu'à ce que la couche de lut ait une épaisseur convenable, soit environ cinq millimètres.

8. *Pour fixer les viroles de cuivre et les garnitures métalliques*, on fait fondre ensemble à la température la plus basse : cire jaune 1 + résine sèche (arcanson) 4 ou 5. On introduit peu à peu dans le mélange fondu 1 d'ocre rouge en poudre fine et préalablement desséchée. On laisse pendant quelques instants la température s'élever un peu au-dessus de 100°, jusqu'à ce que la matière ne donne plus d'écume et n'éprouve plus d'agitation. On laisse refroidir en agitant continuellement afin de tenir l'ocre en suspension. Pour employer ce mastic, on le ramollit à la chaleur, et l'on chauffe les pièces sur lesquelles on l'applique.

9. *Pour sceller les robinets des fontaines, assembler et lier les tuyaux de grès*, on emploie le *mastic des fontainiers*. On le prépare en fondant 1 de résine (arcanson du commerce) dans une marmite de fonte, et y ajoutant par petites parties, dès que la liquéfaction est complète, 2 de ciment de brique bien desséché et encore chaud. On le coule ensuite en pains sur une plaque de fer huilé. On concasse ces pains en petits morceaux ; on les refond dans un vase en fer, en agitant continuellement, mais seulement jusqu'à consistance de pâte molle. On applique le mastic à chaud sur les objets à sceller, un peu chauffés eux-mêmes, et l'on repasse les joints avec un fer chaud qui les lisse.

10. *Le mastic de Dihl* convient surtout pour le rejointoiement des dalles, et pour enduire les pierres qui doivent recevoir des peintures. Il se compose d'huile siccative (6) et de ciment de briques, de poteries de grès, de terre à porcelaine, ou d'argile calcinée, suivant la teinte qu'on désire, en quantité suffisante pour que le mélange prenne une consistance plastique assez forte.

Les surfaces et les joints doivent être complétement nettoyés, puis *rustiqués*, tant pour augmenter les aspérités que pour enlever toute efflorescence; on y applique promptement le mastic à la truelle, en

le comprimant autant que possible et le lissant aussitôt. S'il s'opère des fissures par le dessèchement, on les rebouche avec du nouveau mastic, et on lisse en comprimant à la truelle. M. *Debret* qui a employé avec succès ce mastic à la chapelle de Saint-Denis, recommande de ne lui donner, en aucun cas, plus de huit à neuf millimètres d'épaisseur. Autrement, on n'obtiendrait pas une dessiccation convenable.

11. *Mastic des sauvages*. Les sauvages de la Nouvelle-Hollande fixent, dit-on, la pierre de leurs haches avec un mastic qui, analysé en 1810 par M. Laugier, a donné : résine jaune 49 + sable pur 37 + oxyde de fer 7 + chaux 3.

12. *Mastic des vitriers ;* il peut encore servir à reboucher les fentes et les trous de cheville dans les bois et boiseries avant de les peindre. On le prépare en faisant dessécher au feu de la craie ou du blanc d'Espagne en poudre, et malaxant sur une table en marbre avec assez d'huile siccative (6) pour obtenir une pâte consistante, mais ductile.

13. *Pour couvrir les terrasses, revêtir les bassins, souder les pierres et s'opposer à l'infiltration des eaux,* on emploie avec avantage un mastic formé de brique ou argile bien cuite 93 + litharge 7 + huile de lin. On réduit la brique et la litharge en poudre très-fine ; on les tamise ensemble et on ajoute au mélange la quantité d'huile de lin pure qui suffit pour qu'il prenne la consistance du plâtre gâché. On l'applique ensuite à la manière du plâtre, après avoir légèrement humecté avec une éponge les surfaces à recouvrir ou à rejoindre. S'il se forme quelques gerçures, on les bouche avec une nouvelle quantité de mastic. Ce mastic ne se solidifie qu'au bout de trois ou quatre jours (*Voyez* encore pag. 952).

14. *Pour les plaques et rebords de fonte serrés par des écrous.* On emploie pour les réunir le *mastic de fonte* formé de

Limaille de fer ou de fonte douce non oxydée. .	30	ou	50
Sel ammoniac (hydrochlorate).	1		1
Fleur de soufre très-propre.	1		2
	32	ou	53

On mélange le tout avec soin dans un mortier; on ajoute la quantité d'eau et parfois d'urine suffisante pour l'humecter et l'amener à l'état de pâte molle. On l'emploie alors immédiatement après sa préparation. Il s'échauffe entre les joints, se gonfle et les déborde ; on l'y chasse de nouveau par le *mattage*.

15. *Pour pièces en fer ou en fonte chauffées au rouge*, on forme une pâte épaisse de limaille 4 + glaise non pyriteuse 2 + ciment de briques 1, en délayant le tout avec de l'eau saturée de sel commun.

16. *Contre les fuites des tuyaux de vapeur*, on peut employer le

mastic rouge formé de céruse 1 + minium 1, bien mélangés et imbibés ensuite d'une petite quantité d'huile de lin que l'on ajoute par parties en battant le mélange pendant longtemps avec un marteau, jusqu'à ce que la pâte soit bien liée et assez ferme pour que l'on en puisse former de petits rouleaux sans la casser.

MAUPERTUIS (Pierre-Louis Moreau de), né à Saint-Malo, le 17 juillet 1689, mort à Bâle, le 27 juillet 1759, chez les fils du célèbre Jean Bernouilli.

MAXIMUM — MINIMUM. Considérons une fonction y de la seule variable x

$$y = f(x)$$

Soient a_1 a a' trois valeurs de x qui, substituées dans l'équation, fassent prendre à y trois valeurs différentes, savoir A_1 A A'. Si toutes les valeurs comprises entre a_1 et a ainsi que celles comprises entre a et a' rendent y plus petit que A, a rend y *maximum*.

Si, au contraire, toutes les valeurs de x comprises entre a_1 et a ainsi que celles comprises entre a et a', rendent y plus grand que A, a rend y *minimum*.

On voit par cette définition qu'il peut y avoir plusieurs *maximums* ou *minimums*, sans que jamais deux maximums ou minimums puissent se succéder immédiatement, et qu'une valeur de x n'en répondra pas moins à un maximum de la fonction, quand bien même une autre valeur de x rendrait y plus grand. De même pour le minimum.

Un maximum est donc tel que les valeurs qui le précèderaient ou le suivraient *immédiatement* soient plus petites que la sienne, et l'essentiel pour un minimum est que toutes les valeurs qui le précèderont et le suivront *immédiatement*, soient les unes et les autres plus grandes que la sienne.

Cela posé, voici l'énoncé d'une règle au moyen de laquelle on parviendra généralement, dans le cas d'une seule variable, à assigner toutes les valeurs et rien que les valeurs de x auxquelles les *maximums* et les *minimums* de la fonction proposée doivent répondre.

Règle. Egalez à zéro le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction.

Il en résultera une ou plusieurs valeurs de la variable parmi lesquelles seulement pourront se trouver celles qui rendront la fonction proposée *maximum* ou *minimum*.

Pour distinguer celles de ces valeurs qui jouissent de cette propriété de celles qui n'en jouissent pas, substituez ces valeurs tour à tour à la place de la variable dans les coefficients différentiels des ordres supérieurs de la fonction, jusqu'à ce que vous rencontriez un de ces coefficients que la substitution ne fasse pas évanouir.

Si ce coefficient est d'un ordre *impair*, la valeur substituée ne répond ni à un *maximum*, ni à un *minimum* de la fonction proposée.

Si au contraire, le premier coefficient différentiel que la substitution d'une valeur de la variable ne fait pas évanouir est d'un ordre *pair*, cette valeur répond à un *maximum* ou à un *minimum*, suivant qu'elle rendra ce coefficient différentiel *négatif* ou *positif*.

On obtiendra ensuite la valeur *maximum* ou *minimum* de la fonction en substituant dans la fonction cette même valeur de la variable.

Cette règle n'est pas tout à fait complète, puisqu'elle n'embrasse pas le cas où une valeur substituée rendrait quelque coefficient différentiel infini ou indéterminé (*Voyez* à ce sujet le grand *Traité de calcul différentiel et intégral* de M. Lacroix).

Applications : soit

$$y = 6x^7 - 70x^6 + 336x^5 - 861x^4 + 1274x^3 - 1092x^2 + 504x - 27$$

cela donnera

$$\frac{dy}{dx} = 42(x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12) =$$
$$= 42(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 84(3x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 123x^2 + 91x - 26) =$$
$$= 84(x-1)^2(x-2)(3x^2 - 13x + 13)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 84(15x^4 - 100x^3 + 240x^2 - 246x + 91) =$$
$$= 84(x-1)(15x^3 - 85x^2 + 155x - 91)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 168(30x^3 - 150x^2 + 240x - 123)$$

Les valeurs de x qui peuvent rendre y maximum ou minimum, sont donc données par l'équation $(x-1)^3 (x-2)^2 (x-3) = 0$, d'où l'on tire $x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3$.

Le premier coefficient différentiel que la valeur $x = 1$ ne fait pas évanouir est celui du quatrième ordre, qu'elle rend $= -504$. Cette valeur répond donc à un *maximum* qui est $y = +70$. Le premier coefficient différentiel que la valeur $x = 2$ ne fait pas évanouir, est celui du troisième ordre, d'où il suit que cette valeur de x ne répond ni à un *maximum*, ni à un *minimum*. Enfin, le premier coefficient différentiel que la valeur $x = 3$ ne fait pas évanouir, est celui du second ordre qu'elle rend $= 336$, d'où il suit que cette valeur répond à un *minimum* qui est $y = +54$.

Soit encore, avec un peu plus de développement :

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10$$

Le coefficient différentiel du premier ordre égalé à zéro, devient

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$$

d'où résulte $x=1$; $x=2$ et $x=3$ pour les valeurs qui *peuvent* rendre la fonction *maximum* ou *minimum*. Substituant tour à tour chacune de ces racines dans le coefficient différentiel du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-48x+44$$

aucune ne le fait évanouir, et les résultats correspondant à

$$x=1 \ldots\ldots 2 \ldots\ldots 3$$

ont respectivement pour signes

$$+ \qquad - \qquad +$$

donc, le coefficient étant d'ordre pair,

$x=2$ rend la fonction y *maximum* et $=2$
$x=1$ ou 3 rend y *minimum* et $=1$

La règle suivante, qui revient au fond à la première, paraîtra peut-être plus facile à saisir : 1° cherchez la valeur de x qui rend $\frac{dy}{dx}=$ à zéro ; 2° substituez cette valeur a de x dans l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Si le résultat est négatif } a rend y { *maximum*
Si le résultat est positif } { *minimum*

S'il est zéro, a ne rend y ni maximum ni minimum, à moins que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit en même temps zéro. Alors tout dépendra du signe de $\frac{d^4y}{dx^4}$, et ainsi de suite.

Et le même procédé étant appliqué à chacune des racines fournies par $\frac{dy}{dx}=0$, on obtiendra tous les *maximums* et les *minimums*.

Si $\frac{dy}{dx}=0$ ne donne pas de racines réelles, la fonction proposée n'a ni maximum ni minimum. Elle croît et décroît *ad infinitum*.

Soit $y=x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x+10$;

$$\frac{dy}{dx}=5x^4-28x^3+57x^2-50x+16=0$$

a pour racines $1,\ 1,\ 2,\ 1\frac{3}{5}$

Maintenant, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3-84x^2+114x-50$$

qui devient zéro pour $x = 1$. Donc $x = 1$ ne donne ni maximum, ni minimum, à moins que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit zéro, ce qui n'a pas lieu.

Mais prenant $x = 2$, le coefficient du second ordre devient (-4), donc cette valeur de x répond à un maximum, et soumettant la racine $1\frac{2}{3}$ au même procédé, on obtient encore un résultat semblable.

Soit encore $$y = x^3 - 18x^2 + 96x - 20$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 36x + 96 = 0$$

donne pour racine $x = 4$ et $x = 8$, or $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 36$.

Ici, la racine 8 rend ce coefficient différentiel positif, et la racine 4 le rend négatif, donc la première répond à un minimum, et la seconde à un maximum.

On trouverait encore que la fonction $y = \sqrt{2px}$ n'est susceptible ni de maximum, ni de minimum, puisque $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ ne peut être rendu nul.

$y = \frac{x}{1+x^2}$ devient maximum et $= \frac{1}{2}$ pour $x = 1$, et minimum et $= (-\frac{1}{2})$ pour $x = (-1)$.

Les règles dont on vient de faire l'application sont justifiées par la théorie suivante, imperturbablement reproduite depuis plus d'un siècle par tous les auteurs, y compris *Lagrange* (*Calcul des fonctions*, p. 442), et qui paraîtra peut-être plus adroite que lumineuse et convaincante.

Supposons, dit-on, que y soit en général une fonction de x et de h que nous représenterons par $f(x+h)$, et qui soit telle qu'elle devienne $f(x)$, dans le cas du maximum ou du minimum de y; c'est évidemment supposer, quel que soit le signe de h, que dans le cas du maximum, on a

$$f(x+h) < f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+h) - f(x) < 0,$$

ou enfin $$f(x+h) - f(x) \text{ négatif},$$

et pour le cas du minimum, quel que puisse être le signe de h,

$$f(x+h) > f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+h) - f(x) > 0,$$

ou enfin $$f(x+h) - f(x) \text{ positif}.$$

Or la SÉRIE de Taylor donne pour le développement de $f(x+h)-f(x)$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4}\cdot\cdot+\cdot\cdot$$

Ce développement devra donc être toujours négatif dans le cas du maximum, et toujours positif dans le cas du minimum, quels que puissent être la valeur et le signe de h, que l'on suppose d'ailleurs une quantité indépendante de x.

Or on prouve, à l'article *Série*, qu'on peut toujours donner à h une valeur assez petite pour que le premier terme de ce développement surpasse la somme S de tous les termes qui le suivent, et pour que dès lors il impose son propre signe au développement total. Mais il est visible que ce premier terme change de signe avec la quantité h qui n'y entre qu'à la première dimension. Donc il serait impossible que le développement fût *constamment* négatif comme l'exige le maximum, ou *constamment* positif comme l'exige le minimum, quel que puisse être le signe de h, si le premier terme ne disparaissait pas. Donc il disparaît, et la condition commune au cas du maximum et du minimum devient $\frac{dy}{dx}=0$. Cette condition remplie, c'est-à-dire le premier terme du développement ayant disparu en décélant les seules valeurs de x qui *puissent* fournir des maximums ou des minimums, on prouve par un raisonnement tout à fait analogue à celui employé plus haut, que le second terme du développement pourra toujours imposer son propre signe à la somme de tous ceux qui le suivent. Mais ce terme étant d'ordre pair, le signe de h, quel qu'il puisse être, ne changera pas celui de $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}$ ni dès lors celui de la série qui commence par ce second terme, et il y aura maximum ou minimum suivant que les valeurs de x tirées de $\frac{dy}{dx}=0$ et introduites dans $\frac{d^2y}{dx^2}$ rendront ce coefficient négatif ou positif. En reproduisant indéfiniment les raisonnements que nous venons d'indiquer avec la variante qu'exige chaque terme de rang pair, on parvient à motiver les règles posées ci-dessus ; mais c'est dans la théorie des courbes qu'il faudrait aller chercher leur véritable source et l'esprit des méthodes qui a dirigé les inventeurs.

Je renvoie aux traités spéciaux pour la recherche du maximum et du minimum des fonctions de plusieurs variables, ce genre de questions se présentant rarement dans la pratique des ingénieurs.

Résultats. Le produit d'un nombre quelconque de facteurs variables qui, pris ensemble, font une même somme, est un *maximum* lorsque tous ces facteurs sont égaux entre eux.

Réciproquement, le produit d'un nombre quelconque de facteurs qui font une même somme, ne peut être un maximum qu'à la condition que ces facteurs soient égaux entre eux.

Dans le cas de trois facteurs qui font une même somme, leur produit sera maximum s'ils sont égaux; mais s'ils sont inégaux en faisant toujours une même somme, leur produit augmentera à mesure que l'inégalité des facteurs diminuera.

De tous les parallélipipèdes de même surface, celui qui a la plus grande capacité est le cube qui a pour côté une ligne égale à la racine carrée de la sixième partie de cette surface.

De tous les triangles construits sur une même base et de même contour, le plus grand est le triangle isocèle.

De tous les polygones de même contour, celui dont l'aire est la plus grande a tous les côtés égaux.

Entre tous les cylindres droits de même surface, celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base a la plus grande capacité.

Entre tous les cylindres droits d'égale capacité, celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base a la moindre surface.

Le nombre x dont la racine $x^{\text{ème}}$ est un maximum, est la base des logarithmes népériens 2.718....

De toutes les fractions, celle z qui surpasse sa $m^{\text{ème}}$ puissance z^m du plus grand nombre possible, est $z = \sqrt[m-1]{1}$.

MÉCANIQUE (PRINCIPES GÉNÉRAUX). 1. L'expression *principe* emporte communément avec elle l'idée primordiale de *source*, *d'origine*, de *base*, elle est l'opposé des mots *but*, *terme*, *fin*. Sortes de prémisses certaines ou du moins incontestées, des *principes généraux* sembleraient devoir contenir et engendrer les conséquences, précéder celles-ci et ne point dériver d'elles, il n'en est point encore ainsi des théorèmes généraux que nous allons résumer en partie; et en leur conservant le nom de *principes*, on semble reconnaître que la place qu'ils occupent pour ainsi dire au sommet de l'édifice de la science, n'est pas celle qui convient à la régularité, à la simplicité, à l'économie de l'ensemble. « Aperçus d'abord dans le vague, di« sait *Carnot*, et en quelque sorte par instinct, appuyés plutôt sur « leur conformité avec les résultats particuliers auxquels on arri« vait par d'autres voies que sur des démonstrations générales et « rigoureuses, on pourrait ajouter que les *principes* sont encore à la place où le génie des inventeurs les entrevit d'abord, et qu'ils attendent qu'une main puissante et hardie ose reconstruire sur leur vaste base la science mécanique toute entière, range et contienne dans leur généralité féconde toutes les théories de détail que l'on traverse aujourd'hui pour remonter jusqu'à eux, et qui, il faut l'espérer, ne deviendront un jour que les conséquences naturelles

et les développements logiques des *principes généraux* qui les dominent toutes.

2. Quant à l'emploi de ces principes, on peut dire qu'il consiste surtout dans la mise en équation des problèmes, et si, comme je l'ai définie ailleurs, *la mécanique est en réalité la science qui enseigne à calculer les effets des forces, et à remonter de ces effets à la valeur des forces qui les ont produits*, l'ensemble de ces principes constitue la science elle-même réduite à sa plus simple expression.

3. Malgré leur importance, je ne les ai résumés ici que partiellement, laissant de côté ceux d'entre eux qui, moins fréquemment invoqués par les auteurs que l'ingénieur consulte habituellement, étaient en même temps moins nécessaires à la mise en équation des questions relatives au *calcul des machines*. Je renverrai pour tous les autres aux admirables notices que *Lagrange* leur a consacrées dans plusieurs parties de sa *Mécanique analytique*, et aux mots *Centre*, *Moments* et autres de cet *Aide-mémoire*.

4. Principe des vitesses virtuelles. *Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa* vitesse virtuelle, *la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé* (Lagrange).

5. Si l'on observe que ce produit de chaque force par le chemin décrit dans sa direction propre, par son point d'application, est ce que M. *Poncelet* a appelé depuis le *travail* de cette force, travail qui devient négatif, quand la force agit en sens inverse du chemin décrit par son point d'application, le principe des vitesses virtuelles peut se traduire ainsi dans le langage de la mécanique appliquée :

Le travail des puissances est égal au travail des résistances dans toute machine en équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées.

Remarquons, en outre, que, dans ce dernier énoncé, le mot Équilibre n'implique plus l'idée exclusive de repos ; qu'il comprend, au contraire, et l'état de repos et celui du mouvement *uniforme* de la machine, car un corps quelconque est pour nous en *équilibre* sous l'action des forces qui lui sont appliquées, tant que ces puissances ne modifient point les forces vives dont le corps pouvait être animé avant leur application.

On tire immédiatement du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre de toutes les machines, que l'on a coutume

d'étudier dans les *statiques*; on en déduit même le *principe de la composition des forces* qui leur sert de base, et que l'on attribue au géomètre flamand *Stevin*, quoiqu'il paraisse n'avoir pas été inconnu d'*Aristote*, d'après le passage suivant de ses *Questions mécaniques* : *Manifestum igitur quòd id quod secundùm diametrum in duabus fertur lationibus, necessariò secundùm laterum proportionem fertur.*

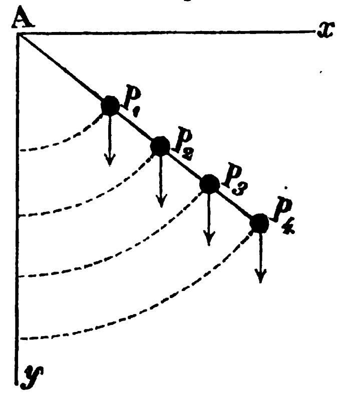
6. *Historique.* Suivant Lagrange, les Anciens n'auraient point connu le principe des vitesses virtuelles; bien qu'il soit facile de reconnaître dans le levier et les autres machines plus ou moins simples qui étaient à leur usage que *la résistance et la puissance y sont toujours en raison inverse des chemins respectivement et uniformément parcourus par l'une et l'autre dans le même temps*, *Guido Ubaldi* serait le premier qui aurait aperçu cette loi dans le levier et dans les moufles. *Galilée* l'aurait reconnue plus tard pour le plan incliné et pour les machines qui en dépendent, et il l'avait, dès lors, regardée comme une propriété générale de l'équilibre des machines (Voy. son *Traité de mécanique* et son *Troisième Dialogue*, édition de Bologne, 1655). Désignant par *momentum*, ce que M. *Poncelet* a appelé depuis *travail* élémentaire ou instantané, il y démontre qu'il y a équilibre (dans le sens statique du mot) entre deux puissances, lorsque leurs *momenta* sont égaux et de signe contraire. Cette notion est adoptée un peu plus tard par *Wallis*, et le principe de l'égalité des *momenta* devient la base de sa statique; il en déduit la théorie de l'équilibre des forces dans les machines principales; voy. sa *Mécanique*, publiée en 1669.

Descartes avait, il est vrai, dès 1657, déjà réduit toute la statique à un principe unique qui reviendrait au fond, d'après Lagrange, à celui de *Galilée*. Ce principe consiste en ce que : *Il ne faut ni plus ni moins de force* (travail), *pour élever un poids à une certaine hauteur, qu'il en faudrait pour élever un poids plus pesant à une hauteur d'autant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande* (Voir lettre 73 du tome Ier, publié en 1657). Il n'est pas difficile, en effet, de déduire de ce principe qu'il y aura équilibre entre deux poids, lorsqu'ils seront disposés de manière que les chemins verticaux qu'ils parcourraient dans le premier instant du mouvement, soient en raison réciproque de ces poids; mais alors, il faudrait peut-être conclure contre Lagrange, que ce germe du principe des vitesses virtuelles n'avait point échappé aux Anciens.

Près de vingt siècles avant *Descartes*, en effet, *Aristote* posait encore le principe suivant qui revient à celui du philosophe français, et qui ferait remonter à près de deux mille ans la notion, alors un peu confuse, du *travail des forces* : *Si igitur* α *est quod movet*, β *quod movetur*, γ *longitudo per quam motum est*, δ *tempus quo movetur, sanè æquali tempore* δ *æqualis vis* α *dimidium ipsius* β *movebit per longitudinem duplò majorem quàm* γ.

Quoi qu'il en soit, c'est à *Jean Bernouilli* que Lagrange attribue le mérite d'avoir aperçu, le premier, la grande généralité du principe des vitesses virtuelles (Voy. ses Lettres de 1717 à *Varignon*, insérées dans la *Mécanique* de celui-ci) ; D'Alembert en fit plus tard d'heureuses applications, mais c'est Lagrange lui-même qui, le prenant pour le fondement de sa *Mécanique analytique*, en a tiré les conséquences les plus étendues et les plus fécondes.

7. *Principe de D'Alembert.* Lorsque des corps $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$. . . . sont joints ensemble de manière qu'ils ne puissent obéir librement aux impulsions qu'ils ont reçues ou aux forces accélératrices qui agissent sur chacun d'eux, ils exercent nécessairement les uns sur les autres des efforts continuels qui altèrent les mouvements qu'ils auraient pris s'ils eussent été libres ;



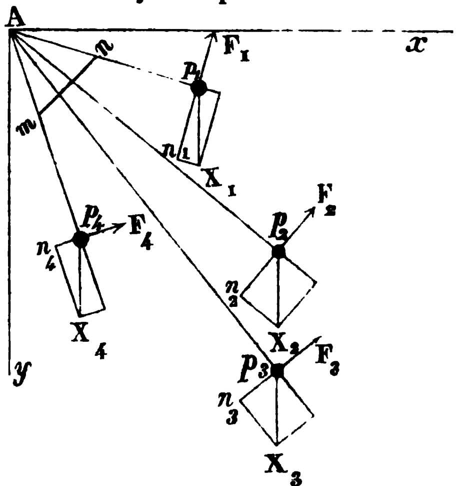
Ainsi A étant, par exemple, la projection d'un axe fixe horizontal ; Ap_4 une tige supposée inflexible et sans masse, $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$.... des poids égaux enfilés sur cette tige rigide à des distances quelconques Ap_1, p_1p_2, p_3p_4..; le mouvement de chacun de ces poids sera, en général, différent de celui qu'il prendrait s'il était seul enfilé sur la tige. D'une part, en effet, la gravité tendant à faire descendre également tous ces poids dans le même temps ; de l'autre, la roideur de la tige contraignant chacun d'eux à décrire dans ce même temps un arc proportionnel à sa distance du point de suspension A, il se fera entre ces poids une espèce de compénsation telle que les poids les plus rapprochés de A hâteront les vibrations les plus éloignées, tandis que ceux-ci retarderont les premiers. On voit même qu'il y aura sur la tige une sorte de point neutre, où un poids étant placé, son mouvement ne serait ni accéléré ni retardé par la réaction des autres poids, et serait le même que s'il était seul enfilé sur la tige. Ce point serait le *centre d'oscillation* (pag. 250) ou d'*agitation* comme l'appelait *Descartes*, et c'est précisément la recherche de la position de ce point qui a donné naissance au principe que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *principe de D'Alembert*. *Huyghens* détermina d'abord la position de ce centre, mais ce fut à l'aide de ce qu'il appela le *principe de la conservation des forces vives*, principe *précaire* suivant *Lagrange*, et qui est cependant devenu la source du *principe des forces vives*, qui depuis un quart de siècle forme la base fondamentale du calcul des machines. Voyez le *Horologium oscillatorium* de Huyghens, 1673, livre curieux rempli d'idées nouvelles alors.

Jacques Bernouilli reprit le problème des centres d'oscillation vers 1691 : considérant ensemble les mouvements que la gravité imprime à chaque instant aux points matériels $p_1 p_2 p_3 \ldots$ qui forment le pendule Ap_4 ; remarquant que leur liaison s'opposait à ce qu'ils les suivissent, il eut l'idée de considérer les mouvements réels qu'ils prendront comme composés des mouvements que la gravité leur imprimerait, et d'autres mouvements ajoutés ou retranchés qui doivent se contrebalancer, et en vertu desquels le pendule demeurerait en équilibre. Ce qui est le germe évident du principe généralisé par *D'Alembert*, en 1743, sous l'énoncé suivant :

8. *De quelque manière que plusieurs corps viennent à changer leurs mouvements actuels, si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps aurait dans l'instant suivant s'il devenait libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement, le second doit être tel que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.*

9. De son côté, *Herman*, dès 1716, dans sa *Phoronomia*, ou science des mouvements de transport, avait résolu le problème du pendule composé, en partant d'un principe que je résume ainsi :

Les forces motrices dont les poids qui forment le pendule composé, doivent être animés pour pouvoir être mus conjointement, sont équivalentes à celles qui proviennent de l'action de la gravité, en sorte que les premières étant dirigées en sens contraire, doivent faire équilibre à ces dernières, sur le système. C'est encore le principe de D'Alembert, mais présenté sous une forme plus évidente peut-être; et qui a conduit à celui des deux énoncés des auteurs modernes qui épargne les décompositions de forces, et que je développerai à l'aide d'une application au problème qui nous a déjà occupés.



10. Concevez un nombre quelconque de poids, d'abord isolés et libres, p_1, p_2, p_3, p_4, etc., ou des masses $\frac{p_1}{g}, \frac{p_2}{g}, \frac{p_3}{g}, \frac{p_4}{g} \ldots$ soumises respectivement à des forces quelconques $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ réunissez alors toutes ces masses entre elles par un système de liaisons quelconques, Amn par exemple; cette liaison contraindra chacune d'elles à prendre un

mouvement $p_1 n_1$, $p_2 n_2$, $p_3 n_3$, $p_4 n_4$ différent de celui $p_1 X_1$, $p_2 X_2$, $p_3 X_3$ qu'elle aurait pris, si elle eût été libre; or si l'on introduisait dans le système de nouvelles forces $F_1 F_2 F_3 F_4$ qui, agissant sur chaque corps *en sens contraire* de son mouvement effectif, seraient capables, abstraction faite de l'inertie, de le réduire au repos, il y aurait équilibre. Il s'ensuit que les forces $X_1 X_2 X_3 \ldots$, que l'on appelle habituellement les forces *imprimées*, sont à chaque instant en équilibre sur le système et, en ayant égard à la liaison de ses parties, avec les forces *effectives* prises en sens contraire $F_1 F_2 F_3$, etc.

Or ces forces effectives que le principe prescrit de prendre *en sens contraire* ne sont en intensité, direction et sens, rien autre chose, en fait, que les *forces d'inertie* (page 785)

$$F_1 = \frac{p_1}{g}\frac{dv_1}{dt}; \quad F_2 = \frac{p_2}{g}\frac{dv_2}{dt}; \quad F_3 = \frac{p_3}{g}\frac{dv_3}{dt} \ldots, \text{ etc.},$$

des petites masses $\frac{p_1}{g}\frac{p_2}{g}\frac{p_3}{g}\ldots$ relatives aux variations effectives $dv_1\ dv_2\ dv_3$ de leurs vitesses respectives dans le même temps infiniment petit dt.

La considération des forces d'inertie (p. 776) ramène ainsi le principe de D'Alembert à une sorte d'axiôme que l'on pourrait peut-être énoncer ainsi :

11. *Pour chacune des variations infiniment petites du mouvement d'un système de points liés d'une manière quelconque, l'ensemble des forces mouvantes fait à chaque instant équilibre sur le système, et en ayant égard à ses liaisons, à l'ensemble des forces d'inertie relatives à la variation effective du mouvement de chacun des points matériels.* Ce qui revient à dire, après tout, que *les actions et les réactions sont à chaque instant en équilibre sur le système* (p. 776); et, quant aux forces détruites par les liaisons du système, ce sont elles évidemment qui produisent les tensions ou efforts sur ces liaisons.

12. *Principe ou équation des forces vives.* Désignons en général par P la composante d'une force mouvante ou positive dans la direction du chemin élémentaire dp décrit par son point d'application à une machine quelconque; par R la composante d'une force résistante ou négative dans la direction, mais en sens inverse du chemin élémentaire dr décrit par son point d'application à la machine dans le même temps infiniment petit dt; par m la masse ou p le poids d'un point matériel quelconque de cette machine, dv_o étant l'accroissement que reçoit la vitesse v_o de ce point pendant dt. $\int P dp$, $\int R dr$ seront pour chacune de ces forces le travail total ou la somme des travaux élémentaires simultanément accom-

plis entre les limites de la durée que l'on considère ou de l'espace parcouru pendant cette durée par leurs points d'application. Prenant, suivant l'usage, le signe Σ pour indiquer l'addition de tous les termes semblables fournis par chacune des forces soit mouvantes soit résistantes qui peuvent agir sur le système, on a, en combinant par exemple le principe des vitesses virtuelles avec celui de D'Alembert

$$\Sigma\int P dp - \Sigma\int R dr = \Sigma\int m v_o dv_o \ldots\ldots (1)$$

le dernier terme exprimant le travail de toutes les forces d'inertie de la machine. Intégrant ce dernier terme entre v_o ou la vitesse de la masse quelconque m au commencement du temps que l'on considère et v sa vitesse à la fin de ce temps, il vient (page 1083)

$$\Sigma\int P dp - \Sigma\int R dr = \Sigma \frac{p}{2g}(v^2 - v_o^2) \ldots\ldots (2)$$

c'est-à-dire que : *dans tout système de corps en mouvement, la différence entre la somme des travaux mouvants et celle des travaux résistants pendant un temps quelconque, est numériquement égale à la variation de la demi-somme des forces vives de toutes les masses du système pendant le même temps ou au travail des forces d'inertie.*

13. Si la vitesse de tous les points du système était nulle au premier instant, ou si la machine partait du repos, on aurait

$$\Sigma\int P dp - \Sigma\int R dr = \Sigma \frac{pv^2}{2g} \ldots\ldots (3)$$

c'est-à-dire que *la moitié des forces vives acquises par tous les points mobiles de la machine est numériquement égale à l'excès du travail moteur total sur le travail de toutes les résistances depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant où la vitesse est devenue* $= v$.

14. Dans les cas où les travaux résistants sont assez faibles pour pouvoir être négligés, le système partant du repos donne lieu à l'équation

$$\Sigma\int P dp = \Sigma \frac{pv^2}{2g} \ldots\ldots (4)$$

c'est-à-dire que *le travail de toutes les forces mouvantes depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant où les masses du système possèdent les forces vives* $\Sigma \frac{pv^2}{g}$, *est numériquement égal à la moitié de ces forces vives ou au travail total développé par les forces d'inertie.*

15. Si l'on suppose que la machine étant en mouvement, toute force mouvante cesse d'agir à l'instant où la force vive totale était

$\Sigma \frac{pv'^2}{g}$, et que les forces résistantes travaillent seules, il faudra que les forces résistantes aient développé un travail total numériquement égal à la moitié de la somme des forces vives ci-dessus avant d'avoir anéanti le mouvement du système.

16. Enfin, si l'on considère le mouvement de la machine depuis son origine jusqu'à son extinction complète, ou bien encore entre deux instants où la somme des forces vives est redevenue la même, le second membre de l'équation générale devenant nul, on a

$$\Sigma \int P dp = \Sigma \int R dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

c'est-à-dire que *la somme des travaux mouvants égale dans ce cas la somme des travaux résistants*, ou que les forces d'inertie n'étant pas mises en jeu, ou s'étant compensées, *le travail produit par les forces mouvantes se retrouve tout entier dans celui que les forces résistantes absorbent*, et c'est en cela que consiste le *principe de la transmission du travail.*

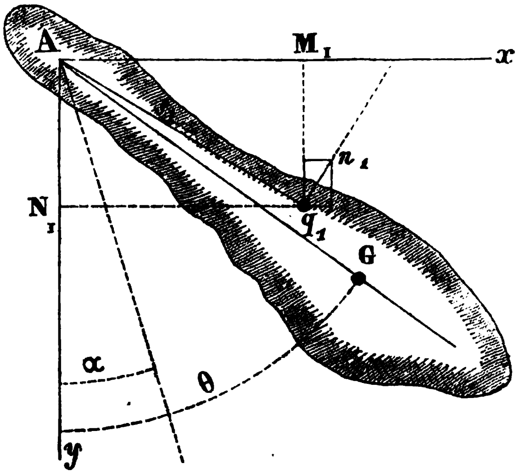
17. Le principe des forces vives ou de la transmission du travail est devenu la bas, fondamentale de la mécanique appliquée. On pourra étudier les développements successifs et les transformations qu'il a reçus depuis environ soixante ans dans les ouvrages suivants : *Lagrange*, *Mécanique analytique et théorie des fonctions; Carnot*, *Principe de l'équilibre et du mouvement.* Un Mémoire de M. l'ingénieur *Burdin* aux *Annales des mines de* 1815. — Un autre Mémoire de *Petit* aux *Annales de chimie de* 1818, — et dans l'ordre des dates, les ouvrages de *Navier*, *le Cours de mécanique appliqué aux machines* de M. *Poncelet*, et le *Calcul de l'effet des machines de Coriolis.*

18. *Principe de Carnot.* Ce principe, ou plutôt ce théorème, démontré par *Carnot*, en 1783, dans son *Essai sur les machines*, est présenté ici sous la forme suivante, en vue de ses applications :

Toutes les fois qu'il survient un choc entre deux pièces d'une machine tellement constituées que la déformation de ces pièces persiste pendant toute la durée de leur contact, le travail perdu par cette déformation pour l'effet utile de la machine s'obtiendra en retranchant la demi-somme des forces vives des deux pièces après le choc de la demi-somme des forces vives dont elles étaient animées avant le choc (Voy. pag. 327, 793, 1090 et 1122).

19. *Applications.* A est un axe fixe horizontal, traversant en A le corps quelconque AG; on éloigne le centre de gravité G de celui-ci d'un angle θ à partir de la verticale Ay, puis on l'abandonne à l'action de son propre poids, et l'on demande la loi de son mouvement.

Faisons passer deux plans rectangulaires se coupant suivant l'axe A, l'un horizontal Ax, l'autre vertical Ay et soient :



ϖ le poids du mètre cube du solide AG supposé homogène;

$q_1 q_2 q_3 \dots$ les volumes des différents points matériels du solide;

$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots$ les plus courtes distances respectives de chacun d'eux à l'axe fixe A;

$p_1 p_2 p_3 \dots$ les poids respectifs ϖq_1 ϖq_2 $\varpi q_3 \dots$ des volumes partiels;

$b_1 b_2 b_3 \dots$ les bras de levier respectifs de ces poids par rapport à l'axe fixe;

ω la vitesse angulaire du corps à un instant quelconque ;

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} \left\{ q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 + q_3 \rho_3 + \dots \right\} \quad (6)$$

seront les forces *effectives* ou plus exactement les forces d'inertie du système relatives à l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ de sa vitesse angulaire ;

Et la somme de leurs moments par rapport à l'axe A est évidemment

$$\frac{\varpi}{g} \frac{d\omega}{dt} \left\{ q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 + q_3 \rho_3^2 + \dots \right\} \dots . \quad (7)$$

De leur côté, les forces mouvantes ou *imprimées* sont les poids $p_1 p_2 p_3 \dots$ des diverses molécules, et leurs moments de rotation autour du même axe sont $p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 + \dots$, de sorte que, en vertu du principe de *D'Alembert*, c'est-à-dire, au fond, en écrivant que la somme des moments des poids mouvants est à chaque instant égale à la somme des moments des forces d'inertie, cette condition d'équilibre sur le système nous fournit l'équation fondamentale de la question

$$\frac{\varpi}{g} \frac{d\omega}{dt} \left(q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 + q_3 \rho_3^2 + \dots \right) = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 + \dots \quad (8)$$

Or la parenthèse du premier membre est le MOMENT D'INERTIE de volume I' du solide pris par rapport à l'axe A, de sorte que, si on désigne par Σ la somme de tous les termes semblables, on a

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{g}{\varpi}\cdot\frac{\Sigma(pb)}{\Sigma(q\rho^2)}=\frac{g}{\varpi}\cdot\frac{\Sigma(pb)}{I'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

c'est-à-dire que l'accélération angulaire est à chaque instant égale à la somme des moments des poids partiels divisée par le moment d'inertie de volume du solide pris par rapport à l'axe A, le tout multiplié par $\frac{g}{\varpi}$.

Appelant D la distance à l'axe fixe du centre de gravité G, Q le volume total du solide, P son poids total, $M=\frac{P}{g}$ sa masse totale, I_1 son moment d'inertie de masse par rapport à l'axe A, et remarquant que

$$\frac{\varpi}{g}I'=I_1 \quad \text{ou} \quad I'=\frac{g}{\varpi}I_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

on a pour un instant quelconque où la droite AG, qui passe par l'axe fixe et le centre de gravité, après avoir balayé l'arc $(\theta-\alpha)$ doit encore parcourir α pour parvenir au plan vertical Ay

$$\varpi\, Q\, D \sin.\alpha = P D \sin.\alpha = \Sigma(pb) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

d'où, pour l'accélération angulaire à ce même instant

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{g\,Q\,D\sin.\alpha}{I'}=\frac{M\,g\,D\sin.\alpha}{I_1}=\frac{P\,D\sin.\alpha}{I_1} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Mais $\omega dt = -d\alpha$ est le petit chemin parcouru dans le temps dt par un point de AG situé à l'unité de distance de l'axe A et qui tend à diminuer l'arc α. Multipliant cette équation par celle qui la précède, on obtient

$$\omega d\omega = -\frac{g\,Q\,D}{I'}\sin.\alpha d\alpha = -\frac{P\,D}{I'}\sin.\alpha d\alpha \quad \ldots \quad (13)$$

intégrant entre $\alpha=\theta=$ angle de plus grand écartement et où la vitesse angulaire est supposée nulle, jusqu'à $\alpha=\alpha=$ valeur de l'angle que AG doit encore balayer pour arriver au plan vertical, à l'instant que l'on considère, il vient

$$\tfrac{1}{2}I_1\omega^2 = P\,D(\cos\alpha-\cos.\theta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

et pour la valeur de la vitesse angulaire acquise à ce même instant (pag. 251)

$$\omega=\sqrt{\frac{2g\,Q\,D(\cos.\alpha-\cos.\theta)}{I'}}=\sqrt{\frac{2g\,M\,D(\cos.\alpha-\cos.\theta)}{I_1}}. \quad (15)$$

Or le *principe des forces vives* (12) nous aurait immédiatement fourni l'équation (14) ou l'égalité numérique entre la demi-force vive $\frac{1}{2}$ $I_1\,\omega^2$ acquise par le corps tournant et le produit de la force et du poids P par le chemin ($D\cos.\alpha - D\cos.\theta$) décrit dans sa direction propre par le point d'application G de ce poids; de sorte que le *principe de D'Alembert*, né du problème qui nous occupe, ne conduit à sa solution que par une voie moins directe; et c'est ce que l'on aura l'occasion d'observer dans une foule de questions.

Si l'on demandait l'intensité R de la résultante de toutes les forces d'inertie à un instant quelconque, et la plus courte distance L de sa direction à l'axe A, on écrirait l'équivalence des moments

$$RL = \frac{\varpi}{g}\,\Sigma\,(q\,\rho^2)\,\frac{d\omega}{dt} = I_1\,\frac{d\omega}{dt}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(16)$$

Décomposant la force d'inertie tangentielle $(q_1 n_1) = \frac{\varpi}{g}\,q_1\,\rho_1\,\frac{d\omega}{dt}$ d'une molécule quelconque q_1 parallèlement aux deux axes Ax Ay; remarquant que la direction $(q_1\,n_1)$ de cette force, par rapport à l'axe des x, est la même que celle de ρ_1 par rapport à celui des y, puisque les deux premières lignes sont perpendiculaires aux deux dernières, on aura en appelant x_1 y_1 les coordonnées AM_1 AN_1 de la molécule q_1

$$\left.\begin{array}{lll} y_1 = \rho_1\cos.q_1\,AN_1 & \text{d'où} & \cos.q_1\,AN_1 = \dfrac{y_1}{\rho_1} \\ x_1 = \rho_1\cos.q\,AM_1 & \text{d'où} & \cos.q\,AM_1 = \dfrac{x_1}{\rho_1} \end{array}\right\}\quad(17)$$

et pour la composante

$$\left.\begin{array}{l} \text{suivant les } x\ldots\left(\dfrac{\varpi}{g}\,q_1\rho_1\,\dfrac{d\omega}{dt}\right)\dfrac{y_1}{\rho_1} = \dfrac{p_1}{g}\,y_1\,\dfrac{d\omega}{dt} \\ \text{et suivant les } y\ldots\left(\dfrac{\varpi}{g}\,q_1\rho_1\,\dfrac{d\omega}{dt}\right)\dfrac{x_1}{\rho_1} = \dfrac{p_1}{g}\,x_1\,\dfrac{d\omega}{dt} \end{array}\right\}\quad(18)$$

Raisonnant de même pour toutes les molécules, et appelant F_x F_y les sommes des composantes des forces d'inertie suivant le plan des x et celui des y, X' Y' les coordonnées du centre de gravité G par rapport aux mêmes plans, il vient

$$\left.\begin{array}{l} F_x = \dfrac{d\omega}{g\,dt}\,(p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 + \ldots) = P\,Y'\,\dfrac{d\omega}{gdt} \\ F_y = \dfrac{d\omega}{g\,dt}\,(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots) = P\,X'\,\dfrac{d\omega}{g\,dt} \end{array}\right\}\quad(19)$$

et remarquant que $D^2 = X'^2 + Y'^2$, on obtient

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{P}{g}\frac{d\omega}{dt}\sqrt{Y'^2 + X'^2} = \frac{P}{g} D \frac{d\omega}{dt} \quad (20)$$

Ainsi, l'intensité totale R des forces d'inertie est la même que si la masse totale $\frac{P}{g}$ était réunie à son centre de gravité.

Quant à la distance L de son point d'application à l'axe, on l'obtiendra en mettant cette valeur de R dans l'équation (16), et il viendra

$$L = \frac{I_1}{MD} = \frac{I^1}{QD} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

donc le point d'application de la résultante des forces d'inertie tangentielles ne passe pas par le centre de gravité. Il est situé à une distance L de l'axe de rotation qui est précisément le *centre d'oscillation* du corps (page 251), distance égale au moment d'inertie de masse divisé par le produit fait de la masse totale et de la distance de son centre de gravité à l'axe fixe; et pour s'assurer que la direction de la résultante R est en effet perpendiculaire à L, appelons i l'angle inconnu de son inclinaison sur l'axe des x; quel que soit cet angle, on aura toujours

$$R \cos. i = F_x \qquad R \sin. i = F_y$$

$$\text{d'où} \quad \text{tang}.\, i = \frac{F_y}{F_x} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (22)$$

Mais en vertu des équations (19)

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{X^1}{Y^1} = \text{tang}.\, \alpha\,;\ \text{donc tang}.\, i = \text{tang}.\, \alpha \text{ et } i = \alpha \,.\,. \quad (23)$$

Ainsi, l'angle i formé par la direction de R avec l'axe des x, est à chaque instant égal à l'angle α compris entre l'axe vertical et la droite D qui joint l'axe fixe A au centre de gravité G. Mais la perpendiculaire à cette dernière droite AG a précisément la même inclinaison sur l'axe des x, donc R est elle-même perpendiculaire à la direction AG.

Si l'on développait le problème sur lequel on n'insiste pas plus longuement ici, où il n'est introduit que pour montrer l'application des principes posés ci-dessus, on arriverait à ce théorème général :

Toutes les forces centrifuges d'une tranche plane perpendiculaire à l'axe de rotation se composent en une seule résultante ;

Cette résultante est celle qu'on obtiendrait si l'on supposait toute la masse de la tranche réunie à son centre de gravité ;

Toutes les forces tangentielles de la même tranche se composent éga-

lement en une résultante tangentielle dont l'intensité est encore la même que si la masse de la tranche était réunie à son centre de gravité, mais dont la direction, perpendiculaire à la droite qui joint ce centre à l'axe fixe, au lieu de passer par le centre de gravité, est située à une distance de l'axe fixe égale au moment d'inertie de masse de la tranche pris par rapport à cet axe divisé par le produit fait de la masse de cette tranche par la distance de son centre de gravité à l'axe fixe.

MÉCANISMES, expression que nous avons adoptée avec M. *Robert Willis*, et par laquelle nous entendons les systèmes simples ou complexes qui, dans une machine, relient le *récepteur* et *l'outil.* Etant donnée la loi du mouvement d'un récepteur, les mécanismes ont pour fonction de transmettre ce mouvement à l'outil suivant une loi déterminée *à priori.* La *science des mécanismes* est donc à peu près ce que, d'après M. Ampère, on avait appelé la *cinématique.* Voyez l'excellent ouvrage de M. *Robert Willis,* intitulé *Principles of mechanism*, 8°, Londres, 1841, et les articles *Bielle, Manivelles, Engrenages*, etc., etc.

MERCATOR (*Nicolas*), auteur de plusieurs mémoires sur la géométrie, la géographie, l'astronomie, les logarithmes, publiés de 1651 à 1678. Né dans le Holstein, il a passé la plus grande partie de sa vie en Angleterre; devenu membre de la société Royale de Londres, il serait mort dans cette ville en 1690, à l'âge de 50 ans, d'après quelques biographies. D'autres prétendent qu'appelé à Versailles pour la construction des fontaines, il mourut à Paris, en 1687.

MERCURE, le seul de tous les métaux qui soit liquide à la température ordinaire. Il se congèle à — 40°, et il entre en ébullition à + 360°. Entre 0 et 40° son volume se dilate, par degré, de $\frac{1}{5555}$ = 0.00018002; son poids spécifique à zéro = 13596, et d'après l'Annuaire, à cette température zéro, sous la pression barométrique 0.76, à la latitude de l'Observatoire et à 60^{m} au-dessus du niveau de la mer, le poids du mercure est 10513.5 celui de l'air; au niveau de la mer et à la latitude 45°, ce rapport deviendrait = 10517.3.

Oxydes. Le mercure forme deux oxydes : le *protoxyde,* noir, pulvérulent, sans éclat, insoluble dans l'eau, peu stable, se combinant avec les acides, mais non avec les alcalis, et contenant mercure 0.962 + oxygène 0.038 : le *deutoxyde* qui varie du jaune-orangé au rouge foncé, assez soluble dans l'eau, se combinant avec tous les acides et aussi avec l'ammoniaque et qui est formé de mercure 0.9268 + oxygène 0.0732.

Action des principaux acides. L'*acide nitrique* étendu dissout peu à peu le mercure, même à froid, et forme un nitrate de protoxyde; concentré et en excès, c'est un nitrate de deutoxyde qui se forme.

— L'*acide sulfurique* faible est sans action, à froid, sur le mercure; mais concentré et même étendu, il dissout à chaud l'oxyde, et forme un sulfate.— L'*acide hydrochlorique* même concentré et chaud ne l'attaque pas, mais le mercure qu'on fait bouillir avec un excès d'*eau régale* s'y dissout complétement, et la dissolution contient à la fois de l'oxyde et du chlorure mercuriques.

Minerais. Le mercure se trouve et est exploité à l'état natif, mais la seule substance mercurielle que l'on rencontre en grandes masses est le *sulfure de mercure* ou *cinabre;* il est alors tantôt d'un rouge foncé et presque noir, tantôt d'un beau rouge vif. Le poids spécifique de ce minerai atteint et même dépasse 8000. C'est à cet état qu'il est traité à *Almaden*, en Espagne.

La propriété que possède le mercure de se sublimer facilement, peut être mise à profit pour le reconnaître dans les substances qui le contiennent. On les chauffe au rouge seules ou mêlées à leur poids de fer en limaille, et le mercure se vaporise à l'état métallique.

Falsifications. Le mercure du commerce est souvent falsifié par du plomb, du bismuth, de l'étain. On reconnaît la falsification en distillant le mercure; les trois métaux étrangers restent à peu près en totalité au fond du vase distillatoire.

MÉRIDIEN, MÉRIDIENNE. Le *méridien* est un plan qui passe par les pôles et par les points les plus élevés et les plus bas du cours appparent et quotidien d'une *étoile* quelconque, cours dont il partage la durée en deux temps parfaitement égaux.

La section d'une surface quelconque par le plan du méridien est la ligne méridienne; la ligne suivant laquelle il coupe l'horizon d'un lieu est donc *la méridienne* de ce lieu. Cette ligne serait couverte chaque jour de soleil à midi, *temps vrai* (page 692) par l'ombre d'un fil à plomb.

Tracer une méridienne sur un plan horizontal. On s'assurera d'abord, au moyen du niveau, que le plan est parfaitement horizontal; et on lui donnera cette position, s'il ne l'a déjà.

Près du bord méridional de ce plan, on choisira un centre *c* autour duquel on décrira deux ou mieux trois arcs de cercle concentriques de 130 à 140 degrés, éloignés l'un de l'autre suivant le rayon de au moins $0^{m}.005$. On fixera au point *c*, dans une direction rigoureusement verticale ou perpendiculaire au plan, une tige percée d'un petit trou rond à son extrémité supérieure. On donnera à cette tige une longueur assez grande pour que, vers neuf heures du matin dans la saison où l'on opère, le rayon solaire qui passera par le trou de l'extrémité supérieure se projette un peu en dehors du plus grand cercle.

Cela fait, on surveillera avant midi les instants où le point lumineux se projettera successivement sur les trois cercles, et l'on mar-

quera bien juste les points où le *centre* du point lumineux rencontrera les circonférences.

Après midi, on surveillera encore l'instant où le centre lumineux s'approchant du cercle intérieur, le rencontrera de nouveau, et l'on marquera avec soin ce point de rencontre, puis successivement les points de rencontre avec les deux cercles suivants. On aura ainsi deux points sur chacune des trois circonférences, et en tout trois arcs.

On divisera chacun de ces trois arcs en deux parties égales (*Géom.*, P. 15); si l'on a bien opéré, la bisectrice des trois arcs sera unique. Ce sera la *méridienne* cherchée.

Cette méthode n'est sensiblement exacte que vers les solstices (décembre et juin); elle pourrait donner lieu vers les équinoxes (mars et septembre) à une erreur de quinze secondes en temps, soit dans un sens, soit dans l'autre, en supposant que six heures se sont écoulées entre la première et la dernière observation. La bisectrice serait à l'occident de la méridienne vers mars et trop à l'orient vers septembre. Mais 15 secondes de temps correspondant (p. 922) à 3′ $\frac{3}{4}$ en arc, on peut juger utile de faire la correction. Dans ce but, on observera la quantité de chemin que fait le point lumineux en une minute immédiatement avant ou après midi; le quart de cette quantité sera la correction cherchée qu'on appliquera dans le sens convenable avant de tracer la méridienne définitive.

Tracer une méridienne sur un plan vertical, un mur, etc. Le moyen le plus simple consiste à placer un INSTRUMENT gradué (pag. 953), *graphomètre, boussole*, en avant de la surface verticale, à déterminer la direction du méridien par l'un des procédés suivants qu'on emploie pour *tracer une méridienne sur le terrain*, puis à faire marquer sur la surface verticale deux ou trois points du plan méridien, à travers lesquels on conduira la *méridienne*.

On peut encore tracer en avant du mur une méridienne sur un plan horizontal, puis fichant une tige dans le mur, on suspendra à son extrémité un fil à plomb pendant en deçà de la surface horizontale, vers le sud. Au moment où l'ombre de ce fil coïncidera avec la méridienne horizontale, elle marquera en même temps la méridienne sur la muraille, le fil et son ombre verticale étant alors nécessairement dans le plan du méridien.

Tracer une méridienne sur le terrain :

A. *Avec la boussole.* Dirigez la lunette de la boussole de telle sorte que si vous visez vers le nord la partie bleuie de l'aiguille se trouve écartée du point marqué N sur le limbe, d'un angle égal à la *déclinaison* (p. 12). Faites placer des jalons dans cet alignement. Faites alors décrire un demi-cercle vertical à la lunette et visez vers le sud en ayant soin que l'aiguille conserve sa première position, et faites encore placer des jalons, ou remarquez des signaux quelconques dans ce sens; leur direction générale se trouverait sur la méri-

dienne du lieu, si la déclinaison, qui varie avec les lieux et les temps, était bien connue. En novembre 1851, cette déclinaison à l'Observatoire de Paris était occidentale et $=20^\circ 25' 0''$; en décembre 1850, on l'avait trouvée $= 20^\circ 30' 40''$.

B. *Par la polaire.* Alignez la *polaire* (*planche* Ire) à un instant quelconque, soit à l'aide de deux fils à plomb, soit, ce qui vaut mieux, à l'aide d'une lunette armée d'un réticule et se mouvant dans un plan rigoureusement vertical. Le plan vertical passant à la fois par la Polaire et l'intersection des fils du réticule *peut être* rigoureusement le méridien; l'erreur sur sa position peut toutefois s'élever à un degré et demi environ.

C. *Plus exactement.* Tout étant disposé comme ci-dessus, attendez que *la polaire* et la première ε de la queue de la Grande Ourse (*planche* Ire et page 88), la plus rapprochée du quadrilatère, se trouvent à la fois dans le plan vertical que décrit l'intersection des fils du réticule de la lunette. Ce plan sera à *très-peu près* celui du méridien. Laissez la lunette dans ce plan jusqu'au jour, et faites placer les jalons sur l'intersection de ce plan avec le terrain.

D. Si une plus grande exactitude était encore requise, il faudrait attendre 17 à 18 minutes après le passage des deux étoiles par le plan vertical, puis à cet instant seulement, on déterminerait la direction du plan vertical qui passe par l'intersection des fils du réticule et par la polaire *seule*, sans avoir égard à ε de la Grande Ourse qui aurait alors dépassé le méridien. Mais la méthode suivante est plus commode, plus exacte et plus générale.

E. *Par les hauteurs correspondantes.* On sait que, à des hauteurs égales d'une même *étoile* au-dessus de l'horizon, correspondent des distances angulaires égales à droite et à gauche du méridien. Dès lors, vers les dix ou seulement vers les onze heures du soir, dirigez la lunette de l'instrument que nous supposons tournée vers le sud, sur une étoile placée à environ trente ou seulement quinze degrés à gauche du plan vertical qui passerait par la Polaire. Fixez bien la lunette, et attendez que l'étoile traverse le fil horizontal du réticule. Inscrivez l'angle horizontal compris à cet instant entre le zéro du limbe gradué de l'instrument et le plan vertical passant par l'axe optique, ce limbe ayant été disposé préalablement dans un plan rigoureusement horizontal. Soit A cet angle; faites mouvoir la lunette vers la droite d'environ 60° ou seulement 30° suivant l'heure choisie pour la première observation, et attendez le second passage de la même étoile par le fil horizontal du réticule, passage qui aura lieu soit vers deux heures, soit vers une heure du matin. Soit B l'angle horizontal formé à ce second passage par le plan vertical de l'axe optique avec le zéro du limbe qui aura dû parfaitement conserver sa situation primitive,

$$A + \frac{B - A}{2} = \frac{B + A}{2}$$

est l'angle horizontal compris entre le zéro du limbe et le plan *du méridien.*

Remarque. Ces diverses opérations exigent que l'on fasse éclairer un peu l'objectif de la lunette pendant que l'on a l'œil à l'oculaire afin de distinguer les fils du réticule sous lequel on amène les étoiles à observer.

L'observation des hauteurs correspondantes du *soleil* pourrait encore servir à la détermination du méridien ; mais cette méthode exigerait des corrections, et de plus, les instruments dont l'ingénieur dispose, ne sont pas habituellement munis des verres colorés qu'elle exige.

MESURES. Voy. *Poids et mesures.*

MÉTAMORPHISME. Métamorphose en vertu de laquelle les géologues supposent que certaines roches sédimentaires ont pris les caractères et la cristallisation de ce qu'ils appellent les roches *ignées.* Cette altération physique, et quelquefois chimique, des roches sédimentaires est attribuée à l'action de la chaleur des roches ignées et éruptives, avec lesquelles elles auraient été en contact plus ou moins intime. C'est ainsi que des calcaires terreux, sous l'influence de la chaleur et de la pression, auraient passé à l'état de marbres, fait dont la possibilité a été confirmée, du reste, par les expériences directes de *Hall ;* ce serait encore par une action *métamorphique* que, au contact des roches ignées magnésiennes, des calcaires auraient passé à l'état de *dolomies* (pag. 545), que des grès à tissu arenacé se seraient transformés en quartz compacte, etc.

Les pierres des *ouvrages* des hauts fourneaux montés en grès, offrent un exemple de ce genre de métamorphisme, après quelques mois de campagne ; et, quant au métamorphisme par pénétration, je pourrais citer l'exemple curieux d'un évent formé d'un tuyau en fonte de 0^{m}035 d'épaisseur, qui, fiché dans le sable argileux employé comme remplissage de l'ouvrage du haut fourneau de Framont, en fut retiré complétement pénétré par ce sable après une campagne d'une année. Il était devenu très-fragile, et l'aspect de sa cassure était tel qu'il eût été facilement pris, sauf son poids, pour un tuyau en terre cuite, originairement fabriqué avec de l'argile très-ferrugineuse.

Il importe de remarquer que les roches qu'on suppose avoir été modifiées par *métamorphisme,* ne se présentent cependant pas toujours dans le voisinage de roches d'origine ignée, c'est à la géologie qu'il appartient d'expliquer ces exceptions à ses lois.

MILIEU DU CIEL. On emploie quelquefois cette expression

pour désigner le point de l'équateur qui se trouve sous le méridien dans un instant quelconque.

MINES (*Exploitation*). Voy. *Puits* et *Galeries*.

MITRAILLE (*Effets mécaniques de la*). Si on tire à mitraille contre un panneau de 2ᵐ60 de hauteur sur un terrain qui ne soit pas très-inégal, chaque boîte contenant 41 balles, pesant chacune $\frac{1}{32}$ du poids du boulet de calibre, on frappe le panneau,

Avec la pièce de 12, à 750ᵐ	}	d'environ 7 balles.
de 6, à 600		
de 3, à 500		

Mais, sur ces 7 balles, il n'y en a pas généralement 3 qui aient une force vive d'arrivée assez grande pour traverser à ces distances des planches de pin ou de sapin, épaisses de 0ᵐ020 à 0ᵐ027. Elles ne peuvent donc faire que des contusions.

Une ligne d'infanterie a environ 2ᵐ de hauteur, il n'y aurait donc que 5 $\frac{1}{4}$ de balles qui l'atteindraient aux distances ci-dessus.

Dans un terrain très-inégal, l'effet est beaucoup moindre, et l'auteur de ces expériences, *de Scharnhost*, s'est convaincu que lorsque l'inégalité du terrain empêche les balles de ricocher, il n'y a pas la moitié du nombre de balles indiqué plus haut, qui arrive jusqu'au panneau, tandis que, au contraire, sur un terrain uni et dur, ce nombre est sensiblement plus grand.

Si la pièce s'approche du panneau, il y a plus de balles qui traversent les planches et plus aussi qui les atteignent, mais jusqu'à une certaine limite. Ainsi, en terrain uni, et abstraction faite des balles qui ricochent, il arrive que, à des distances inférieures à 375ᵐ, il y a tant de balles qui passent par-dessus le panneau, que l'effet n'augmente que peu, et qu'il diminue même, si le panneau n'a que 2ᵐ de hauteur.

Dispersion. La divergence des balles d'un coup à mitraille embrasse des espaces à peu près proportionnels aux distances jusqu'à celle de 225ᵐ, de telle sorte que les diamètres des bases du cône de divergence sont respectivement,

à 75ᵐ	de	8 à 9ᵐ;
à 150ᵐ	de	16 à 18ᵐ;
à 225ᵐ	de	25ᵐ.

La proportionnalité semble cesser au delà, car à la distance de

450ᵐ, on trouve 55 à 60ᵐ.

Cependant, la majeure partie des balles du coup n'éprouvent pas cette dispersion extrême, et l'on peut admettre que les $\frac{2}{3}$ de celles qui parviennent à 450ᵐ se trouvent réunies dans une surface dont

le diamètre croît de 4ᵐ pour chaque distance de 75ᵐ. on a donc

aux distances	les diamètres
75ᵐ	4ᵐ ;
225ᵐ	12ᵐ ;
450ᵐ	24ᵐ.

La dispersion des petites balles est sensiblement la même que celle des balles fortes. La dispersion est, en général, très-différente dans des circonstances qui semblent identiques.

La dispersion des balles est beaucoup plus grande dans les obusiers que dans les canons.

MOELLONS : pierres de petit échantillon, formant la masse de la partie des maçonneries qui n'est pas en pierres dites de *taille*. On appelle moellon *brut*, celui qui n'a aucune forme régulière; moellon *smillé* ou *essemillé*, celui qui a été travaillé à la grosse pointe, de manière à avoir la même hauteur dans chaque assise; moellon *piqué*, celui qui a été équarri, réduit à une hauteur uniforme, et dont le parement est taillé à la fine pointe. On l'emploie surtout pour le revêtement des murs de soutènement.

Pour obtenir une bonne maçonnerie ordinaire de moellons et de mortier, il importe, d'après *Sganzin*, avant de poser la couche de mortier qui recevra les moellons, que l'ouvrier nettoie et mouille la couche de maçonnerie précédente; qu'il enlève avec soin la terre et les autres substances étrangères qui pourraient être attachées aux moellons; qu'il mouille ceux-ci pour les mieux disposer à prendre le mortier; qu'il les pose en liaison et à bain de mortier; qu'il leur donne une assiette sûre, et les frappe à coups de marteau jusqu'à ce que chaque moellon ait pris sa place; enfin, qu'il garnisse tous les vides dus à la forme irrégulière des moellons, par des éclats de pierre enfoncés au marteau dans le mortier qui remplit ces vides. S'il s'agit de maçonneries de murs en élévation, il est indispensable d'élever le mur également des deux côtés, par assises, et d'arraser l'intérieur au niveau de la hauteur des moellons qui forment les parements.

MOMENT. 1. Soient O la projection d'un axe fixe perpendiculaire au plan de la figure et, pour matérialiser le système, O M une barre rigide couchée dans ce plan et assujettie à s'y mouvoir, M le point d'application d'une force F agissant dans ce même plan et représentée en direction, sens et intensité, par la droite M F. Le point d'application M ne pouvant que tourner autour de l'axe fixe O, décrira, sous l'action de F, un arc de cercle de rayon $MO = r$; — de sorte que, si $d\omega$ est l'arc décrit dans un instant infiniment petit dt par un point situé à *un* mètre de distance de O, l'arc ds décrit dans le même temps par le point M sera $= r\,d\omega = ds$. Cet arc, infi-

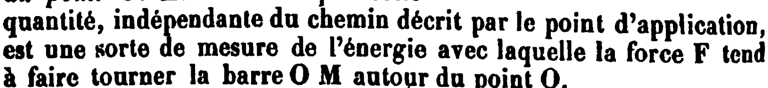
niment petit, pouvant être considéré comme initialement confondu avec sa tangente, soit Ma la portion de cette tangente que parcourrait le point d'application M au premier instant de son mouvement; projetons ce chemin Ma sur la direction de la force F, et $F \times Mb$ sera évidemment le travail de rotation de cette force. Du point fixe O menons la perpendiculaire $OK = f$ à la direction de F, les triangles rectangles Mab, MOK ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, on a

$$\frac{Ma}{MO} = \frac{Mb}{OK} = d\omega$$

d'où

$$F \times Mb = F \times OK \times \frac{Ma}{MO} = Ff d\omega$$

C'est ce produit Ff de l'intensité de la force F par la perpendiculaire f menée du point fixe O à sa direction que l'on appelle proprement *le moment de la force* F *pris par rapport au point* O. Et l'on voit que cette quantité, indépendante du chemin décrit par le point d'application, est une sorte de mesure de l'énergie avec laquelle la force F tend à faire tourner la barre O M autour du point O.



2. On aurait encore obtenu l'expression du travail élémentaire de rotation de la force F en projetant cette force suivant M P, sur la direction réelle du chemin décrit par le point d'application M. Ainsi P étant la projection de F, le travail de rotation pourrait être exprimé par

$$P \times Ma = P \times MO \times \frac{Mb}{OK} = Pr . d\omega$$

et les triangles rectangles M P F, M O K étant semblables, on a facilement

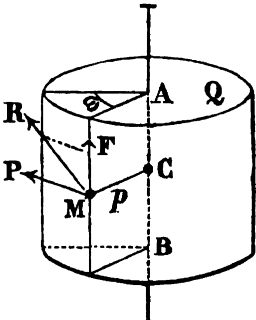
$$\frac{MF}{MP} = \frac{MO}{OK} = \frac{F}{P} = \frac{r}{f}$$

ou $\qquad$ *moment* $Ff =$ *moment* Pr.

On peut donc, en général, appeler *moment d'une force* F *par rapport à un point* O soit le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction propre, soit le produit du rayon de l'arc que le point d'application tend à décrire par la projection P de la force F sur la tangente à cet arc.

3. On appelle aussi *moment d'une force* R *par rapport à une droite* ou à un *axe* A B le produit Rp de cette force R par la per-

pendiculaire $p = MC$ menée de la direction de la force à l'axe fixe; toutefois il faut bien remarquer que le véritable *moment de rotation* de la force R, celui qui mesure l'énergie avec laquelle elle tend à faire tourner le corps Q autour de son axe n'est pas Rp, il est Pp; — de sorte que, en général, le *moment de rotation* d'une force R relativement *à un axe* est le moment Pp de sa projection P sur un plan PMC perpendiculaire à cet axe, moment pris par rapport au centre de rotation C de ce plan. Quant au travail élémentaire de rotation, il est tout aussi évidemment P$p\,d\omega$ (et non R$p\,d\omega$), c'est-à-dire égal au chemin élémentaire effectivement décrit par le point d'application multiplié par la projection P de la force R sur la direction MP de ce chemin.



4. On appelle encore *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de cette force et de sa distance à ce plan. Mais il faut bien remarquer que, en général, les *moments* de cette espèce n'ont rien de commun, comme dit Poisson, avec les moments par rapport à un *point*. Ceux-ci dépendent de la direction de la force et sont indépendants de son point d'application, tandis que les moments par rapport *à un plan* dépendent au contraire de la position du point d'application de la force, et sont indépendants de la direction de celle-ci; en sorte que P étant, par exemple, l'intensité d'une force appliquée en un point dont les coordonnées sont x, y, z, les produits Pz, Py, Px, sont respectivement appelés le moment de la force *par rapport au plan* des $x\,y$, à celui des $x\,z$, et enfin à celui des $y\,z$. On ne fait guère usage de ces moments que dans le cas des forces parallèles.

5. Enfin, les anciens géomètres ont encore appelé *moment d'une force* un produit analogue à ce que nous nommons aujourd'hui le travail élémentaire de cette force, son travail *virtuel* ou *initial*. Lorsque, dans le cours de cet *Aide-mémoire*, j'ai employé le mot *moment* dans ce dernier sens, j'ai conservé, afin d'éviter toute équivoque, la désinence latine qu'il avait autrefois, et j'ai ainsi appelé *momentum* d'une force sa tendance au travail ou son *impetus*, comme le nommaient les anciens.

6. S'il faut ajouter foi aux savantes et consciencieuses recherches historiques de *Lagrange*, la notion des *moments de rotation* qui semble aujourd'hui dériver tout naturellement de la théorie du levier, ne se serait cependant introduite que bien des siècles après celle-ci dans la science mécanique; et d'*Archimède*, qui vivait 250 avant J.-C., et qu'il considère comme l'auteur de la théorie du levier, il faudrait redescendre la série des âges jusques au *Mecanicorum liber*

de *Guido Ubaldi* (1577), pour en voir poindre le premier aperçu.

Du principe du levier droit et horizontal donné par Archimède, il semble que l'on se serait d'abord élevé jusqu'à la théorie du levier coudé ou angulaire, et ce ne serait guère que vers l'année 1687 que *Varignon*, liant le principe du levier à celui de la composition des forces, serait parvenu enfin au *principe des moments*, par le théorème qui porte encore son nom (*Voy.* la *Mécanique de Varignon*, publiée en 1725, après sa mort). J'ai pensé que l'on suivrait avec quelque intérêt les traces de cette génération des notions fondamentales de la mécanique, et j'ai essayé de les indiquer rapidement ici.

7. Voici d'abord la simple et ingénieuse démonstration du principe du levier droit, donnée par *Archimède*, que je retrouve dans un intéressant mémoire de *Fourier*. Soit une ligne droite chargée en chacune de ses parties égales de poids égaux et en équilibre autour d'un point fixe placé au milieu M.

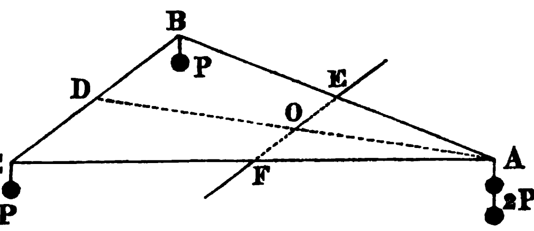
Si, à partir de l'une des extrémités, A par exemple, on prend sur la longueur entière $2a$ du levier, une longueur $2l$, on pourra, sans rompre l'équilibre, réunir au milieu de $2l$ les poids distribués sur cette longueur et opérer de même sur la ligne restante $2a - 2l$. Mais alors les bras de levier des charges seront $(a - l)$ et l, tandis que les poids réunis en leurs points d'application seront *proportionnels* à l et à $(a - l)$, c'est-à-dire en raison inverse de leurs bras de levier.

8. On voit que *Archimède* considérait, soit comme un axiome, soit comme un fait d'expérience, l'équilibre de deux poids égaux, agissant sur un levier droit horizontal, à distances égales de l'appui, vérité qui pourra sembler évidente si l'on remarque que tout étant égal de part et d'autre de ce point, il n'y a pas de raison pour que l'un des poids l'emporte sur l'autre. Cependant, *Lagrange* nous apprend que cet axiome, qui est le *principe de la balance*, fut contesté et que *Huyghens* crut devoir essayer de compléter la démonstration d'Archimède dans un petit écrit imprimé, en 1693, sous le titre de *Demonstratio æquilibrii bilancis*. *Stevin*, dans sa Statique, et *Galilée*, dans ses Dialogues, avaient eux-mêmes tenté de donner plus de rigueur encore à la démonstration d'*Archimède*, et celle que proposa *Galilée*, dans son second Dialogue sur la Résistance des solides et que je ne crois pas utile de reproduire ici mérite cependant d'être remarquée en ce que la condition de l'égalité entre dans les *moments des poids* par rapport à l'appui, pour obtenir l'équilibre, y est peut-être encore plus nettement indiquée.

9. On chercha aussi à prouver l'évidence du principe, qui veut que, dans le levier horizontal en équilibre, la charge sur l'appui

soit égale à la somme des poids (*) ; ce fut encore *Huyghens* qui y pourvut à peu près comme suit :

Imaginez trois droites formant un triangle quelconque chargé de deux poids égaux aux extrémités CB de sa base et d'un poids double de chacun d'eux à son sommet A.



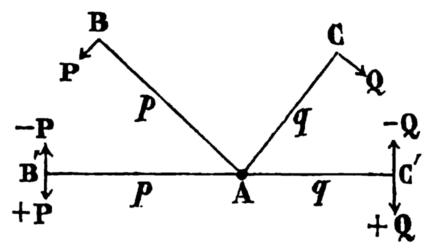
Ce triangle sera en équilibre sur la droite EF qui passe par les milieux de ses deux côtés, car chacun d'eux AB, AC peut être considéré comme un levier chargé de P = P à ses extrémités, et qui a son point d'appui à distances égales de chacun d'eux. Mais on peut encore considérer l'équilibre en regardant la base BC du triangle comme un levier dont les extrémités B, C sont chargées de deux poids égaux, et en imaginant un levier DA qui joigne le sommet A du triangle au milieu D de sa base, dont une des extrémités A soit chargée du poids 2P, et dont l'autre D serve de point d'appui au levier BC. Il est évident que ce dernier levier BC sera en équilibre sur le levier DA qui le soutient en son milieu D, et que celui-ci sera en équilibre sur l'axe EF. Or cet axe passant par le milieu O de DA, ce levier DA devra être chargé également à ses deux bouts. Donc la charge en D = la charge en A = 2P = la somme des poids en B et C. Ce qui complète la démonstration d'Archimède, et place le principe du levier droit à l'abri de toute contestation.

10. Quant au levier coudé qui conduit plus directement à la notion des *moments*, voici comment on a pu raisonner, en partant du principe du levier droit :

On regardera d'abord comme évident, avec *Lagrange*, qu'un levier angulaire BAB′ à bras égaux, mobile autour du sommet A de l'angle est tenu en équilibre par deux forces égales (+ P) (— P) appliquées perpendiculairement aux extrémités de ses bras et tendant à le faire tourner en sens contraire.

Cela posé, faites passer par le sommet A d'un levier coudé quelconque BAC un levier droit B′AC′ ayant des bras $AB' = p$ $AC' = q$ respectivement égaux aux bras AB, AC du levier angulaire, appliquez aux extrémités B′ C′ du levier droit des forces perpendiculaires (— P) et (— Q) respectivement égales aux forces P et Q appliquées en B et C sur le levier coudé, et considérez

(*) Et non à la somme des *moments* des poids comme le soutenait, en 1836, l'auteur de la *Découverte de la cause physique des mouvements célestes.*



d'abord l'ensemble des quatre bras comme un système unique se confondant avec le plan de la figure et traversé par l'axe A. Supposez maintenant qu'il y ait équilibre sur le levier droit, la condition de cet équilibre sera exprimée par l'égalité $\pm Pp = \pm Qq$. Or, indépendamment de cette condition, il y aura toujours équilibre séparément sur les leviers angulaires à bras égaux $(+QA-Q)$ $(+PA-P)$. Donc, la condition de l'équilibre sur le levier droit, entraîne la condition de l'équilibre dans le levier angulaire B′AC aussi bien que dans le levier angulaire C′AB, en retournant le sens des forces $(-P)$ $(-Q)$; car les bras AB, AB′ d'une part, AC, AC′ de l'autre avec les forces qui les sollicitent, peuvent alors être respectivement substitués l'un à l'autre ; donc, la condition de l'équilibre du levier coudé BAC est celle du levier droit ayant mêmes bras, ou $Pp = Qq$.

11. *Corollaires.* Mais une force peut être censée appliquée à tel point que l'on veut de sa direction. Donc deux forces P Q appliquées à des points quelconques d'un plan retenu par un axe fixe A et dirigées comme on voudra dans ce plan sont en équilibre lorsqu'elles sont en raison inverse des perpendiculaires p, q, abaissées de ce point sur leurs directions : car on peut regarder ces perpendiculaires comme formant un levier angulaire dont le point d'appui est le point fixe A. Tel est le germe du *principe de l'égalité des moments* entrevu par *Guido Ubaldi*. Un grand siècle plus tard, *Varignon* complétait la doctrine des *moments* par le théorème suivant.

12. Le théorème de *Varignon* peut être énoncé ainsi : *Si d'un point quelconque* O (figure suivante) *pris dans le plan d'un parallélogramme* MF_2FF_1, *on mène des perpendiculaires* f, f_1 f_2 *à sa diagonale et aux deux côtés qui la comprennent, le produit* Ff *de la diagonale par sa perpendiculaire est égal à la* somme *des produits de chacun des côtés par la perpendiculaire qui lui est menée, pourvu que le point* O *ne soit compris ni dans l'angle formé par les côtés, ni dans son opposé au sommet. Si le point* O, *au contraire, est situé* (figure suivante) *dans l'angle des côtés qui comprennent la diagonale ou dans son opposé au sommet, ce sera la* différence *des produits* de chaque *perpendiculaire par le côté sur lequel elle tombe qui sera égale au produit de la diagonale par sa perpendiculaire :* beau théorème de géométrie que l'on peut traduire immédiatement dans le langage de la mécanique par l'énoncé suivant :

13. *Le moment* Ff *de la résultante* F *de deux forces* $F_1 F_2$ *pris par rapport à un point fixe* O *quelconque de leur plan, est égal à la*

somme ou à la différence des moments F_1f_1, F_2f_2 *des composantes, selon que celles-ci tendent à faire tourner dans un même sens ou dans des sens opposés autour du point fixe* O.

Cette proposition et ses conséquences s'appliquent non-seulement aux *forces*, mais encore aux *vitesses* et aux *accélérations* dont un point matériel peut être animé dans un plan.

On la démontre par diverses méthodes, mais il suffit ici pour s'assurer qu'elle a lieu de reprendre la *figure* 1re de cet article, d'y décomposer la résultante MF suivant deux composantes de directions quelconques MF_1, MF_2 — de projeter ces composantes sur la direction réelle MP du chemin décrit par le point d'application M — et de remarquer que $F_1n = Pp_1$ étant nécessairement égal à Mp_2 puisque les triangles FF_1n, F_2Mp_2 sont égaux, on a :

$$MP = Mp_1 - Mp_2$$

ou $$P = p_1 - p_2$$

et $$Pr = p_1r - p_2r$$

en appelant P, p_1, p_2 les projections des forces F, F_1 F_2 sur la direction du chemin décrit.

Or, de même que l'on a prouvé que $Ff = Pr$ on prouverait que $p_1r = F_1f_1$ et $p_2r = F_2f_2$, donc

$$Ff = F_1f_1 - F_2f_2$$

le dernier moment prenant le signe — puisqu'il tend à faire tourner le système en sens contraire de F_1f_1.

14. Si le point O était situé sur la direction de la résultante F, cette puissance et son moment disparaissant de l'équation ci-dessus, on retomberait sur le principe du levier droit ou angulaire

$$F_1f_1 = F_2f_2$$

dont O serait l'appui et l'action de la résultante serait détruite par ce point fixe.

15. Donc, réciproquement, *si le moment de la force qui tend à faire tourner autour du point* O *moins le moment de celle qui tend à faire tourner en sens contraire autour du même point est zéro, il faut en conclure que la résultante passe par le point* O.

16. Ces théorèmes s'étendent facilement à un nombre quelconque de forces situées dans un même plan, et le *moment de leur résultante sera toujours égal à la somme algébrique des moments de leurs composantes par rapport au même point fixe* O.

17. Multipliant enfin chacun des moments qui entrent dans les relations ci-dessus par le déplacement angulaire infiniment petit $d\omega$ d'un point situé à un mètre de distance du centre ou de l'axe des moments, les produits ainsi obtenus seront les travaux de rotation élémentaires de chacune des forces correspondantes, et l'on arrive ainsi à ce théorème général :

Le travail de rotation élémentaire, résultant des forces appliquées à un système invariable mobile autour d'un axe fixe, est égal au produit du déplacement angulaire infiniment petit et commun $d\omega$ de ce système par la somme algébrique des moments de rotation des forces relatifs à cet axe.

MOMENT D'INERTIE. 1. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe avec une vitesse angulaire que nous appelerons ω, celle de ses masses élémentaires dm qui est située à une distance r de l'axe, est animée d'une vitesse ωr dont le carré multiplié par dm est évidemment la *force vive* $\omega^2 r^2 dm$ de cette masse. La force vive du corps entier, somme des forces vives de toutes les masses élémentaires, est donc elle-même le carré de la vitesse angulaire commune par la somme $\int r^2 dm$ des produits de chaque masse par le carré de sa distance à l'axe de rotation. C'est cette somme de produits $\int r^2 dm$ que, d'après *Euler*, on nomme le *moment d'inertie* du corps qui tourne.

2. On conçoit qu'une même masse aura des moments d'inertie différents, suivant la position de l'axe autour duquel elle tourne; parmi ces positions, celle pour laquelle l'axe passe par le centre de gravité d'un corps homogène donne, au moment d'inertie, l'expression la plus simple, que nous désignons généralement par I_c.

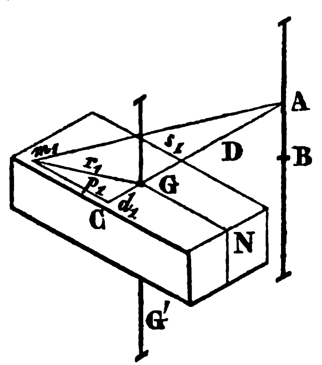
3. Pour passer de la valeur de I_c à celle I_d du moment d'inertie de la même masse M pris par rapport à un autre axe parallèle au premier et distant de celui-ci de la quantité D, on a la relation

$$I_d = I_c + MD^2$$

qui montre que l'on obtiendra I_d en ajoutant à I_c le produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

Soit, en effet, m_1 une molécule quelconque du corps tournant; menez par cette molécule un plan m_1GA perpendiculaire à l'axe GG′ qui passe par le centre de gravité du corps, ainsi qu'à l'axe AB parallèle à ce dernier. Conduisez dans ce plan la droite

AG = D = distance des deux axes; puis de m_1 abaissez une perpendiculaire p_1 à la direction de D; enfin menez les rayons r_1 ρ_1 distances de m_1 à chacun des axes. $m_1 r_1^2$, $m_1 \rho_1^2$ seront les moments d'inertie respectifs de la petite masse m_1 par rapport à GG' et à AB, mais les triangles m_1CG, m_1CA étant rectangles en C, on a



$$\rho_1^2 = p_1^2 + (D + d_1)^2 = p_1^2 + d_1^2 + D^2 + 2Dd_1 = r_1^2 + D^2 + 2Dd_1$$

et multipliant tous les termes par m_1, il vient

$$m_1 \rho_1^2 = m_1 r_1^2 + m_1 D^2 + 2 m_1 d_1 D$$

Répétant la même construction et le même raisonnement pour toutes les molécules m_2, m_3, m_4..., chacune d'elles fournira une équation de la même forme

$$m_2 \rho_2^2 = m_2 r_2^2 + m_2 D^2 \pm 2 m_2 d_2 D$$
$$m_3 \rho_3^2 = m_3 r_3^2 + m_3 D^2 \mp 2 m_3 d_3 D$$

. . . .

en remarquant que leur dernier terme prendra le signe + ou le signe —, suivant que la distance d au plan G_1GN, qui passe par le centre de gravité perpendiculairement au plan des deux axes, tombera à gauche ou à droite de ce plan G_1GN. Mais en faisant la somme de toutes les équations ci-dessus, ces derniers termes se détruiront nécessairement, puisque la somme algébrique des produits ou moments md est nulle par rapport au plan G_1GN, qui passe par le centre de gravité. $\Sigma (m d)$ étant ainsi = 0, il reste

$$\Sigma (m \rho^2) = \Sigma (m r^2) + \Sigma (m D^2)$$

ou enfin $$I_d = I_c + MD^2$$

4. Le moment d'inertie I_c par rapport à un axe passant par le centre de gravité est donc plus petit que le moment d'inertie I_d pris par rapport à tout autre axe parallèle; et comme la force vive de rotation d'une masse tournante égale le produit de son moment d'inertie par le carré de sa vitesse angulaire, le travail $\frac{1}{2}$ I ω^2 à dépenser sur une masse déterminée, pour lui imprimer une vitesse angulaire ω, sera moindre lorsque la masse se mouvra autour d'un axe passant par son centre de gravité, qu'elle ne serait pour tout autre axe parallèle à celui-ci.

Il doit d'ailleurs paraître évident que les moments d'inertie d'une même masse sont égaux pour tous les axes parallèles entre eux et également distants de celui qui passe par le centre de gravité.

5. *Détermination des moments d'inertie.* Ou le corps dont on a à déterminer le moment d'inertie a des formes géométriques et est homogène, ou comme un marteau de forge, par exemple, il n'a ni homogénéité ni formes régulières. Dans le premier cas, la détermination du moment d'inertie est un pur problème de calcul intégral, dont nous donnerons plus bas quelques exemples; dans le second cas, on partagera le corps tournant en un grand nombre de petits volumes séparément homogènes dont on calculera les *masses* m_1, m_2, m_3, m_4...; on multipliera chacune d'elles par le carré de la distance à l'axe de rotation de son centre de figure, et $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = \Sigma(mr^2) =$, somme de tous les produits partiels, sera par approximation le moment d'inertie du corps irrégulier. Il arrive parfois que certaines parties du système tournant sont à la fois homogènes et de formes géométriques, ou sensiblement telles. On abrége le calcul et on obtient à la fois une bien plus grande exactitude en évaluant d'abord les moments d'inertie de ces parties géométriques comme il est indiqué plus bas. On les ajoute ensuite aux autres moments du système que l'on n'a pu déterminer rigoureusement. En général, ces derniers moments déterminés par la méthode d'approximation pèchent essentiellement *par défaut.*

6. *Corps géométriques et homogènes.* Nous désignerons, en général, par ϖ le poids du mètre cube de la substance du corps, g étant $= 9.8088$, $\frac{\varpi}{g}$ sera la masse du mètre cube de cette substance; I_c continuera à désigner le moment d'inertie de la masse M par rapport à un axe passant par son centre de gravité, I_d celui de la même masse par rapport à un axe parallèle au premier. En divisant par $\frac{\varpi}{g}$ les expressions de I_c ou I_d, on aura par rapport aux mêmes axes ce que l'on appelle quelquefois les moments d'inertie *de volume* du corps.

7. *Tige droite*, de section k, tournant autour d'un axe perpendiculaire passant par son milieu

$\frac{\varpi}{g}kdr$ est l'élément de masse, $\frac{\varpi}{g}kr^2dr$ son moment d'inertie par rapport à l'axe A.

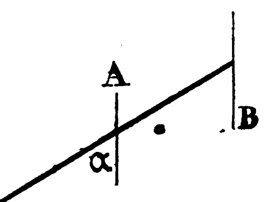
$$I_c = 2\frac{\varpi}{g}k\int_0^r r^2dr = \frac{2}{3}\frac{\varpi}{g}kr^3 = \frac{1}{12}\frac{\varpi}{g}kl^3 = \frac{1}{12}Ml^2$$

8. Pris par rapport à un axe parallèle au premier, et passant par l'extrémité de la tige, le moment devient

$$I_d = \frac{1}{3}\frac{\varpi}{g} k l^3 = \frac{1}{3} M l^2$$

C'est celui que donnerait le tiers de la masse totale M concentrée à l'extrémité de la tige.

9. Si la tige tournait en décrivant un double cône autour d'un axe A passant par son milieu, et formant avec elle un angle α, on aurait



$$I_c = \frac{\varpi}{g}\frac{1}{12}\sin.^2\alpha . k l^3 = \frac{1}{12} M l^2 \sin.^2\alpha$$

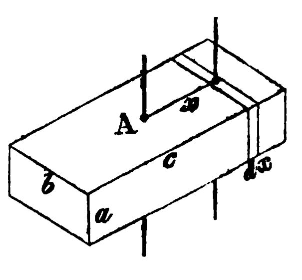
10. Si elle tournait autour d'un axe B parallèle au premier, et passant par son extrémité, on aurait $D = \frac{1}{2} l \sin.\alpha$ et

$$I_d = \frac{\varpi}{g}\cdot\frac{1}{3}\sin.^2\alpha . k l^3 = \frac{1}{3} M l^2 \sin.^2\alpha$$

11. *Plan mince* tournant perpendiculairement à sa face autour d'un axe A passant par son centre de gravité; il peut être assimilé à une somme de tiges droites (7) de même longueur L, de sorte que si K est la section du plan mince parallèle à l'axe, on a

$$I_c = \frac{\varpi}{g}\cdot\frac{1}{12} K L^3 = \frac{1}{12} M L^2$$

12. *Parallélipipède rectangle* tournant autour d'un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'arête a ou perpendiculaire au plan des arêtes b et c. Imaginez une lame d'une épaisseur infiniment petite dx parallèle à l'axe de rotation, $\frac{\varpi}{g} b a dx$ sera sa masse, et son moment d'inertie par rapport à l'axe A sera (3)



$$\frac{1}{12}\frac{\varpi}{g} a b^3 dx + \frac{\varpi}{g} a b x^2 dx$$

Intégrant entre $x = +\frac{1}{2}c$ et $x = -\frac{1}{2}c$, on a

$$I_c = \frac{\varpi}{g}\, ab \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} x^2\, dx + \frac{1}{12}\frac{\varpi}{g}\, ab^3 \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dx$$

$$= \frac{\varpi}{g}\, ab \left[\frac{1}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{c}{2}\right)^3\right] + \frac{1}{12}\frac{\varpi}{g}\, ab^3 \left[\left(\frac{c}{2}\right) - \left(-\frac{c}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{1}{12}\,(abc^3 + ab^3 c)$$

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{1}{12}\, abc\,(b^2 + c^2) = \frac{1}{12}\, M\,(b^2 + c^2)$$

c'est le douzième de la masse multiplié par le carré de la diagonale de celui des parallélogrammes qui est perpendiculaire à l'axe de rotation.

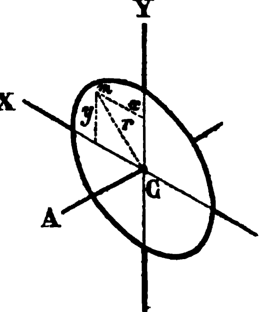
13. Si l'arête a devenait l'axe de rotation, on aurait (3)

$$I_a = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{1}{3}\, abc\,(b^2 + c^2) = \frac{1}{3}\, M\,(b^2 + c^2)$$

14. *Prisme triangulaire isocèle* tournant autour de l'axe parallèle à sa hauteur H qui passe par son centre de gravité ; b est la base et h la hauteur du triangle générateur perpendiculaire à l'axe de rotation.

$$I_c = \frac{\varpi}{g}\frac{1}{12}\, hbH\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{3}h^2\right) = \frac{1}{6}\, M\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

15. *Cercle sans épaisseur* de rayon R tournant dans son plan autour d'une droite A perpendiculaire à ce plan et passant par son centre. Un corps sans épaisseur n'a point de moment d'inertie proprement dit. Il ne s'agit donc ici que d'une abstraction destinée à faciliter la recherche des moments d'inertie des corps circulaires.



La surface du cercle peut être regardée comme la somme de circonférences $2\pi r$ d'une largeur dr mesurée suivant le rayon, d'où

$$\int_0^R 2\pi r^3\, dr = \frac{1}{2}\pi R^4$$

16. Si le cercle tournait perpendiculairement à son plan autour

de l'axe Y, il aurait évidemment le même moment d'inertie que s'il tournait perpendiculairement autour de l'axe X. Pour déterminer ce moment μ, nous emploierons le principe suivant qui facilitera souvent les recherches et épargnera les intégrations.

17. *Principe*. Si l'on ajoute entre eux les moments d'inertie d'une même aire relatifs à deux axes X, Y, qui se coupent à angle droit dans son plan, on obtient le moment d'inertie de cette aire par rapport à la perpendiculaire A élevée à ce plan au point C de la rencontre commune des premiers axes. En effet, si l'aire tournait autour de X, le rayon de rotation d'une molécule quelconque m serait y; si elle tournait autour de l'axe Y, le rayon de rotation de la même molécule serait x; en tournant autour de l'axe A, son rayon devient r : or, on a toujours $x^2+y^2=r^2$, d'où $mx^2+my^2=mr^2$; et comme la somme des molécules qui tournent est la même dans les trois cas

$$\Sigma(mx^2)+\Sigma(my^2)=\Sigma(mr^2)$$

18. En appliquant ce principe au cercle, on a, μ étant le moment par rapport à l'axe des X, et aussi par rapport à l'axe des Y

$$\mu+\mu=2\mu=\frac{1}{2}\pi R^4 \quad \text{et} \quad \mu=\frac{1}{4}\pi R^4$$

pour le moment de rotation perpendiculaire au plan du cercle tournant autour de son diamètre.

19. *Cylindre plein* tournant autour de son axe de figure. L étant sa longueur, R son rayon, on a facilement, en le considérant comme une somme L de cercles égaux enfilés par leurs centres sur le même axe (15)

$$I_c=\frac{\varpi}{g}\cdot\frac{1}{2}\pi L R^4=\frac{1}{2}M R^2$$

20. *S'il tourne autour d'une arête*, ce qui arrive lorsqu'il roule, on a (3)

$$I_a=\frac{\varpi}{g}\cdot\frac{3}{2}\pi L R^4=\frac{3}{2}M R^4$$

21. *Le cylindre étant creux* et tournant autour de son axe de figure, R étant le rayon extérieur et r celui du vide, on a

$$I_c=\frac{\varpi}{g}\frac{1}{2}\pi L(R^4-r^4)$$

différence des moments du cylindre plein et du cylindre vide de même substance : car les moments d'inertie s'ajoutent et se retranchent évidemment comme les volumes eux-mêmes.

Et si l'on fait l'épaisseur $e=R-r$, le rayon moyen ρ sera

$= R - \frac{1}{2} e = r + \frac{1}{2} e$, et l'on a cette autre expression

$$I_c = \frac{\varpi}{g} 2 \pi \rho L e (\rho^2 + \frac{1}{4} e^2) = M (\rho^2 + \frac{1}{4} e^2)$$

22. *Cylindre plein* tournant autour d'un axe passant par son centre de gravité, et perpendiculaire à son axe de figure.

Imaginez un cercle d'une épaisseur infiniment petite dx à une distance x de l'axe de rotation et perpendiculaire à l'axe de figure, son moment d'inertie sera (3 et 18)

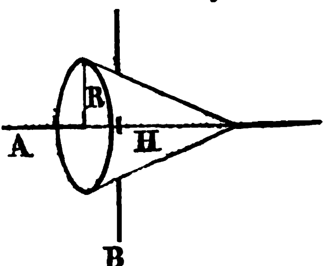
$$\frac{\varpi}{g} \frac{\pi r^4}{4} dx + \frac{\varpi}{g} \pi r^2 dx . x^2$$

Intégrant depuis $x = + \frac{1}{2} L$ jusqu'à $x = - \frac{1}{2} L$, il vient

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 L (R^2 + \frac{1}{3} L^2) = \frac{1}{4} M (R^2 + \frac{1}{3} L^2)$$

23. *Cône plein* et droit tournant autour de son axe de symétrie A.

Une section quelconque perpendiculaire à l'axe est un cercle de rayon variable r, et qu'on peut considérer comme ayant une épaisseur dh. Donc (15) le moment d'inertie



$$= \frac{\varpi}{g} \frac{1}{2} \pi \int_0^R r^4 \, dh.$$

Mais dans le cône H : R :: dh : dr; d'où $dh = \frac{H}{R} dr$,

donc enfin

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \frac{1}{2} \pi \frac{H}{R} \int_0^R r^4 dr = \frac{\varpi}{g} \frac{1}{10} \pi H R^4 = \frac{3}{10} M R^2$$

24. Si le cône tournait autour d'un axe B passant par son centre de gravité et perpendiculaire à son axe de symétrie, on aurait

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{1}{20} \pi R^2 H (R^2 + \frac{1}{4} H^2) = \frac{3}{20} M (R^2 + \frac{1}{4} H^2)$$

25. *Sphère pleine* tournant autour de son diamètre 2 R ou axe A; c'est encore une somme de cercles d'une épaisseur dx et d'un rayon y (15)

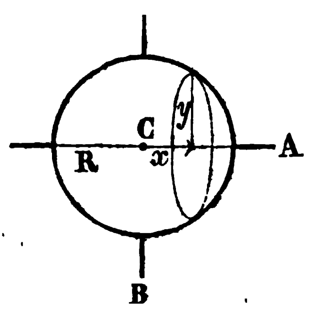
d'où $$I_c = \frac{\varpi}{g} \frac{1}{2} \pi \int_{-R}^{+R} y^4 dx$$

Mais dans la sphère on a toujours

$$y^2 = R^2 - x^2$$

et

$$y^4 = R^4 - 2R^2 x^2 + x^4$$



Substituant et intégrant, il vient

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

c'est la masse de la sphère réduite à ses deux cinquièmes et concentrée à l'extrémité de son rayon équatorial.

26. Au reste, on obtiendra, en général, le moment d'inertie d'un solide de révolution quelconque pris par rapport à son axe de figure en intégrant

$$\frac{\varpi}{g} \frac{1}{2} \pi \int y^4 \, dx$$

après avoir substitué pour y sa valeur en x résultant de l'équation de la courbe génératrice de la surface du solide, x étant l'abscisse de cette courbe comptée suivant l'axe de figure du solide, et y l'ordonnée perpendiculaire à cet axe.

27. *Segment sphérique.* S'il ne restait de la sphère que le segment sphérique plein qui a pour flèche $F = R + x$ dans la figure ci-dessus, on aurait dans le cas de la rotation autour de l'axe A

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \pi F^3 \left(\frac{2}{3} R^2 - \frac{1}{2} F R + \frac{1}{10} F^2\right)$$

ce qui donnerait le moment de la sphère totale et faisant $F = 2R$.

28. Si l'axe de rotation était celui des diamètres B de la sphère qui est parallèle à la section, on aurait, en faisant $F - R = f$

$$I_d = \frac{\varpi}{g} \frac{1}{60} \pi \left[16 R^5 + 15 R^4 f + 10 R^2 f^3 - 9 f^5\right]$$

29. *Ellipsoïde plein* dont les trois axes sont a, b, c, tournant autour de l'axe c

$$I_c = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{4}{3} \pi a b c \times \frac{1}{5} (a^2 + b^2) = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$$

30. k étant la distance du centre de *gyration* d'un corps tournant à l'axe fixe, on tirerait des moments donnés ci-dessus les valeurs de k, puisque l'on a par définition (p. 249)

$$M k^2 = I \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

MORAINES. Amas considérables de sables et de débris de rochers que l'on rencontre au bord inférieur des glaciers, et qui forment des espèces d'enceintes qui les encaissent. On en voit presque toujours plusieurs les unes au-dessus des autres.

MORTIERS. Mélanges intimes de chaux vive et de sable en proportions qui varient avec la nature de la chaux, et qui servent à lier entre eux les matériaux de constructions.

Communément, les proportions en volume sont : sable de rivière 2 + chaux mesurée vive 1, ou encore sable 3 + chaux vive 2, suivant que la chaux foisonne plus ou moins. Quand elle est très-bonne et grasse, la limite extrême de la proportion de sable est environ 3 contre un de chaux.

Le mélange s'opère habituellement dans un bassin formé avec le sable même qui doit entrer dans le mélange; au centre est la chaux à laquelle on ajoute un peu d'eau. Puis, à l'aide de *rabots* ou *rables* à long manche, on brouille le tout jusqu'à ce que le mélange soit devenu aussi intime qu'il est possible, et on laisse *ressuer* le tout environ douze heures avant de l'employer. Le mélange a été mal fait si, après le *ressuage*, on distingue dans le mortier les molécules de la chaux à leur couleur blanc de lait.

Il importe beaucoup de mouiller les matériaux avant de les lier, afin qu'ils n'absorbent pas trop rapidement l'eau des mortiers. L'*adhérence* qui s'établit entre eux dépend ensuite du temps, et du degré de poli et de porosité des matériaux. En général, les mortiers adhèrent plus aux surfaces inégales qu'aux surfaces unies, — plus aux pierres à texture grossière qu'à celles à pâte fine, — plus aux matériaux poreux qu'aux pierres compactes, — plus, dès lors, aux pierres meulières qu'aux calcaires, — mais plus aussi aux calcaires qu'aux granits. Les basaltes et les grès, dont la texture et la porosité sont cependant très-différentes, passent toutefois pour ceux des matériaux de construction qui contractent avec les mortiers la moindre adhérence. Le temps augmente de plus en plus l'adhérence des mortiers, mais avec beaucoup plus d'intensité pendant les deux premières années que pendant toutes celles qui suivront, et il semble que, dans les constructions ordinaires, l'adhérence atteigne à très-peu près sa limite d'intensité au bout de sept ou huit ans. Quant à la valeur absolue de cette adhérence, elle varie non-seulement avec les mortiers, les matériaux et la durée, mais nécessairement aussi avec les méthodes employées pour la mesurer. L'adhérence est-elle en effet la résistance à l'effort *normal* au plan de joint, ou bien celle à l'effort *parallèle* à ce plan, qu'il faudra exercer pour délier un mètre carré de surface. Dans le premier cas, voici ce que *Rondelet* nous apprend :

Rondelet.	Effort normal au plan de joint rapporté au mètre carré.
Pierres de liais polies au grès, liées depuis six mois avec mortier ordinaire de chaux et de sable.	12800 kil.
Mêmes pierres moins polies, les autres circonstances restant les mêmes.	14000
Pierres d'Arcueil..	14400
Idem de Conflans.	21600
Idem meulières.	24600
Briques de Bourgogne.	27600
Tuileaux.	28200

Les surfaces de joint n'avaient, en fait, que $\frac{1}{400}$ de mètre carré, et l'on a multiplié par 400 les efforts donnés par l'expérience pour former la table ci-dessus.

Si l'on prend, au contraire, la résistance au *glissement* pour mesure de l'adhérence, on a avec MM. *Boistard* et *Morin*, en rapportant toujours les efforts au mètre carré :

Boistard.	Aire réelle du joint en mètres carrés.	Effort parallèle au plan de joint rapporté au mètre carré.
Calcaire bouchardé sur calcaire bouchardé avec mortier de chaux grasse et sable fin durci à l'air, après 17 jours..	mm mm 0.01 à 0.02	6600
Idem, *idem*, *idem*, *idem*.	0.03 à 0.04	9400
Idem, *idem* avec mortier de chaux grasse et de ciment durci à l'air, après 17 jours. . .	0.01 à 0.02	3200
Idem, *idem*, *idem*, *idem*, *idem*..	0.03 à 0.05	5300
M. Morin.		
Calcaire tendre sur calcaire tendre avec mortier de 1 chaux hydraulique de Metz + 3 sable fin, durci à l'air, après 83 jours. . . .	0.01 à 0.02	18000
Idem, *idem*, après 48 jours.	0.02 à 0.03	12000
Idem, *idem*, *idem*.	0.04 à 0.06	10000
Idem, *idem*, *idem*.	0.07 à 0.08	9400
Idem, *idem*, après 43 jours.	0.02 à 0.03	10100
Briques ordinaires, même mortier, après 48 jours.	0.013	14000
Idem, *idem*, *idem*.	0.026	10000

Ainsi, d'après M. *Boistard*, la résistance au glissement rapportée au mètre carré *augmenterait* avec l'étendue du joint ; elle *diminuerait*, au contraire, avec cette étendue, d'après M. *Morin*. Mais en comparant dans ces tableaux les résultats qui se rapportent à des circonstances à peu près semblables (briques), on pourrait peut-être conclure que l'effort normal est sensiblement le double de l'effort parallèle. Toutefois, je craindrais que la pression atmosphérique

(environ 10000 kil. par mètre carré) n'ait joué dans les expériences de *Rondelet* un rôle très-influent dont il ne paraît pas avoir tenu compte. S'il en était ainsi, la conclusion ci-dessus deviendrait entièrement inexacte, de sorte que l'examen comparé de ces trois tableaux ne conduit finalement qu'à l'incertitude et au doute (Voy. *Béton*, p. 125).

MOULINS A BLÉ. *Systèmes de mouture.* D'après une notice intéressante consacrée par M. *Pouillet* à l'histoire de la meunerie, on distinguait autrefois un grand nombre de systèmes de mouture, parmi lesquels on citera la *mouture rustique pour le pauvre*, la *rustique pour le riche* et la *rustique pour le bourgeois*, la *mouture en grosse*, la *mouture économique*, et enfin la *mouture lyonnaise*.

Les produits des trois moutures *rustiques* ne différaient guère entre eux que par la quantité de *son* que leur laissait un blutage plus ou moins parfait, quantité qui diminuait naturellement avec le degré d'aisance du *pauvre*, du *bourgeois* et du *riche*. Le produit brut s'obtenait d'ailleurs par une même méthode, connue encore aujourd'hui sous le nom de *mouture en grosse* ou *à la grosse*, et qui consiste à ne faire passer le blé qu'une seule fois sous la meule. Ce ne fut guère que vers l'année 1760 que la *mouture économique* commença à se répandre en France. Elle ne diffère, au fond, de la mouture à la grosse, qu'en ce que, après le premier passage, on y remoud de nouveau les sons et les gruaux qui ont été séparés par le blutage; et l'on peut voir, par les résultats de l'un et l'autre mode consignés à l'article *Blé* (pag. 144), que la mouture dite *économique* mérite assez bien la dénomination qui lui a été conservée. Quant à l'idée de remoudre les sons, elle est d'un siècle au moins antérieure à l'introduction de la mouture *économique*, ainsi que le montre ce singulier passage des statuts des boulangers, renouvelés en 1658 : « *Défenses sont faites à tous boulangers de faire remoudre aucun son pour par après en faire et fabriquer du pain, attendu qu'il serait indigne d'entrer au corps humain, sous peine de 48 livres d'amende.* » Enfin, la *mouture lyonnaise* imaginée par le meunier *Bucquet* n'était, comme il le dit, qu'un *raffinement* de la mouture économique. On reconnut, il est vrai, qu'elle ne laissait plus dans le son aucune trace de farine, mais on l'accusa de faire passer dans la farine une notable quantité de son pulvérisé, substance qui, s'il faut en croire des recherches récentes, serait toutefois très-nutritive encore et nullement *indigne* dès lors *d'entrer au corps humain*.

Meules, grandeur et poids. Les anciennes meules dites de Paris avaient jusques à 2 mètres, et même 2^{m}.30 de diamètre; les meules anglaises n'ont guère que 1^{m}.40 et même 1^{m}.30. D'après un assez grand nombre d'observations discutées par *Navier* avec soin et conscience, la pratique aurait conduit à donner aux meules un

poids tel, que l'effort qu'elles exerceraient par mètre carré, si elles posaient librement sur une surface horizontale, ne soit pas inférieur à 600 kil., ni supérieur à 1070 kil., et il admet 850 kil. comme une charge moyenne convenable.

Vitesse des meules. On prend pour mesure de cette vitesse celle V_1 d'un point situé aux *deux tiers* du rayon R, à partir du centre, $\frac{2}{3}$ R étant le bras de levier moyen du frottement ou de l'*attrition* de la meule. Il en résulte la relation $\omega = \frac{3\,V_1}{2R} = \frac{3\,V_1}{D}$ entre la vitesse angulaire ω et celle du point en question. La vitesse V_1 est assez variable, et quoique *Fabre* ait prétendu que la farine *s'échauffait* lorsqu'elle dépassait $3^m.85$, elle a souvent atteint 5 et même 6 mètres. Elle est habituellement fixée en Angleterre à $4^m.80$; *Navier* adopte $V_1 = 4^m$ comme une moyenne vitesse convenable.

Travail dépensé. Il admet en outre, pour l'effort moyen exercé au point situé aux deux tiers du rayon, le *vingt-deuxième* de la charge par mètre carré qui serait due au poids de la meule. Il résulte de ces diverses données moyennes :

$$\text{Nombre de tours par seconde} = \frac{4^m}{\frac{2}{3}\pi D} = \frac{1.91}{D}$$

$$\text{Charge par mètre carré} = 850^k \times \frac{1}{4}\pi D^2 = 668\ D^2\ \text{kil.}$$

$$\text{Effort} = \frac{1}{22} \times 668 D^2 = 30.36 D^2\ \text{kil.}$$

$$\text{Travail utile} = 4 \times 30.36\ D^2 = 121.4\, D^2 = T\ \text{kilogrammètr.}$$

Ouvrage fait. En évaluant le travail de la meule comme ci-dessus, *Navier* a trouvé qu'à 1000 kilogrammètres dépensés sur l'axe de la meule correspondaient des quantités de blé moulu à la grosse, qui ont varié de $0^k.15$ à $0^k.24$, — que pour les bons moulins où des meules de $1^m.50 = D$ font 90 à 100 tours par minute, on pouvait adopter $0^k.20$, chiffre que des observations postérieures ont quelquefois élevé à $0^k.25$ — enfin, que pour des meules moins bien taillées, ayant trop peu de vitesse, on ne devait compter que sur $0^k.15$. En adoptant $0^k.20$ comme une bonne moyenne, on trouve que l'on obtiendrait, en échange de $T = 121.4\ D^2$ kilogrammètres dépensés sur l'axe de la meule, une quantité de blé moulu à la grosse $= 0^k.02428\ D^2$. Lorsqu'on emploie le mode de mouture économique, on peut compter que le tiers de la durée du travail du moulin sera employé à remoudre les gruaux. En d'autres termes, la mouture à la grosse de 100 kil. de blé dans les bons moulins ordinaires exigerait une dépense de travail sur l'axe de la meule équivalente à 500000 kilogrammètres. Si ce travail doit s'accomplir en une heure ou 3600 secondes, le travail à dépenser par

seconde sur l'axe de la meule devient $=138^{km}.88$ ou 140^{km} en nombre rond, soit en *chevaux*, 1.867.

Hachette, dont les observations et les calculs manquent souvent de précision, évalue à 825000 kilogrammètres le travail, mesuré sur l'arbre de la roue hydraulique des moulins de Corbeil, qu'exige la mouture à la grosse du quintal métrique de blé. Cette donnée élèverait à 229 kilogrammètres ou 3.05 chevaux le travail à dépenser par seconde pour moudre à la grosse 100 kil. de blé à l'heure. Ce travail étant mesuré sur l'arbre de la roue, on voit qu'en rapprochant ce résultat du précédent, on perdrait entre cet arbre et l'axe de la meule 90 kilogrammètres ou 1.2 cheval sur les communications du mouvement, ce qui paraît bien fort.

En admettant cette donnée exagérée, la mouture économique de 100 kil. de blé à l'heure, qui exige environ moitié en sus de la mouture à la grosse, porterait à 2.8 chevaux et 4.55 chevaux, ou 210 kilogrammètr. et 343 kilogrammètr. le travail à dépenser respectivemement sur l'axe de la meule et sur l'arbre de la roue hydraulique. La dernière évaluation semblera peut-être trop forte, si on la rapproche de celle qui suit.

En effet, par une moyenne entre deux observations de M. *Mallet*, l'une à *Pontoise* et l'autre à *Vast*, le travail moteur dû à la *descente* de l'eau, du niveau du bief supérieur au niveau du bief inférieur, ou le travail *absolu* dépensé pour moudre et remoudre sur gruaux 100 kil. de blé à l'heure dans un moulin mu par une roue à augets, a été trouvé égal à $378^{km}.5$, ou à très-peu près 5 chevaux; et comme on ne peut pas supposer que cette roue ait utilisé plus de 0.7 du travail de la chute, il reste au plus sur l'arbre de la roue un travail disponible $=3.5$ chevaux. Admettant 0.5 cheval pour le travail absorbé par les communications de mouvement, chiffre assez bien confirmé par d'autres observations, on retombe à peu près sur le travail indiqué par *Navier*, comme celui qui devrait être transmis à l'axe de la meule.

Cependant, deux autres observations, de M. *Farey* et de MM. *Cazalès* et *Cordier*, donnent pour le travail transmis à l'arbre du volant d'une machine à vapeur, pour 100 kil. moulus à l'heure d'après le système anglais, les nombres très concordants 297 kilogrammètr., et 301 kilogrammètr., soit en nombre rond 4 chevaux.

Cette dernière donnée me paraît celle que la prudence conseillerait d'adopter comme base d'un projet, bien qu'une autre observation de *Hachette*, sur les moulins anglais de Saint-Denis, élève à 4.4 chevaux le travail qu'exige la mouture finie d'un quintal de blé.

MOULINS A VENT. Tout ce que nous savons sur cette classe importante de *recepteurs* est contenu dans les cinq lignes qui forment le tableau ci-dessous, résumé général des observations faites par

Coulomb en 1781, sur les moulins des environs de Lille. L'arbre moteur de ces moulins, de $0^m.50$ à $0^m.60$ d'équarrissage, incliné de 10 à 15° sur l'horizon, est traversé par deux *volants* en croix de douze à treize mètres de longueur formant les arêtes inférieures des quatre ailes du moulin. Ces rayons de 6^m environ sont prolongés chacun par des pièces entées, et justement nommées *entes*, d'environ 7^m, ce qui porte le rayon ou *fouet* de l'aile à 12 ou 13^m. A partir d'une distance de l'arbre moteur, à peu près égale à 2^m, et jusqu'à l'extrémité du fouet, volants et entes sont traversés par des lattes de $2^m.50$ à $2^m.60$ de longueur, espacées de $0^m.40$, et tout leur ensemble est recouvert d'une toile, plus d'une planche légère. Ces lattes ou traverses ne sont pas dans un même plan; elles forment une surface *gauche* telle que l'axe de rotation et la latte la plus rapprochée de cet axe étant projetés sur un plan horizontal, leurs projections forment entre elles un angle d'environ 60°, tandis que la projection de la traverse extrême de l'aile fait avec celle du même axe un angle de 78° à 84°, soit en moyenne 81°. Dans l'intervalle, les inclinaisons varient de telle sorte que les extrémités des traverses sont situées sur une ligne très-peu courbe. De plus, enfin, le volant et son ente, au lieu d'être rectilignes, sont un peu convexes au bâtiment. Il résulte de ces formes que si le vent soufflait parallèlement à l'arbre moteur, il rencontrerait la surface des ailes sous un angle moyen voisin de 70°. Ces moulins mettaient en mouvement des pilons qui, soulevés par un hérisson, retombaient ensuite librement, et bocardaient ainsi des graines de colza. Le produit de leur poids par leur levée a donné le travail utile du système; mais en 1781, *Coulomb* négligea le travail perdu par les chocs dont on ne commença guère à tenir compte, en effet, qu'après la publication du théorème de Carnot, en 1783 (pag. 327). En ajoutant ces pertes de force vive au travail utile et à celui des frottements, *Coriolis* a amendé les résultats de Coulomb, ainsi que le tableau l'indique. Coulomb a d'ailleurs pris pour la vitesse du vent celle de corps légers flottant librement dans l'air; mais je n'ai pas pu trouver l'indication de la direction du vent, par rapport à l'axe de l'arbre moteur; enfin, la surface de toile de chaque aile était, à très-peu près, de 20 mètres carrés, lorsqu'on marchait toutes voiles dehors.

Résultats déduits des observations de Coulomb.

Vitesses de corps légers et libres.	Surfaces de toile.	Vitesse angulaire des ailes.	Travail total par seconde.	
m	mm	m	km	
2.27	80	0.310	36.90	douteux.
2.27	80	0.576	21.90	marche à vide.
4.05	80	0.785	177.90	
6.50	80	1.360	682.60	
9.10	64	1.830	959.80	

On invoque souvent encore une longue série d'expériences entreprises par l'illustre *Smeaton*, en 1759, dans le but de déterminer les conditions d'établissement des moulins à vent, et la juste célébrité de Smeaton m'oblige, à regret, à les discuter au moins sommairement. Je dirai donc que, après avoir consciencieusement étudié son mémoire, j'ai perdu toute confiance dans les règles longtemps acceptées et imperturbablement reproduites depuis bientôt un siècle, qu'il a pu tirer de ses observations. Son appareil, véritable jouet scientifique, portait des ailes d'environ $0^m.46$ de longueur, et de $0^m.14$ de largeur, dont l'aire totale n'était pas même $\frac{1}{100}$ de celle que la pratique exige. Afin de n'avoir point à mesurer la vitesse du vent, c'était en mouvant le moulin lui-même, à la rencontre de l'air calme, à une vitesse déterminée, qu'il obtenait le mouvement de rotation des ailes. De plus, ce transport général du moulin avait lieu *circulairement*, fixé qu'il était à l'extrémité d'une barre horizontale de $1^m.63 = R$, encastrée par son autre bout dans un arbre vertical que l'on faisait tourner plus ou moins uniformément, à l'aide d'un cordon. Ainsi, les ailes frappaient le fluide par leurs faces antérieures au lieu d'en être frappées; à leur revers, l'air se dilatait, tandis qu'il y est refoulé dans tous les cas pratiques. Le mouvement de transport circulaire de l'appareil, indépendamment d'autres causes d'erreur, donnait à chaque élément d'une même aile situé à la distance r de l'axe du moulin des vitesses par rapport à l'air qui variaient pour *chaque demi-tour* de l'aile dans le rapport de $R+r$ à $R-r$, soit de 1 à 0.56 pour l'élément extrême. Que si à tant de causes d'incertitude on ajoute que la durée de chaque observation ne pouvait guère dépasser 60 secondes, on conclura sans doute, avec nous, que les règles de *Smeaton* ne sauraient conserver l'importance pratique qu'on leur a attribuée à l'époque de leur publication.

Quant aux *théories*, leur perfectionnement dépend d'observations qui nous manquent encore; elles ne sauraient, dans leur état actuel, diriger les praticiens. (Voyez *Parent*;—*d'Alembert*, Traité du mouvement des fluides, 1744; *Euler*, *de Constructione molarum*, Pétersbourg, 1752;—*Navier*, Leçons de mécanique, 1838, et surtout *Coriolis*, Calcul de l'effet des machines, 1844.)

MOUVEMENT. Voyez *Forces*, pag. 776.

MOYENS PROPORTIONNELS. Nombres intermédiaires d'une série dont les termes successifs sont assujettis à croître par *différences* constantes ou suivant un *rapport* constant. (Voyez *Progressions*.)

Pour insérer entre deux nombres donnés $u > a$ m *moyens proportionnels* par différence, *on divise l'excès de* u *sur* a *par le nombre* m *de moyens à insérer augmenté de* 1. *Le quotient obtenu est la différence* d *d'un terme au terme suivant de la série*

$$\frac{u-a}{m+1}=d$$

Ainsi, pour insérer 5 moyens proportionnels *par différence* entre 7 et 10, on obtiendrait $d=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et la série

7 — 7.5 — 8 — 8.5 — 9 — 9.5 — 10.

Si les termes doivent se succéder suivant un rapport constant q, les moyens proportionnels sont dits géométriques, et pour *insérer entre deux nombres donnés* u *et* a m *moyens proportionnels géométriques, il faut prendre le quotient* $\frac{u}{a}$, *en extraire une racine d'un degré égal au nombre des moyens augmenté de* 1. Cette racine sera le quotient q ou la raison de la série

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{u}{a}} \qquad \text{et log. } q=\frac{\text{log. } u-\text{log. } a}{m+1}$$

Les nombres de vibrations accomplis en une seconde par les diverses parties d'une même corde vibrante sont en raison inverse des longueurs de ces parties. On sait d'ailleurs que, sous la même tension, les sons émis respectivement par une corde vibrante et par la moitié de cette corde sont entre eux à intervalle d'octave. On demande les longueurs relatives des diverses parties de la corde totale qui donneraient les onze demi-tons intermédiaires, la corde totale ayant *un* mètre de longueur.

La question revient à celle-ci : insérer 11 moyens proportionnels géométriques entre 1 et 0.5, ce qui conduirait à l'extraction d'une racine douzième

$$q=\sqrt[12]{2}\ .$$

qu'on obtient avec assez d'approximation par logarithmes (p.1054).

$$\text{log. } q=\frac{0.3010300}{12}=0.02508583$$

$$q=1.059463$$

On a donc, pour les longueurs de la partie de la corde de 1 mètre à faire vibrer, la corde étant supposée donner l'ut_1 grave lorsqu'elle vibre à vide :

1^m.00000	0^m.943874	0^m.890898
ut_1	*ut dièze* ou *re bémol.*	*Re*
0^m.840896	0.793700	0.749153
Re.d=mi.b	*mi=fa.b*	*fa.*

0m.707106 *fa. d = sol. b*	0m.667370 *sol*	0m.629961 *sol. d = la. b*
0m.594603 *la*	0m.561231 *la. d = si. b*	0m.529731 *si* = ut_2*. b*
0.500000 ut_2 = *si. d.*		

Ce tableau peut servir à diviser un *monocorde* de *tempérament* égal, après avoir donné à la corde une tension telle que la division 0m.594603 vibre à l'unisson d'un diapazon.

MULET. L'emploi de ce robuste animal dans les mines présenterait, d'après M. *Gervoy*, au moins autant d'avantages que celui du *bœuf* (pag. 150); il coûte moins de première acquisition et de nourriture; il marche plus vite, est moins encombrant et supporte mieux le manque d'air. Il donne le même effet utile que le *cheval* (pag. 317), parce qu'il ne lui faut pas d'aussi longs intervalles de repos. Toutefois, il est plus difficile à conduire que le bœuf, et ne convient, à cause de cela, que pour de grandes distances.

Au jour, le mulet employé à porter sur son dos ne doit guère être chargé, s'il doit faire un travail continu, de plus de 100 à 125 kilogrammes, le bât non compris, à raison de huit lieues par jour.

MURS. 1. On a nommé *murs de clôture* ceux qui ceignent une cour, un jardin, un enclos;

Murs de soutènement, de *revêtement* ou de *terrasse*, ceux qui soutiennent des terres placées derrière eux;

Murs de face ceux qui dans les bâtiments forment leurs façades. Lorsque ces murs se terminent en pointe, on les nomme *murs de pignon;*

Murs de refend ceux qui dans les bâtiments forment les divisions intérieures.

2. Avant d'exposer la théorie importante de la *stabilité des murs*, nous résumerons quelques-unes des règles pratiques qui en ont été déduites, et au moyen desquelles on parvient à déterminer assez exactement les dimensions que les murs doivent recevoir dans les circonstances les plus vulgaires.

3. *Murs de clôture.* Leur hauteur h est réglée par les convenances locales; leur longueur l est toujours déterminée par celle des côtés AL du polygone à clore (*pl.* XCII, *fig.* 1); leur épaisseur paraît devoir être assez convenablement fixée dans les cas ordinaires par la méthode suivante due à *Rondelet*.

4. *Epaisseur.* Avec $AH = h$ et $AL = l$ = distance de deux sommets consécutifs du polygone à clore, construisez un triangle rectangle AHL; à partir de H, et suivant que le mur de clôture devra être *fort*, *moyennement fort* ou *léger*, portez sur HL une lon-

gueur $Hm = \frac{1}{8}h$, $\frac{1}{10}h$ ou $\frac{1}{12}h$. Par le point m ainsi déterminé, menez me perpendiculaire à la verticale AH, me est l'épaisseur cherchée e. Cette règle n'est pas applicable quand la longueur du mur est très-petite.

5. Les murs de clôture sont couronnés par un *chaperon* arrondi en tablette ou coupé suivant un ou deux égouts, selon que les terrains situés des deux côtés appartiennent au même propriétaire ou à des propriétaires différents.

Des murs de clôture auxquels on donnerait 1 mètre de fondation, qui seraient assis, au niveau du sol, sur un socle en pierre de taille, qui, pour une hauteur de 3 mètres, auraient une épaisseur de $0^m.50$, qui d'ailleurs faits en bonne maçonnerie de moellons piqués ou essemillés, hourdés avec mortier de chaux et de sable, présenteraient, de 4 en 4 mètres, des chaînes en pierre de taille, seraient des murs à la fois solides et élégants.

6. Dans les localités où les vents sont redoutables, on adapte des éperons ou contreforts aux murs de clôture qui ont une grande longueur ; et, lorsque les terrains situés de part et d'autre d'un mur de clôture sont à des niveaux différents, il faut augmenter leur épaisseur d'après les règles que l'on trouvera plus loin, et y disposer des *évents* ou *barbacanes* pour faciliter l'écoulement des eaux supérieures.

7. *Les murs de clôture en pierres sèches* qui ne supportent aucune poussée, et dont la hauteur serait de 2 à 3 mètres, devraient recevoir une épaisseur de $0^m.80$ à 1^m et même $1^m.20$. S'ils supportent une poussée, ils rentrent dans la classe des *murs de revêtement* en pierres sèches (12).

8. *Murs de soutènement*, *de revêtement* ou *de terrasse*, en bonne maçonnerie. Le parement intérieur du mur étant vertical, aussi bien que le parement extérieur, on a, d'après *M. Poncelet* (Voyez son beau Mémoire sur la *stabilité des revêtements*) :

E étant l'épaisseur,
H la hauteur du mur,
n la hauteur de la surcharge des terres au-dessus de l'horizontale menée par le sommet du mur,
φ l'angle avec l'horizon du *talus naturel* des terres, angle qu'il ne faut pas prendre dans les tables, mais qui doit être mesuré directement, avec soin, sur les terres à soutenir et dans l'état où il sera le plus petit possible,
ϖ_1 le poids du mètre cube de ces mêmes terres, mesuré directement avec soin, sur les déblais et en temps de pluie, ou lorsqu'ils ont été convenablement arrosés,
ϖ le poids du mètre cube de la maçonnerie, également déterminé par la pesée directe des matériaux du mur,

$$E = 0.865\,(H+n)\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\frac{\varpi_1}{\varpi}} \quad \ldots \quad (1)$$

9. Les murs à parements verticaux, dont l'épaisseur E est donnée par cette formule, auront la stabilité des revêtements de *Vauban*, de dix mètres de hauteur, sans contreforts. Je montre plus loin que cette épaisseur E est presque rigoureusement celle que l'on obtient, en augmentant exactement de sa moitié l'épaisseur *e* du mur qui satisferait *strictement* à la stabilité du mur quant à la rotation autour de l'arête extérieure de sa base. $E = e + \frac{1}{2}e$.

10. *Transformation du profil.* La formule précédente ayant donné l'épaisseur E d'un mur de soutènement à parements verticaux, on pourra transformer le profil de ce mur en un autre profil à talus extérieur et de même stabilité, par la règle suivante, qui est encore due à *M. Poncelet*, et qui suppose que le talus extérieur ne dépasse pas un de base sur cinq de hauteur.

Règle. Prenez sur le parement extérieur vertical un point situé au neuvième de la hauteur H du mur, en partant du bas. Par ce point, menez une parallèle à l'inclinaison donnée du talus, elle déterminera, par son intersection avec les horizontales qui passent par la base et le sommet du mur, un trapèze qui sera le profil transformé de celui à parements verticaux $E \times H$ qu'on avait d'abord.

11. *Fondations des murs de soutènement.* On donne toujours un empattement aux murs de soutènement. Cet empattement, qui s'établit à peu près au niveau du sol, excède habituellement l'épaisseur E de la base du mur, savoir : du côté des terres, de $0^m.10$ à $0^m.15$, et extérieurement d'une quantité qui varie avec la nature des terrains, et qui s'élève à 1^m et $1^m.50$ pour les plus fermes, lorsque le revêtement a environ dix mètres de hauteur. En général, si le terrain est compressible, on devra s'arranger pour que la *ligne de résistance* (p. 1049) passe par le centre de figure de la base de la fondation, afin que la pression soit uniforme sur toute cette base; et conformément à la condition générale de stabilité établie par *M. Moseley* (p. 1051), il faudra, en outre, que la tangente à la *courbe des directions*, au point où elle coupe la base, forme avec la normale à la base, en ce point, un angle plus petit que l'angle du frottement des maçonneries sur le sol.

12. *Murs de soutènement en pierres sèches.* On leur donne toujours un talus extérieur considérable, et l'on dispose les pierres perpendiculairement au plan de ce talus.

13. *Talus extérieurs.* Un de base sur un, et un et demi de hauteur sur le bord des cours d'eau, lorsque l'on n'a que de petits matériaux, et le terrain étant vaseux ou sablonneux. Un de base sur deux et trois de hauteur, si le terrain est compact, et si l'on dispose de bons matériaux.

14. *Fondations.* Si le terrain est solide, leurs fondations s'établissent en enrochements à pierres perdues en avant desquels, s'il s'agit d'un mur de quai, on enfonce des pieux assez rapprochés pour que les pierres de l'enrochement ne puissent passer.

15. *Epaisseur.* Donner 0m.30 à 0m.50 au sommet, selon que le terrain et les matériaux sont plus ou moins bons; et faire croître l'épaisseur de 0m.05 par mètre de longueur du talus, si l'inclinaison est faible, et de 0m.10, si le talus est rapide (*Ardant*, Cours de construction).

Si le talus est très-faible ou si les parements du mur en pierres sèches sont tous deux verticaux (ce qu'il convient d'éviter), on leur donne une épaisseur $=1.25 \times E$, E ayant été d'abord calculé par la formule (1).

16. *Murs de face et murs de refend.* Les murs de face doivent toujours recevoir un talus extérieur ou *fruit*, qui varie de $\frac{1}{80}$ à $\frac{1}{200}$ de la hauteur totale du mur. Intérieurement, on diminue leur épaisseur à chaque étage, en partant du bas vers le haut, en pratiquant des retraites de 0m.05 à 0m.10, qui facilitent la pose du plancher.

17. *Murs de refend.* Les murs de refend ont leurs parements verticaux, et, à l'exception de ceux qui forment les cages d'escaliers, on leur donne des retraites correspondantes à celles des murs de face.

18. *Epaisseurs des murs de face et de refend* des bâtiments ordinaires, *lorsqu'ils n'ont à supporter que des pressions verticales.*

E étant l'épaisseur que le mur doit recevoir au niveau du plancher de l'étage,

h la distance verticale de ce plancher à celui de l'étage supérieur,

H la distance verticale entre le niveau du plancher de l'étage et la base de la couverture du bâtiment,

n le nombre des étages du bâtiment,

L la longueur totale du bâtiment, quand on calculera l'épaisseur d'un mur de face, ou la longueur totale à refendre, lorsqu'il s'agira de murs de refend,

On a, d'après *Rondelet*, les formules pratiques qui suivent :

Murs de face.

$$\text{bâtiments doubles } E = \frac{L+H}{48} + (0^m.027 \text{ à } 0^m.054)$$

$$\text{bâtiments simples } E = \frac{2L+H}{48} + (0^m.027 \text{ à } 0^m.054)$$

Murs de refend. . . . .

$$E = \frac{L+h}{36} + n(0^m.013 \text{ à } 0^m.027)$$

Un mur de pignon reçoit au plus l'épaisseur du mur de face correspondant.

La fraction à ajouter à la valeur du premier terme des E dans les formules ci-dessus se prend d'autant plus grande que la maçonnerie est moins bonne, que le terrain est plus compressible, que les matériaux sont moins réguliers, que les ébranlements du sol sont plus considérables, les intempéries et l'action des pluies plus redoutables, et les surcharges accidentelles plus grandes.

19. Voici du reste, d'après M. *Ardant* (Cours de construction), les résultats moyens d'observations pour des bâtiments dont les hauteurs d'étages sont de 3 à 4 mètres et d'une longueur indéterminée.

	ÉPAISSEUR du mur de face.			ÉPAISSEUR du mur de refend.		
	m		m	m		m
Aux fondements	0.73	à	0.97	0.70	à	0.80
Au niveau des caves	0.57	à	0.81	0.50	à	0.60
Au rez-de-chaussée	0.48	à	0.65	0.35	à	0.40
Au 1er étage	0.43	à	0.54	»		»
Au 2e étage	0.40	à	0.48	»		»
Au 3e étage	0.30	à	0.42	0.20	à	0.30

20. *Cloisons et pans de bois.* On donne aux pans de bois une épaisseur moitié de celle des murs en maçonnerie et aux cloisons un quart seulement. Voici quelques autres résultats pratiques :

21. *Murs en pierres de taille.* Lorsque les murs sont entièrement en pierres de taille, on peut, suivant leur hauteur, et dans les maisons particulières, ne leur donner que de $0^m.40$ à $0^m.65$ d'épaisseur par le bas, cette épaisseur étant mesurée sur la retraite des premières assises.

22. *Murs en pierres de taille et moellons, meulières ou briques.* Deux assises de pierres de taille par le bas; mêmes pierres aux encoignures et pieds-droits jusqu'à la hauteur de deux mètres; mêmes pierres aux jambes sous poutres dans toute leur hauteur; le reste en MOELLONS *essemillés*. Epaisseur au-dessus de la retraite $= 0^m.64$.

23. *Murs de refend du même genre.* Assise de pierre dure au rez-de-chaussée. — Pieds-droits et plates-bandes des ouvertures en pierres de taille, le reste en moellon; épaisseur minimum, $0^m.54$ dans les grands bâtiments, et $0^m.48$ dans les autres.

24. Mais ces règles empiriques applicables seulement aux cas les plus vulgaires, sont bien éloignées de pouvoir suffire aux besoins des ingénieurs ou même des architectes. Nous allons, en conséquence, reprendre cette importante question de la stabilité des murs, en prenant pour guide la seule théorie très-ingénieuse et très-générale, entièrement due à M. *Moseley*, et sur laquelle nous avons déjà appelé l'attention des ingénieurs au mot *Ligne de résistance* (p. 1049).

25. *Conditions de stabilité d'un mur à parements verticaux* **EFBA** *d'une épaisseur constante* **AB** (fig. 2, pl. XCII).

P représente en intensité et direction la poussée qui est exercée sur un mètre courant de mur. Elle coupe l'axe du mur en O.

ϖ est le poids du mètre cube de maçonnerie, poids qui, en pratique, doit être directement évalué par une pesée des matériaux mêmes de la construction.

e l'épaisseur constante BA du mur.

α est l'angle de la direction de P avec la verticale.

IK est l'assise du mur immédiatement inférieure au point d'application de la poussée. Cette assise est horizontale.

$AK = x$ est la distance de cette assise au sommet A du mur.

$k = CG$ est la distance, à partir de l'axe CD du mur, à laquelle son plan supérieur BA rencontre la direction de la poussée P.

Par le point O, où la direction de P rencontre l'axe du mur, et suivant cette direction, menez OS proportionnelle à P; par le même point O, à la même échelle, menez ON proportionnelle au poids d'un mètre courant de mur ayant pour section verticale le rectangle BAIK. Achevez le parallélogramme OSRN, et OR est, en direction, intensité et sens, la résultante de la poussée et du poids de BAIK. Prolongez cette résultante OR jusqu'à sa rencontre en Q avec l'assise IK immédiatement inférieure, et Q sera nécessairement un point de la LIGNE DE RÉSISTANCE (p. 1049). Appelons y la distance MQ de ce point à l'axe CM du mur, et menons RL perpendiculaire à cet axe; nous aurons facilement :

$$\frac{QM}{OM} = \frac{RL}{OL} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{CM - CO} = \frac{RN \sin. RNL}{ON + NL}$$

ou enfin
$$\frac{y}{x - k \operatorname{cotang}. \alpha} = \frac{P \sin. \alpha}{\varpi\, ex + P \cos. \alpha}$$

relation qui donne pour l'équation générale de la *ligne de résistance* ou courbe des points d'application dans ce système.

$$y = \frac{P(x \sin. \alpha - k \cos. \alpha)}{\varpi\, ex + P \cos. \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

26. *Cette courbe est une hyperbole équilatère.* En effet, si après avoir mis l'équation (2) sous la forme

$$y(\varpi ex + P \cos. \alpha) = Px \sin. \alpha - Pk \cos. \alpha$$

on divise par ϖe; on transpose, on change les signes et l'on ajoute à chacun des membres le terme

$$\frac{P^2 \sin. \alpha \cos. \alpha}{\varpi^2 e^2}$$

il vient

$$\left(\frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}-y\right)\left(x+\frac{P \cos.\alpha}{\varpi e}\right)=\frac{P \cos.\alpha}{\varpi e}\left(k+\frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}\right)$$

faisant alors

$$CH=\frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}; \qquad HT=\frac{P \cos.\alpha}{\varpi e}$$

$$VQ=y_1 \qquad \text{et} \qquad TV=x_1$$

comme l'on a d'ailleurs :

$$y_1=VQ=VM-MQ=CH-MQ=\frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}-y$$

$$x_1=TV=HV+TH=x+\frac{P \cos.\alpha}{\varpi e}$$

l'équation de la courbe prend la forme

$$x_1 y_1=\frac{P \cos.\alpha}{\varpi e}\left(k+\frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}\right)=\text{quantité constante.}$$

C'est l'équation d'une *hyperbole équilatère* (p. 937), dont l'asymptote est TX.

27. *Conséquences*. Donc, 1° la ligne de résistance approche sans cesse de TX, mais sans jamais l'atteindre ; 2° tant que TX sera comprise dans l'intérieur de la masse, c'est-à-dire tant que l'on aura :

$$CH<CB \quad \text{ou} \quad \frac{P \sin.\alpha}{\varpi e}<\frac{1}{2}e \quad \text{ou} \quad 2 P \sin.\alpha<\varpi e^2$$

la ligne de résistance ne coupera nulle part le parement extérieur, et la stabilité du mur, quant à la rotation, sera théoriquement assurée *à quelque hauteur qu'on l'élève* ; 3° c'est à la base du mur que la ligne de résistance approche le plus du parement extérieur.

28. *Plus grande hauteur du mur*. On peut encore vérifier la seconde conséquence en remarquant que, pour le point de la courbe des résistances où elle *toucherait* le parement extérieur, on aurait $y=\frac{1}{2}e$. Or, si l'on tire de l'équation (2) de cette courbe, la valeur H de x correspondante à cette ordonnée extrême, il vient

$$H=\frac{P\left(k+\frac{1}{2}e\right)\cos.\alpha}{P \sin.\alpha-\frac{1}{2}\varpi e^2} \qquad (3)$$

expression qui montre que $P \sin.\alpha=\frac{1}{2}\varpi e^2$ rendrait la hauteur H du mur *infinie*, et que, dès lors, la stabilité du mur, quant à la rotation, est strictement assurée contre la poussée P, quelle que soit sa

hauteur, tant que P sin. α ne dépasse pas $\frac{1}{2}\varpi e^2$ ou comme ci-dessus, tant que l'on a

$$2\,\mathrm{P}\sin.\alpha < \varpi e^2 \quad \text{ou} \quad e > \sqrt{\frac{2\,\mathrm{P}\sin.\alpha}{\varpi}}$$

29. *Pour obtenir un excès de stabilité* déterminé par la valeur m du *module de stabilité* (*) (p. 1051), il suffit évidemment de faire $y = (\frac{1}{2}e - m)$ dans l'équation (2) de la ligne de résistance; et, mettant h = hauteur du mur à la place de x, on a, pour l'épaisseur pratique E compatible avec ce degré de stabilité,

$$\mathrm{E} = -\left(\frac{\mathrm{P}\cos.\alpha}{2\varpi h} - m\right) + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{P}\cos.\alpha}{2\varpi h} - m\right)^2 + \frac{2\mathrm{P}}{\varpi}\left[\sin.\alpha - \left(\frac{k-m}{h}\right)\cos.\alpha\right]} \quad (4)$$

En faisant $m = o$ dans cette formule, on aurait l'épaisseur e relative à l'équilibre strict.

30. *Stabilité quant au glissement des assises.* Il ne suffit pas que le mur ne puisse pas *tourner*, il faut encore qu'aucune de ses assises ne puisse *glisser* sur son lit de pose. Or OS, qui représente une poussée constante P, étant constant quelle que soit la position du lit horizontal IK, tandis que ON, qui représente la charge supérieure à ce lit, grandit sans cesse à mesure que ce lit s'abaisse au-dessous du sommet du mur, l'angle ROM diminue quand x augmente. Mais cet angle ROM est égal à celui que fait la direction de la résultante OR avec la normale en Q au lit IK. Donc, si cet angle est plus petit que l'angle φ du frottement du lit IK pour la position la plus élevée de ce lit, il sera plus petit *à fortiori* pour toute position de ce lit moins rapprochée du sommet du mur. Or, la position la plus élevée que puisse prendre IK est celle qui correspond à ON = 0, et l'angle en question est alors $= \alpha$. Donc, toutes les fois que l'on aura

$$\alpha < \varphi,$$

le glissement ne sera possible sur aucune assise inférieure, et la ligne de pression, ou la *courbe des directions* (p. 1051), se réduit au point unique O.

(*) Il ne faut pas confondre ce *module de stabilité* avec le *coefficient de stabilité* des ingénieurs français. Ce *coefficient* est un facteur par lequel ils multiplient l'intensité de la poussée P avant de déterminer l'épaisseur pratique qui mettra la construction au-dessus de l'équilibre strict. Le *module de stabilité* de M. *Moseley* est une ligne m, plus courte distance de la courbe des points d'application au périmètre du profil, et il ressort du beau mémoire de M. *Poncelet* sur la stabilité des *revêtements* que *Vauban* aurait adopté $m = \frac{5}{9}d$ pour le *module de stabilité* de ce genre de construction, d étant la distance de l'arête extérieure de la base à la verticale passant par le centre de gravité du revêtement.

31. *Influence du déplacement du point d'application de la poussée* P. Si, après avoir substitué h pour x et $(\frac{1}{2}e-m)$ pour y dans l'équation (2), on en tire la valeur de m, on a

$$m=\frac{1}{2}e-\frac{(\mathrm{P}\,h\sin.\alpha-\mathrm{P}\,k\cos.\alpha)}{\varpi\,e\,h+\mathrm{P}\cos.\alpha}$$

formule qui montre que, pour une épaisseur déterminée e, le *module de stabilité* m peut acquérir la valeur que l'on voudra, en donnant à k une valeur convenable, c'est-à-dire en éloignant de l'axe du mur le point d'application G de la poussée à une distance convenable k. Entre autres moyens pratiques, on se contente d'indiquer celui de la *fig.* 3, pl. XCII; et la valeur de k qui donnera à son tour un module déterminé m sera

$$k=h\ \mathrm{tang}.\alpha-\left(\frac{1}{2}e-m\right)\left(1+\frac{\varpi\,e\,h}{\mathrm{P}\cos.\alpha}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\quad(5)$$

L'équilibre du mur exige, dans ces circonstances, que la ligne de résistance ne coupe nulle part le parement intérieur au-dessous du point D.

32. *Mur à parements verticaux soutenu par des étais* (*fig.* 4, *pl.*XCII). Concevons que le poids de chacune des parties du mur qui est maintenu par un étai soit comme condensé dans un mètre courant du mur dont la section constante est DACB, et dont nous représenterons encore le poids du mètre cube par ϖ. Soit P la poussée au sommet, Q la poussée sur l'étai, $2p$ le poids propre de cet étai, que l'on peut regarder comme divisé en deux parties égales $p=p$ agissant à chacune de ses extrémités E et F; soient encore β l'angle formé par l'étai avec la verticale, b la distance CF de son pied F à celui C du mur; $c=$EC; et conservons les autres notations. Si X est le point où la ligne de résistance coupe la base du mur, CX$=m$ est le *module de stabilité*, et l'égalité des moments, par rapport à X, donne

$$\mathrm{P}\times\mathrm{MX}+pm=\mathrm{Q}\times\mathrm{XN}+\varpi eh\times(\tfrac{1}{2}e-m)$$

puisque X est un point pris sur la direction de la résultante des forces. Or, on a

$$\mathrm{MX}=(s\mathrm{X})\sin.\alpha=(\mathrm{HK}-\mathrm{HT})\sin.\alpha=\sin.\alpha\,[h-(\mathrm{H}p+pt)]$$
$$=h\sin.\alpha-(k+\tfrac{1}{2}e-m)\cos.\alpha$$
$$\mathrm{XN}=(b+m)\cos.\beta=c\sin.\beta+m\cos.\beta$$

Substituant ces valeurs dans l'équation des moments et la résolvant par rapport à Q, il vient pour la poussée sur l'étai

$$\mathrm{Q}=\frac{\mathrm{P}[h\sin.\alpha-(k+\frac{1}{2}e)\cos.\alpha]-\frac{1}{2}\varpi e^2h+m(\mathrm{P}\cos.\alpha+\varpi eh+p)}{(b+m)\cos.\beta}\quad(6)$$

expression qui, mise sous la forme

$$Q=(P\cos.\alpha+\varpi eh+p)\,\text{séc.}\beta$$
$$-\frac{P[b\cos.\alpha-h\sin.\alpha+(k+\frac{1}{2}e)\cos.\alpha]+\varpi e h(\frac{1}{2}e+b)+pb}{(b+m)\cos.\beta}$$

montre plus évidemment que Q diminuera en même temps que m, lorsque le dernier terme sera une quantité positive ; ce qui aura probablement lieu pour tous les cas de la pratique. La plus petite valeur de m compatible avec la stabilité du mur est $m=0$; donc, la plus petite valeur de Q, en supposant l'étai nécessaire à la stabilité, correspond aussi à cette valeur zéro de m, elle devient

$$Q=\frac{P[h\sin.\alpha-(k+\frac{1}{2}e)\cos.\alpha]-\frac{1}{2}\varpi e^2 h}{b\cos.\beta}$$

C'est l'effort que subirait l'étai non *roidi* (p. 710) s'il *reposait* simplement contre le mur. Quant à celui auquel il devrait être amené par le *roidissement* pour obtenir que le mur prît un degré de stabilité déterminé par m, il est donné par l'équation (6), équation qui montre que la stabilité diminue à mesure que m augmente au delà de $\frac{1}{2}e$, et que le mur serait renversé en dedans si m excédait e.

33. *Cas de deux étais dans un même plan* supportant un mur rectangulaire (*fig.* 5, *pl.* XCII). On conserve les conventions de l'article précédent et l'on suppose essentiellement ici que l'un et l'autre étai sont nécessaires à la stabilité du mur ; de sorte que si on enlevait l'étai EF, le mur tournerait autour de f, et que, en l'absence de ef, il y aurait rotation autour de quelque point entre F et C.

Cela posé, admettre que l'effort Q de l'étai EF est *strictement* celui qui est nécessaire pour empêcher la rotation autour de f, ce serait admettre que la ligne de résistance passe par ce point f. Au contraire, supposer l'étai EF roidi au delà de ce qui est nécessaire à l'équilibre strict, c'est supposer, comme nous le faisons, que la ligne de résistance coupe fg en quelque point intérieur au massif, x par exemple. Faisons donc $fx=m$; $f\text{D}=h$ $fi=b$ et l'effort Q de l'étai EF sera donné par l'équation (6).

Raisonnant pour le second étai ef comme pour le premier ; z étant le point où la ligne de résistance coupe la base du mur, $\text{C}z=m_1$; $\text{CE}=b_1$; $\text{C}e=b_2$; $\text{C}fe=\beta_1$; $\text{CD}=h_1$, l'effort de l'étai $ef=Q_1$, son poids propre $2p_1$, on a l'équation des moments

$$Q_1(b_2+m_1)\cos.\beta_1+Q(b_1+m_1)\cos.\beta+\varpi eh_1(\tfrac{1}{2}e-m_1)$$
$$=P[h_1\sin.\alpha-(k+\tfrac{1}{2}e-m_1)\cos.\alpha]+(p+p_1)m_1.\;.\;.\;.\quad(7)$$

Substituant dans cette équation la valeur de Q tirée de (6), en observant que h exprime ici la hauteur $f\text{D}$, puis la résolvant par

rapport à Q_1, cet effort Q_1 sur ef, sera déterminé de manière que les excès de stabilité du mur sur son assise fg et sur sa base CD seront respectivement m et m_1.

Si $m_1 = m$, les massifs inférieurs et supérieurs à fg seront également stables.

Si $m_1 = m = 0$, l'effort sur chaque étai est strictement celui qui détruit la tendance *virtuelle* du mur au renversement, et l'on a alors

$$Q_1 = \frac{(P \sin.\alpha - \frac{1}{2}\varpi e^2)(h_1 b - h b_1) + P(b_1 - b)(k + \frac{1}{2}e)\cos.\alpha}{b\, b_2 \cos.\beta_1}$$

Q est d'ailleurs donné en général par l'équation (6).

34. *Cas de deux murs rectangulaires parallèles dont l'un est maintenu par des étais qui s'appuient sur le sommet de l'autre* (*fig.* 6, *pl.* XCII). AB, CD sont les deux murs parallèles, EF l'un des étais; l'effort Q qu'il exerce peut être déterminé précisément comme au § 32, en ayant égard à la dernière valeur de XN, et de telle sorte que la ligne de résistance coupe la base du mur AB à une distance déterminée m de l'arête de cette base.

Soit $m_1 = \mathrm{D}x$ le *module de stabilité* du mur parallèle CD, e_1 son épaisseur, h_1 sa hauteur, k_1 la distance du point d'appui de l'étai à l'axe de ce mur, ϖ_1 le poids du mètre cube de sa maçonnerie, β étant toujours l'inclinaison de l'étai sur la verticale et $2p$ son poids propre, l'égalité des moments par rapport à x donne facilement

$$Q\,[h_1 \sin.\beta + (k_1 + \tfrac{1}{2}e_1 - m_1)\cos.\beta] = \varpi_1 e_1 h_1 (\tfrac{1}{2}e_1 - m_1) + (k_1 + \tfrac{1}{2}e_1 - m_1)\,p$$

Mettant pour Q sa valeur tirée de l'équation (6) et réduisant, on a

$$\frac{P\,[h \sin.\alpha - (k + \frac{1}{2}e)\cos.\alpha] - \frac{1}{2}\varpi e^2 h + m\,(P\cos.\alpha + \varpi e h + p)}{c \sin.\beta + m\cos.\beta}$$

$$= \frac{\varpi_1 e_1 h_1 (\frac{1}{2}e_1 - m_1) + (k_1 + \frac{1}{2}e_1 - m_1)\,p}{h_1 \sin.\beta + (k_1 + \frac{1}{2}e_1 - m_1)\cos.\beta} \; \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

équation qui permettra de déterminer le rapport à établir entre les dimensions de l'un et l'autre mur et la poussée P, de telle sorte que chacun d'eux ait un excès de stabilité fixé d'avance.

Si $m = 0$, le mur AB n'exercera sur l'étai que l'effort dû à sa tendance *virtuelle* au déversement, et la valeur de m tirée de l'équation ci-dessus donnera l'excès de stabilité du mur extérieur CD dans cette hypothèse.

Si $m = m_1 = 0$, l'un et l'autre mur satisferont aux conditions de l'équilibre *strict*, et l'équation ci-dessus fournira les rapports entre leurs dimensions et la valeur de la poussée correspondante à cet état d'équilibre instable de la construction.

35. *Nef gothique résistant à la poussée de son comble, à l'aide des arbalétriers qui supportent la toiture de ses bas côtés* (*fig.* 7, *pl.* XCII). Ce cas est absolument le même que le précédent. Il comprend une foule d'applications possibles aux bâtiments industriels. Je renvoie à l'ouvrage de M. *Moseley* pour les conditions de stabilité des piliers ou contreforts gothiques, surmontés de clochetons ou pinacles, ne pouvant m'éloigner ici des cas les plus ordinaires de la pratique des ingénieurs.

36. *Murs portant les abouts des poutres d'un plancher* (*fig.* 1, *pl.* XCIII). Les poutres des planchers reposent habituellement par leurs extrémités sur des sablières engagées dans l'épaisseur des murs, et dans les constructions légères, elles sont invariablement assemblées sur ces sablières, de manière à relier entre eux les deux murs opposés.

p étant le poids du plancher et de la surcharge que porte la partie ABCD du mur, c la hauteur BE, x le point où la base est coupée par la ligne de résistance, on a pour l'équation des moments, par rapport à ce point, en conservant les autres notations $Cx = m$ $CD = k$

$$\overline{NX} \times Q + \overline{KX} \times \varpi e h + \overline{XB} \times p = \overline{MX} \times P \qquad \text{ou encore}$$

$$Qc + (\tfrac{1}{2}e - m)\varpi e h + (e - m)p = P\left[h \sin.\alpha - (k + \tfrac{1}{2}e - m)\cos.\alpha\right].$$

$$Q = \frac{P[h \sin.\alpha - (k + \frac{1}{2}e).\cos\alpha] - \frac{1}{2}\varpi e^2 h - p e + m(P\cos.\alpha + \varpi e h + p)}{c} \quad (9)$$

relation qui montre que la tension Q de la poutre diminue avec m; lorsque $m = 0$, on a simplement

$$Q = \frac{P[h \sin.\alpha - (k + \frac{1}{2}e)\cos.\alpha] - \frac{1}{2}\varpi e^2 h - p e}{c} \; \ldots\ldots \quad (10)$$

Q est alors l'effort strictement nécessaire pour s'opposer au déversement, et si les poutres reposent simplement sur les sablières, leur frottement doit être au moins $= Q$ par mètre courant du mur.

37. *Cas de deux planchers* (*fig.* 2, *pl.* XCIII). Adoptant les notations suffisamment indiquées par la figure, on a, pour la condition de l'équilibre strict $m = m_1 = 0$, le mur étant sur le point de tourner autour des points g et C

$$Q_1 c = (k - c)(\tfrac{1}{2}\varpi e^2 - P\sin.\alpha) + P(k + \tfrac{1}{2}e)\cos.\alpha + p e - \frac{p_1 c e}{H - h} \quad (11)$$

et Q serait donné, pour ce cas, par l'équation (10).

38. *Stabilité d'un mur rectangulaire soutenu par des contreforts également espacés et d'une saillie constante* (*fig.* 3, *pl.* XCIII). On admettra ici que l'effet de contreforts d'une saillie constante e_2, et également espacés, est celui que produirait un mur continu DGCF

d'une même épaisseur e_2 qui résulterait de l'expansion latérale d'un contrefort jusqu'au contrefort voisin, et dont le nouveau volume aurait, par mètre cube, un poids ϖ_2 tel que le poids total du contrefort, ainsi réparti le long du mur qu'il soutient, fût le même qu'avant sa dilatation latérale. Il résultera de cette convention un mur continu, composé de deux parties EAFB, DGFC, dont les poids par mètre cube seront différents et respectivement égaux à ϖ_1, ϖ_2. l comptée à partir de la face CD est la distance à cette face du point d'application de la poussée P ; les autres notations sont suffisamment indiquées sur la figure. CX étant toujours $= m$ ou X étant le point où la ligne de résistance vient couper la base du système, on a facilement pour l'équation des moments par rapport à ce point

$$P\,[h_1 \sin.\alpha - (l-m)\cos.\alpha] = (e_2 - m_1 + \tfrac{1}{2} e_1)\,\varpi_1 e_1 h_1 + (\tfrac{1}{2} e_2 - m)\,\varpi_2 e_2 h_2 \quad \ldots \quad (12)$$

39. Si, comme il arrive habituellement, le mur et le contrefort sont construits avec les mêmes matériaux, b étant la largeur réelle du contrefort parallèlement au mur, et c l'entre-axe ou l'espacement constant d'un contrefort au suivant, on a évidemment

$$\varpi_2\, e_2 c = \varpi_1\, e_2 b \quad \text{ou} \quad \frac{c}{b} = \frac{\varpi_1}{\varpi_2} = n$$

Faisant pour abréger ce dernier rapport $= n$, éliminant ϖ_2 entre cette équation et la précédente, et désignant simplement par ϖ le poids du mètre cube de la maçonnerie, il vient

$$P\,(h_1 \sin.\alpha - l \cos.\alpha) = \tfrac{1}{2}\varpi \left(e_1^2 h_1 + 2 e_1 e_2 h_1 + \frac{1}{n} e_2^2 h_2\right)$$
$$- m\left[P \cos.\alpha + \varpi \left(e_1 h_1 + \frac{1}{n} e_2 h_2\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

équation qui fixe le rapport, avec la poussée P, des dimensions d'un mur à contreforts doué d'un excès de stabilité mesuré par m. Dans tous les cas pratiques, on résoudra facilement l'équation (13) par rapport e_2, ce qui fixera l'épaisseur uniforme du contrefort compatible avec m. La saillie e_2 strictement suffisante pour résister à la poussée P, devient, en faisant $m = 0$,

$$e_2 = -n e_1 \frac{h_1}{h_2} + \sqrt{\frac{2Pn}{\varpi h^2}(h_1 \sin.\alpha - l \cos.\alpha) + n \frac{h_1}{h_2}\left(\frac{n h_1}{h_2} - 1\right) e_1^2} \quad (14)$$

40. *Murs rectangulaires résistant à la poussée de fermes sans tirant* (*fig.* 4, *pl.* XCIII). Reprenons ici l'équation (2) de la ligne de résistance d'un mur rectangulaire

$$y = \frac{P\,(x \sin.\alpha - k \cos.\alpha)}{\varpi\, e x + P \cos.\alpha}$$

et remarquons que $P \sin.\alpha$ et $P \cos.\alpha$ y représentent respectivement les composantes horizontale et verticale de la poussée P par mètre courant. Or, on peut voir à l'article *poussée des charpentes* que, dans ce cas, ces composantes ont pour valeur, savoir :

horizontalement, $$\frac{1}{2}\varpi_1 L \operatorname{coséc}.i = \frac{\varpi_1 L}{2 \sin.i}$$

et verticalement, $$\varpi_1 L \operatorname{séc}.i = \frac{\varpi_1 L}{\cos.i}$$

L étant la demi-portée, i l'inclinaison de l'arbalétrier sur l'horizon, et ϖ_1 le poids du mètre carré de toiture. Substituant ces valeurs dans l'équation (2) à la place de $P \sin.\alpha$ et $P \cos.\alpha$, il vient pour l'*équation de la ligne de résistance*

$$y = \frac{L\,(x \cos.i - 2k \sin.i)}{2 \sin.i\left(\frac{\varpi}{\varpi_1} e x \cos.i + L\right)} = L\left[\frac{\frac{1}{2} x \operatorname{cotang}.i - k}{\frac{\varpi}{\varpi_1} e x \cos.i + L}\right] \ldots \quad (15)$$

k étant toujours la distance du pied de l'arbalétrier à l'axe du mur, et ϖ le poids du mètre cube de maçonnerie.

En mettant dans cette équation $h =$ hauteur du mur à la place de x, $(\frac{1}{2} e - m)$ pour y, et la résolvant par rapport à e, on aura, comme pour le mur ordinaire (25), l'épaisseur e qui, sous une hauteur h, assurera au mur un excès de stabilité m.

On pourrait de même, en la résolvant par rapport à i, déterminer l'inclinaison qui, sous une portée donnée 2 L, une hauteur h et une épaisseur déterminées e, laisserait au mur le même excès de stabilité, etc.

41. *Si le mur est maintenu par des contreforts*, les substitutions de la valeur des composantes horizontale et verticale de la poussée du toit dans l'équation (13) donneront

$$\varpi_1 L(\tfrac{1}{2} h_1 \operatorname{coséc}.i - l \operatorname{séc}.i) = \tfrac{1}{2}\varpi\left(e_1{}^2 h_1 + 2 e_1 e_2 h_1 + \frac{1}{n} e_2{}^2 h_2\right)$$
$$- m\left[\varpi_1 L \operatorname{séc}.i + \varpi\left(e_1 h_1 + \frac{1}{n} e_2 h_2\right)\right] \ldots\ldots \quad (16)$$

équation qui déterminera l'épaisseur e_2 des contreforts, qui assurerait un excès m de stabilité.

42. *Centre de gravité d'un mur ou d'un contrefort dont les parements sont inclinés d'un angle quelconque sur la verticale* (*fig.* 5, *pl.* XCIII). Soit H le centre de gravité du parallélogramme ABED dont l'aire est évidemment $= ec$.

K celui du triangle BEC $= \frac{1}{2}(b - e)c$.

G celui du mur ou contrefort dont la section $= \frac{1}{2}(b + e)c$; tirez

HM, GL, KN perpendiculairement à la hauteur $AF=c$, et appelons λ la distance GL à cette verticale du centre de gravité G; on a

$$\lambda \times \tfrac{1}{2}c(b+e)=ec\times\overline{HM}+\tfrac{1}{2}c(b-e)\times\overline{KN}$$

or $HM=\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{2}c\,\text{tang.}\,\alpha_2=\tfrac{1}{2}(e+c\,\text{tang.}\,\alpha_2)$

$$KN=\tfrac{1}{3}(b+2e+2c\,\text{tang.}\,\alpha_2)$$

ce qui donne, réductions faites,

$$\lambda=\frac{e^2+b^2+be+c(e+2b)\,\text{tang.}\,\alpha_2}{3(b+e)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(17)$$

Diverses transformations et substitutions sur lesquelles je n'insiste pas donnent encore cette autre expression

$$\lambda=\frac{\tfrac{1}{3}c^2(\text{tang.}^2\alpha_1-\text{tang.}^2\alpha_2)+ec\,\text{tang.}\,\alpha_1+e^2}{c(\text{tang.}\,\alpha_1-\text{tang.}\,\alpha_2)+2e}\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

qui s'appliquerait au cas où le talus A*d* plonge vers l'intérieur, en y faisant alors α_2 et dès lors tang. α_2 négatifs. Tang. α_2 est évidemment zéro lorsque le parement intérieur est vertical.

43. *Équation de la ligne de résistance d'un mur à talus quelconques.* Soit LM (*fig.* 6, *pl.* XCIII) un lit horizontal du mur situé à une distance x de son sommet, TK une verticale passant par le centre de gravité du massif AMLB qui repose sur ce lit. Prolongez le plan LM jusqu'à sa rencontre avec le plan vertical AF, KV sera la valeur de λ déterminée dans le numéro précédent, en y mettant x au lieu de c.

Soit PO la direction de la poussée P, OS son intensité P, ON le poids du massif BLMA, OR la résultante de ces deux efforts, Q le point où la direction de cette résultante vient rencontrer le lit LM, point qui appartient dès lors à la courbe des points d'application ou *ligne de résistance*. Faisant

$$VQ=y;\qquad AG=k,\qquad \text{angle TOP}=i$$

et conservant les notations connues, les triangles semblables donnent, ainsi qu'on l'a vu déjà,

$$\frac{QK}{OK}=\frac{RI}{OI}$$

On a d'ailleurs

$$QK=QV-KV=y-\lambda$$
$$OK=TK-TO=x-(\lambda+k)\,\text{cotang.}\,i$$
$$RI=P\sin.\,i$$
$$OI=ON+NI=\tfrac{1}{2}\varpi x(AB+LM)+P\cos.\,i$$

$$OI = \tfrac{1}{2}\varpi x\left[2e + (\text{tang.}\,\alpha_1 - \text{tang.}\,\alpha_2)\right] + P\cos.\,i$$

ce qui donne en fonction de λ (18)

$$y = \frac{\tfrac{1}{2}\varpi x\lambda\left[2e + x(\text{tang.}\alpha_1 - \text{tang.}\alpha_2)\right] + P(x\sin.\,i - k\cos.\,i)}{\tfrac{1}{2}\varpi x\left[2e + x(\text{tang.}\alpha_1 - \text{tang.}\alpha_2)\right] + P\cos.\,i}$$

Mettant x à la place de c dans l'équation (18), multipliant les deux membres de cette équation par le dénominateur de son second membre et par $\frac{1}{2}\varpi x$, on a pour l'*équation générale de la ligne de résistance*

$$y = \frac{\tfrac{1}{3}\varpi x^3(\text{tang.}^2\alpha_1 - \text{tang.}^2\alpha_2) + \varpi x^2 e\,\text{tang.}\alpha_1 + \varpi x e^2 + 2P(x\sin.i - k\cos.i)}{\varpi x\left[2e + x(\text{tang.}\alpha_1 - \text{tang.}\alpha_2)\right] + 2P\cos.i} \quad (19)$$

En y faisant $\text{tang.}\,\alpha_2 = o$, on aura l'équation relative au mur à parement intérieur vertical.

44. On peut remarquer que l'équation ayant trois dimensions en x, il pourra y avoir trois valeurs de x pour *certaines valeurs* de y; la courbe des points d'application a donc un point d'inflexion.

Stabilité du mur à talus quelconques. L'équation précédente de la ligne de résistance (19) suffit pour déterminer toutes les conditions de stabilité, ainsi qu'on l'a montré pour le cas du mur à parements verticaux. Nous remarquerons seulement que si l'on voulait fixer l'inclinaison α_1 du talus extérieur, de telle sorte que la ligne de résistance vînt couper la base du mur à une distance donnée m du pied de ce talus, il faudrait résoudre l'équation ci-dessus par rapport à $\text{tang.}\,\alpha_1$, après y avoir substitué la hauteur c du mur pour x, puis $(CF - m) = (e + c\,\text{tang.}\,\alpha_1 - m)$ pour y, e étant l'épaisseur BA *au sommet*. On obtiendrait facilement tout autre élément de la question, en résolvant l'équation de la ligne de résistance par rapport à cet élément; et l'on peut remarquer que, dans toutes les applications, l'apparente complication des formules disparaît par l'introduction des données numériques du problème pratique à résoudre.

45. *Stabilité d'un mur d'épaisseur uniforme soumis à la poussée de l'eau stagnante. Batardeaux rectangulaires* (*fig.* 7, *pl.* XCIII). Tout se borne encore à trouver l'équation de la ligne de résistance du batardeau, et les notations étant clairement indiquées sur la figure, on a immédiatement, savoir :

Résultante P de la poussée du liquide sur un mètre courant du mur et une hauteur $(x - n)$, x étant la distance au sommet d'un lit quelconque IK,

$$P = (x - n) \times \Pi\,\tfrac{1}{2}(x - n) = \tfrac{1}{2}\Pi(x - n)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

Car la pression d'un liquide sur une surface plane est le poids du

prisme liquide, dont la base est cette surface et la hauteur égale la profondeur du centre de gravité de cette aire au-dessous du niveau.

Quant au point d'application de cette résultante, il est au *centre de pression* (p. 259) de la surface ou à $\frac{2}{3}(x-n)$ au-dessous de ce même niveau.

O étant toujours le point où la poussée du liquide rencontre l'axe du massif IKAB, OS l'intensité P de cette poussée, $\mathrm{ON}=\varpi e x$ le poids du massif, OR la résultante de ces deux efforts, Q le point (de la ligne de résistance) où sa direction rencontre le lit IK, $\mathrm{QM}=y$, on a

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{MO}}=\frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{NO}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\frac{1}{3}(x-n)}=\frac{\frac{1}{2}\Pi(x-n)^2}{\varpi e x}$$

et pour l'*équation de la ligne de résistance*

$$y=\frac{\Pi(x-n)^3}{6\varpi e x}=\frac{\Pi}{6\varpi e}\cdot x^2\left(1-\frac{n}{x}\right)^3 \ldots \quad (21)$$

La dernière expression de y est destinée à montrer que y augmente en même temps que x. Ainsi la ligne de résistance se rapproche de plus en plus du parement extérieur à mesure que la hauteur augmente

46. *Fixer la hauteur h du batardeau en sorte que la ligne de résistance coupe la base à une distance donnée m du parement extérieur.* Il suffit évidemment de mettre dans l'équation (21) h pour x et $(\frac{1}{2}e-m)$ pour y, puis de la résoudre par rapport à e, ce qui donne pour l'épaisseur pratique E

$$\mathrm{E}=m+\sqrt{m^2+\frac{\Pi(h-n)^3}{3\varpi h}} \ldots\ldots \quad (22)$$

m étant le module de stabilité.

En faisant $m=o$, on a pour l'épaisseur e correspondant à l'équilibre strict

$$e=\sqrt{\frac{\Pi(h-n)^3}{3\varpi h}} \ldots\ldots \quad (23)$$

47. *Observation*. En essayant de rapprocher cette formule (22) de celle qui a été donnée par M. *Poncelet* pour le même cas, en partant de la stabilité des revêtements de Vauban (§ 8), je trouve qu'en faisant ici $m=\frac{5}{12}e$, on obtient

$$\mathrm{E}=0.866\sqrt{\frac{\Pi}{\varpi}\frac{(h-n)^3}{h}} \ldots\ldots \quad (24)$$

ce qui est, à un millième près en plus, l'épaisseur pratique de M. *Poncelet*. Je remarque en outre que l'épaisseur ci-dessus n'est

rien autre chose que l'épaisseur e correspondant à l'équilibre strict exactement augmentée de sa moitié

$$E = e + \frac{1}{2} e \qquad (25)$$

Faut-il voir dans cette simple règle un principe de construction d'une application générale?

48. *Conditions de la stabilité relatives au glissement des assises horizontales.* L'angle SRO étant l'inclinaison de la résultante des forces avec la normale au lit IK, il n'y aura point de glissement possible sur ce lit, tant que l'angle SRO sera moindre que l'angle φ du frottement de l'assise. Or

$$OS = ON \text{ tang. SRO} \quad \text{où} \quad P = \varpi e x \text{ tang. SRO}$$

ou encore $\text{tang. SRO} = \dfrac{\Pi (x-n)^2}{2 \varpi e x}$

La condition de stabilité, quant au glissement, revient donc à

$$\frac{\Pi (x-n)^2}{2 \varpi e x} < \text{tang.}\, \varphi \qquad (26)$$

Ce qui donne pour la valeur de x

$$x < n + \frac{\varpi}{\Pi} e \text{ tang.}\, \varphi \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \Pi n \text{ cotang.}\, \varphi}{\varpi e}}\right]. \qquad (27)$$

49. *Le batardeau ayant un talus extérieur* incliné de l'angle α sur la verticale (fig. 1, pl. XCIV), soit XY un lit horizontal situé à la distance x du sommet, SM la verticale passant par le centre de gravité du massif qui pose sur ce lit,

$$AX = x; \quad XQ = y; \quad MX = \lambda, \quad AE = n$$

Conservant d'ailleurs les notations précédentes et raisonnant comme au numéro précédent, il vient

$$\frac{QM}{SM} = \frac{RT}{ST}$$

$$QM = QX - MX = y - \lambda$$

$$SM = PX = \frac{1}{3}(x-n)$$

$$RT = \text{Poussée} = \frac{1}{2} \Pi (x-n)^2$$

$$ST = \frac{1}{2} \varpi x (2e + x \text{ tang.}\, \alpha)$$

Ce qui donne

$$y - \lambda = \frac{\Pi}{3 \varpi} \cdot \frac{(x-n)^3}{(2 e x + x^2 \text{ tang.}\, \alpha)}$$

Faisant $\alpha_2 = o$; $\alpha_1 = \alpha$ et $c = x$ dans l'équation (18), on a

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3} x^3 \text{ tang.}^2 \alpha + e x^2 \text{ tang. } \alpha + e^2 x}{x^2 \text{ tang. } \alpha + 2 e x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

ce qui conduit à l'*équation de la ligne de résistance* du batardeau à talus extérieur :

$$y = \frac{\frac{\Pi}{3 \varpi} (x - n)^3 + \frac{1}{3} x^3 \text{ tang.}^2 \alpha + e x^2 \text{ tang. } \alpha + e^2 x}{2 e x + x^2 \text{ tang. } \alpha} \quad \ldots \quad (29)$$

dont on déduira, comme on l'a vu, tous les éléments de la stabilité quant à la rotation, en y faisant $y = (e + h \text{ tang. } \alpha - m)$ et $x = h$.

50. *La condition à satisfaire pour qu'il n'y ait glissement sur aucune assise* est évidemment

$$\text{QSM} < \varphi \quad \text{ou} \quad \text{tang. QSM} < \text{tang. } \varphi$$

Or on a

$$\text{RT} = \text{ST tang. QSM}$$

La condition de stabilité relative au glissement devient donc

$$\frac{\Pi (x - n)^2}{\varpi (2 e x + x^2 \text{ tang. } \alpha)} < \text{tang. } \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

et le premier membre de cette inégalité augmentant en même temps que x, on voit que la tendance au glissement est plus grande pour les assises inférieures que pour les assises supérieures. Elle augmente pour chaque assise avec sa profondeur au-dessous du niveau du liquide. On fait ici, comme ailleurs, abstraction de l'adhésion des mortiers (p. 1169), laquelle étant *peut-être* proportionnelle à l'étendue des surfaces modifierait le résultat ci-dessus dans les batardeaux à talus extérieur.

51. Poussée des terres; *Murs de revêtement.* Nous appelons *talus naturel* des terres l'angle avec l'horizon que prend naturellement leur surface supérieure lorsqu'elle a été longtemps abandonnée aux influences atmosphériques, et nous le désignons par φ. Bien que, dans tous les cas pratiques, cet angle doive être directement observé sur les terres mêmes à soutenir, et le poids du mètre cube de ces terres mesuré dans les circonstances où il est maximum, nous rapportons ici, moins pour indiquer des moyennes que pour montrer des limites, quelques résultats d'observations recueillies par *Navier*.

52. *Talus naturels de terres déblayées.*

	φ
Sable fin et sec, d'après une seule observation de *Gadroy*. . . .	21°
Sable fin bien sec et grès pulvérisé, d'après *Rondelet*.	34° 29′
Sable de l'espèce la plus légère, d'après *Barlow*.	39°
Terre ordinaire bien sèche et pulvérisée, d'après *Rondelet*. . . .	47°
La même terre légèrement humectée, d'après *Rondelet*.	54°
Sol de l'espèce la plus dense et la plus compacte, — *Barlow*. .	55°
Terre incohérente et parfaitement sèche, — *Pasley*.	39°
Sable de rivière très-fin, — *Delanges*.	33°
Sable très-fin, — *Huber-Burnand*.	30° à 33°
Idem. . . . . rarement	35°
J'ai trouvé pour le *charbon de bois en halle* des talus qui ont varié de.	36°
à.	39°.

53. *Poids du mètre cube de quelques terres et maçonneries.*

Terre végétale.	1400 kil.
Terre dite franche.	1500
Terre argileuse.	1600
Glaise.	1900
Sable terreux.	1700
Sable pur.	1900
Maçonneries de moellons en pierres calcaires et siliceuses,	
depuis.	1700
jusqu'à.	2300
Maçonnerie de moellons en granit.	2300
Maçonnerie de moellons en basalte.	2500

54. Soit (*fig.* 2, *planche* XCIV) A E la surface supposée horizontale d'un massif de terre indéfiniment étendu dans le sens A E; négligeant l'adhérence des terres et le frottement qu'elles peuvent exercer sur la face interne du revêtement, nous appelons P la résultante des poussées horizontales auxquelles est soumise une surface de 1 mètre courant de revêtement sur une hauteur quelconque A X $=x$, cette hauteur x étant comptée ici à partir du niveau A E des terres. Soit encore X Y le plan suivant lequel on suppose qu'un prisme triangulaire A X Y se détacherait du massif, si la partie X B du revêtement n'existait pas, et W le poids total de ce prisme de terre, dont l'angle en X $= i =$ A X Y.

Quelles que soient les résistances que le plan incliné X Y oppose au glissement du prisme, supposer que le glissement *va naître*, c'est supposer que la résultante R de toutes ces résistances est inclinée sur la normale S T au plan X Y d'un angle précisément égal à l'angle φ du frottement du plan, ou du talus naturel des terres (Voyez *Plan incliné* et *Cône de résistance*). Or, à ce même instant, les forces P, W, R sont nécessairement en équilibre strict, donc

deux quelconques d'entre elles P, W sont réciproquement comme les sinus de leurs inclinaisons sur la direction de la troisième R, et l'on a dès lors :

$$\frac{P}{W}=\frac{\sin.WSR}{\sin.PSR}=\frac{\sin.\left(\frac{\pi}{2}-i-\varphi\right)}{\sin.(i+\varphi)}=\frac{\cos.(i+\varphi)}{\sin.(i+\varphi)}$$

$$P=W\operatorname{cotang.}(i+\varphi)\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

Mais ϖ_1 étant le poids du mètre cube des terres,

$$W=\frac{1}{2}\varpi_1\times\overline{AX}\times AY=\frac{1}{2}\varpi_1 x^2\operatorname{tang.}i\ldots\ldots(32)$$

donc la poussée horizontale P est en général :

$$P=\frac{1}{2}\varpi_1 x^2\operatorname{tang.}i\operatorname{cotang.}(i+\varphi)\ldots\ldots\ldots(33)$$

55. *Prisme de plus grande poussée.* Mais quelle est la valeur réelle de l'angle i formé par le plan de rupture avec le parement vertical intérieur ? On voit très-bien que si cet angle augmente, le prisme triangulaire augmente ainsi que la composante de son poids parallèle au plan, et dès lors la réaction P du mur devrait augmenter en même temps que i pour retenir le prisme sur la pente X Y. D'un autre côté, plus i augmente, plus la pente diminue ; plus la composante du poids du prisme parallèle au plan diminue ; et plus la réaction P du mur qui maintiendrait le prisme sur sa pente diminue. Entre ces deux effets contraires produits par l'accroissement de i sur la valeur de la poussée P, *Coulomb*, dès 1773, conseillait de prendre la valeur de i qui rend la poussée P *maximum*, et vers l'année 1800, *Prony* démontrait, le premier, que *le prisme de terre de plus grande poussée est celui qui tend à glisser sur un plan incliné, formant avec la verticale un angle i égal à la moitié de celui $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ que la même verticale fait avec le talus naturel φ des terres.* La valeur de i qui rendrait P maximum est donc :

$$i=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

résultat remarquable par sa simplicité, et qui, ajoute *Prony*, n'avait encore été donné nulle part (*Mécanique philosophique*, pag. 302, an VIII).

Mettant cette valeur de i dans (33), il en résulte :

$$P\text{ maximum}=\frac{1}{2}\varpi_1 x^2\operatorname{tang.}^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{2}\varpi_1 x^2\operatorname{tang.}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)(35)$$

56. *Équation de la ligne de résistance du revêtement.* Si l'on compare cette poussée maximum (35) à celle d'un fluide (20), on voit facilement que la poussée *maximum* d'un massif de terre de niveau et indéfiniment étendu est la même que celle d'un liquide imaginaire dont le mètre cube pèserait ϖ_2.

$$\varpi_2 \text{ étant} = \varpi_1 \text{ tang.}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Mettant donc cette valeur de ϖ_2 à la place de Π dans l'équation (21), et appelant maintenant H la hauteur totale du revêtement, et n la hauteur BA du niveau des terres en contre bas du sommet du mur, on a pour l'*équation de la ligne de résistance*, ϖ_1 étant toujours le poids réel du mètre cube des terres et ϖ celui de la maçonnerie

$$y = \frac{\varpi_1 \text{ tang.}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) (H - n)^3}{6 \varpi e H} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

57. Si les terres sont arasées de niveau avec le sommet du mur, $n = o$ donne pour l'épaisseur théorique e

$$e = H \text{ tang.} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sqrt{\frac{\varpi_1}{3\varpi}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

et je remarque que si, conformément au principe de construction déja entrevu (§ 47), on faisait l'épaisseur pratique $E = e + \frac{1}{2} e$, on retomberait encore nécessairement à $\frac{1}{1000}$ près, sur la formule (1) déduite par M. *Poncelet*, de l'étude des revêtements de *Vauban*

$$E = 0.866 \text{ H tang.} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sqrt{\frac{\varpi_1}{\varpi}} \ldots\ldots \quad (39)$$

58. *Si le revêtement a un talus extérieur* incliné d'un angle α sur la verticale, on obtiendra de même l'équation de sa ligne de résistance, en mettant la valeur (36) de ϖ_2 dans l'équation (29), ce qui donnera :

$$y = \frac{\frac{\varpi_1}{3\varpi} \text{ tang.}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) (h - n)^3 \frac{1}{3} h^3 \text{ tang.}^2 \alpha + e h^2 \text{ tang.} \alpha + e^2 h}{2 e h + h^2 \text{ tang.} \alpha} \quad (40)$$

On a déjà vu assez souvent pour que je ne m'y arrête pas, comment de l'équation de la ligne de résistance on pouvait successivement tirer la valeur de chacun des éléments de la stabilité.

59. *Conditions pour qu'il n'y ait glissement sur aucune assise du revêtement.* Elles s'obtiendront encore en mettant les valeurs de

ϖ_2 (36) à la place de Π dans les inégalités (26) et (30) ; en désignant par φ' l'angle du frottement des assises pour le distinguer du talus naturel φ des terres, on aura pour le cas du revêtement à talus extérieur

$$\frac{\varpi_1}{\varpi} \text{tang.}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{(h-n)^4}{(2eh + h^2 \text{tang.}\alpha)} < \text{tang.}\,\varphi' \ldots (41)$$

et pour le cas du revêtement rectangulaire

$$\frac{\varpi_1}{2\varpi e h} (h-n)^2 \text{tang.}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) < \text{tang.}\,\varphi' \ldots\ldots (42)$$

Ainsi, comme pour le cas des liquides, la tendance au glissement augmente à mesure que les assises s'enfoncent au-dessous du niveau des terres.

60. Je ne traiterai pas ici avec M. *Moseley* quelques cas dont l'application aux constructions industrielles est moins fréquente, et en particulier celui des *revêtements avec surcharges de terre*. Les ingénieurs militaires que ce genre de questions intéresse plus spécialement devront recourir au bel ouvrage de M. *Moseley*, intitulé *Mechanical principles of Engineering*, *London*, 1843 ; ils y verront comment l'idée très-féconde et très-originale des *lignes de résistance* (pag. 1049) conduit à la solution des problèmes relatifs à la stabilité des revêtements comme de toutes les autres constructions. Je terminerai ce long article en me joignant à M. *Moseley* lui-même pour renvoyer encore au *Mémoire sur la stabilité des revêtements* publié par M. *Poncelet* en 1840, et où « cet homme illustre « a traité la question avec l'originalité et la puissance qui lui sont « habituelles » (*With the accustomed originality and power of that illustrious author*).

N

NAPIER (Jean), né en Ecosse en 1550, mort le 31 avril 1617. Il est l'inventeur des *logarithmes*. La première table a paru à Edimbourg en 1614, sous le titre : *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, in-4°.

NAVIER (*Louis-Marie-Henri*), né à Dijon le 15 février 1785, mort à Paris membre de l'Institut, le 23 avril 1836.

Resté orphelin à l'âge de quatorze ans, il fut introduit dans la carrière des sciences par son oncle, l'illustre *Gauthey*, alors ingénieur des Etats de Bourgogne. *Navier* a publié le *Traité des ponts* et d'autres manuscrits de son oncle, des notes et additions très-importantes à la *Science des ingénieurs* et au premier volume de

l'*Architecture hydraulique* de *Belidor*, un mémoire *sur les ponts suspendus*, une foule d'articles intéressants sur le mouvement des fluides, sur les chemins de fer, etc., d'excellentes *leçons* sur l'application de la mécanique à l'établissement des *constructions, des machines*, sur la *théorie de la résistance des matériaux*, etc.

Il a construit le pont de *Choisy* sur la Seine (1810), le pont d'*Asnières* et le pont d'*Argenteuil* sur le même fleuve; enfin le pont suspendu des *Invalides* de 155 mètres d'ouverture, qu'un léger mouvement, aggravé par la rupture d'une conduite d'eau fit abandonner, quoique le remède à un pareil accident fût aussi facile que peu dispendieux.

NAVIGATION AÉRIENNE. (Voyez *Aérostation*, pag. 6.)

NEIGE. Lorsque la neige est tombée en gros flocons, le liquide qu'elle donne en fondant n'a guère que le *dixième* de sa hauteur primitive. Si la neige est fine, la hauteur du liquide s'élève à $\frac{1}{6}$ avant le tassement naturel qui s'opère; après ce tassement la hauteur du liquide atteint $\frac{1}{3}$ environ.

On peut évaluer à $0^{m}.50$ l'épaisseur maximum à laquelle la neige dans nos climats peut s'amonceler sur un toit. Cette épaisseur produirait donc une surcharge d'environ 50 kil. par mètre carré.

L'eau qui provient de la fonte des neiges passe pour retenir plus d'oxygène que l'eau de pluie ou de rivière. D'après MM. Humboldt et Gay-Lussac, l'air atmosphérique contient 0.21 oxygène, l'eau de Seine 0.261, celui qui provient de la neige fondue 0.294, quantité qui s'élève à 0.348, lorsqu'on analyse les dernières portions d'air retirées au moyen de l'ébullition. Ce fait expliquerait pourquoi l'eau de neige rougit légèrement la teinture de tournesol, et rouille si promptement les ferrures.

La limite inférieure des neiges perpétuelles est à 4800^{m} à l'équateur, 2550^{m} vers nos latitudes, et à 1500^{m} vers 65°.

NEWTON (*Isaac*), né à Woolstrop, en Angleterre, le 25 décembre 1642, mort le 20 mars 1727, âgé de quatre-vingt-quatre ans et trois mois.

« La nature, en le douant d'un profond génie, prit encore soin « de le placer à l'époque la plus favorable. *Descartes* avait changé « la face des sciences mathématiques par l'application de l'algèbre « à la théorie des courbes et des fonctions variables; *Fermat* avait « posé les fondements de la géométrie de l'infini par sa belle mé- « thode *de maximis et minimis*, et des tangentes; *Wallis*, *Wren* et « *Huyghens* venaient de trouver les lois du mouvement; les décou- « vertes de *Galilée*, sur la chute des graves, et celles d'*Huyghens*, « sur les développées et sur la force centrifuge conduisaient à la

« théorie du mouvement dans les courbes; *Kepler* avait déterminé
« celles que décrivent les planètes, et entrevu la gravitation univer-
« selle; enfin *Hooke* avait très-bien vu que leurs mouvements sont
« le résultat d'une force primitive de projection combinée avec la
« force attractive du soleil. La mécanique céleste n'attendait ainsi
« pour éclore qu'un homme de génie, qui, en généralisant ces dé-
« couvertes, sût en tirer la loi de la pesanteur. C'est ce que *Newton*
« exécuta (1687) dans son immortel ouvrage des *Principes mathé-*
« *matiques de la Philosophie naturelle*... qui restera comme un mo-
« nument éternel de la profondeur du génie qui nous a révélé la
« plus grande loi de l'univers. » (Laplace, *Exposition du système du monde*, pag. 414.)

NICKEL, métal blanc argentin tirant un peu sur le gris, découvert, en 1751, par *Cronstedt*. Il se forge et devient dur et fibreux comme le bon fer, se polit et est attirable à l'aimant, mais un peu moins que celui-ci et dans le rapport de 8 à 9, d'après *Wollaston*. Il est moins fusible que le fer, ne s'altère pas à l'air, à la température ordinaire, mais il s'y oxyde à la chaleur rouge. Son poids spécifique varie de 8.4 à 8.9, suivant qu'il est fondu ou forgé.

Action des acides. L'acide nitrique l'attaque facilement, le convertit en protoxyde et le dissout. L'acide hydrochlorique qui n'est pas trop étendu le dissout également, surtout à l'aide de la chaleur, mais lentement; il se dégage de l'hydrogène, et la dissolution contient du chlorure nickellique ou *nickolique*. L'eau régale le dissout très-aisément, et l'acide sulfurique avec un peu de difficulté, même à chaud. En général, les dissolutions du nickel dans les acides, même dans l'eau régale, contiennent de l'oxyde nickellique.

Oxydes. On lui connaît deux oxydes, savoir : le *protoxyde* = nickel 0.7871 + oxygène 0.2129, vert, infusible, qui noircit et se transforme en peroxyde à la chaleur rouge au contact de l'air, et se dissout dans les acides forts, mais non dans les alcalis, l'ammoniaque exceptée qui le dissout en petite quantité. Son *hydrate*, vert pomme, gélatineux et très-léger, se dissout dans l'ammoniaque.—Le *peroxyde* ou *oxyde nickellique* = nickel 0.7114 + oxygène 0.2886 est gris noir, ainsi que son hydrate. Il se dissout dans tous les acides forts, même les acides végétaux, et dans l'ammoniaque. La dissolution dans les acides est verte.

Sels. Le nickel forme un assez grand nombre de sels, tous à base de protoxyde. Ceux d'entre eux qui sont solubles ou qui contiennent de l'eau de cristallisation sont d'un très-beau vert; les sels anhydres sont jaunes ou fauves.

Action de quelques réactifs. Les dissolutions d'oxyde nickellique et les dissolutions aqueuses de ses sels précipitent,—en vert pomme par la *potasse*, et le précipité est insoluble dans un excès d'alcali;—

en vert pomme un peu plus clair, par le *carbonate de potasse*; — en blanc teinté de vert par le *phosphate de soude*, si la dissolution est neutre. — L'*ammoniaque*, versée en petite quantité, détermine un léger trouble verdâtre qui disparaît par une nouvelle addition. La dissolution prend alors une belle couleur bleue avec teinte de violet. L'*hydrosulfate d'ammoniaque* détermine un précipité noir dans les dissolutions neutres et la liqueur qui surnage reste colorée en noir.

Le nickel se rencontre dans les terrains anciens ordinairement à l'état de sulfure ou d'arséniure. On l'extrait, en Saxe et en Bohême, du *kupfernickel*, qui est un arséniure, et du *speiss*, qui est un mélange de divers sulfo-arséniures. Il est souvent allié au fer dans les pierres météoriques.

Essais. Le nickel se comportant comme le fer dans les essais par la voie sèche, et s'alliant à celui-ci avec facilité, on reconnaîtrait sa présence en dissolvant le culot, précipitant de la liqueur acide le fer par l'ammoniaque, filtrant et lavant rapidement le précipité. Une dissolution de potasse servirait ensuite à précipiter l'oxyde niccolique de la liqueur filtrée.

NIVELLEMENT (*fig.* 3, *pl.* XCIV). 1. *Faire le nivellement de deux points a, b,* c'est, en fait, chercher la différence *b c* de leurs plus courtes distances O*a*, O*b* au centre O de la terre, supposée sphérique.

En effet, les INSTRUMENTS dont on fait usage dans les nivellements (pag. 953) ont tous pour objet de déterminer la direction d'un plan *horizontal* AB, c'est-à-dire d'un plan perpendiculaire au prolongement du rayon terrestre OI mené au point I qu'ils occupent.

2. *Nivellement simple;* soit I l'un de ces instruments que nous supposerons réglé (970) et d'abord placé à égales distances des points *a* et *b* dont on cherche la différence de niveau; il déterminera un plan horizontal AB. Faites placer en *a* le pied d'une mire (pag. 961) dont on élèvera le *voyant* jusqu'à ce que, la mire étant bien verticale, sa ligne de visée se trouve dans le plan AB. La hauteur A*a* de la ligne de visée au-dessus du sol sera la *cote* du point *a* du terrain. On l'inscrira et, sans déranger l'instrument du plan AB dans lequel il peut d'ailleurs tourner librement, on fera porter le pied de la mire sur le point *b*; puis, la mire étant toujours bien verticale, on fera monter ou descendre le voyant jusqu'à ce que sa ligne de visée soit revenue dans le même plan horizontal AB. On inscrira la nouvelle cote *b*B du point *b*.

Retranchant B*b* de A*a* on aura évidemment la différence de niveau $bc = Aa - Bb$ des deux points *bc*, et l'on remarque que *la plus petite cote appartient toujours au point le plus élevé.*

On nomme *cote d'arrière* celle qu'on obtient en visant au point de départ a, et *cote d'avant* celle qu'on obtient en visant au point d'arrivée b.

Cette simple opération suffit quand on n'a à niveler que deux points visibles tous deux de la station I, lorsque, en général, leur distance ne dépasse guère deux à trois cents mètres; et enfin lorsque leur différence de niveau est plus petite que la longueur totale de la mire, moins celle de l'instrument.

3. *Si l'on a à niveler plusieurs points visibles et peu distants d'une station* I (*fig.* 4, *pl.* XCIV), on peut opérer en faisant porter successivement la mire aux points A_1 B_1 C_1 D_1 E_1, et sans changer le plan horizontal AIE déterminé par l'instrument I, amener le voyant dans ce plan de niveau. Les *cotes* aA, bB, cC. dD, eE feront évidemment connaître de combien chaque point du terrain est enfoncé au-dessous du niveau général AE, élevé lui-même au-dessus du point i du terrain de la hauteur iI de l'instrument.

Si l'on fait en même temps mesurer les distances horizontales et les directions relatives des différents points A_1 B_1 C_1...E_1, on a, à la fois, tous les éléments nécessaires pour former le plan M_1 N_1 et le *profil* MN des points $abc...e$.

4. *Rapporter le profil.* On rapporte ordinairement le profil sur le papier à une échelle multiple de celle du plan, afin de rendre les pentes plus sensibles à l'œil. On voit bien, en effet, que si l'échelle des hauteurs est, par exemple, dix fois plus grande que celle des distances horizontales, les *différences* de niveau de deux points successifs se trouveront multipliées par dix.

5. *Lorsque deux points à niveler sont très-distants* l'un de l'autre, il faut, en général, faire subir avant tout à la cote de chacun d'eux : 1° une correction e pour la *réfraction* de la lumière, correction toujours *additive;* 2° une seconde correction h toujours *soustractive* due à la sphéricité de la terre. Ainsi A étant la cote lue sur la mire, on a toujours :

$$\text{Cote réelle} = A + e - h;$$
$$\text{Cote réelle} = \text{cote lue} - (h - e).$$

Nous avons démontré (pag. 1080) que k étant la distance en mètres qui sépare le pied de l'instrument de celui de la mire, on avait par approximation, dans les circonstances atmosphériques moyennes, R étant le rayon terrestre 6366198^{m}.

$$e = k^2 \times \frac{0.01257}{1\,000\,000} \qquad \text{et} \qquad h = \frac{e}{0.16} = \frac{k^2}{2R}$$

valeurs à l'aide desquelles on a formé la table suivante :

k	*h*	*e*	*h* — *e*	
100m	0.0008	0.0001	0.0007	La quatrième colonne donne les valeurs qu'il faut retrancher de la cote lue sur la mire pour avoir la cote de niveau vrai.
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
500	0.0196	0.0031	0.0165	
600	0.0283	0.0045	0.0237	
700	0.0385	0.0062	0.0323	
800	0.0503	0.0080	0.0422	
900	0.0636	0.0102	0.0534	
1000	0.0786	0.0126	0.0660	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
1500	0.1767	0.0283	0.1484	
2000	0.3142	0.0503	0.2639	
2500	0.4909	0.0785	0.4123	
3000	0.7069	0.1131	0.5938	
3500	0.9621	0.1539	0.8082	
4000	1.2566	0.2011	1.0556	

6. Pour obtenir la différence de niveau de deux points très-distants, il faudra donc, en général, prendre la différence de leurs cotes respectives ainsi corrigées. Mais on remarque que tout se compenserait de part et d'autre, et que la correction à faire aux cotes deviendrait inutile si l'instrument était placé à distances égales ou à peu près égales des deux points à niveler, position qu'il convient donc de préférer à toute autre.

7. *Si l'on a à niveler une série de points non visibles d'une même station*, le nivellement est dit *composé*; et il n'est rien autre chose qu'une série de *nivellements simples* (2) dans laquelle chaque coup de niveau *d'arrière* se donne sur le point même du terrain qui vient de fournir la dernière cote d'avant.

Ainsi soient *a b c d* (*fig.* 1, *pl.* XCV), les points à niveler; placez l'instrument S_1 à distances autant que possible égales entre *a* et *b*, et relevez les cotes *a* A, *b* B; faites laisser le pied de la mire bien exactement sur le point *b* du terrain,—transportez l'instrument de la station S_1 à la seconde station convenablement choisie S_2 et ayant fait pivoter la mire pour qu'elle présente son voyant tourné vers S_2, faites amener ce voyant dans le plan horizontal I B′ de la nouvelle station; elle fournira la cote *d'arrière b* B′. Laissant l'instrument à la station S_2, après avoir tourné la lunette vers *l'avant* C faites porter la mire en *c*, et elle fournira, comme on l'a vu, la cote *d'avant* *c* C. Puis, le pied de la mire restant en *c*, ce sera encore l'instrument qui la devancera en le portant à cet effet de S_2 en S_3, et le voyant de la mire étant retourné et amené à la hauteur convenable, elle fournira la *cote d'arrière* cC^1 du point *c*. On la fera alors porter en *d* où elle donnera de même la *cote d'avant d*D...., et ainsi de suite, en remarquant qu'il n'est nullement nécessaire que les stations de l'instrument soient dans le plan vertical qui passe par deux posi-

tions successives de la mire, comme semble l'indiquer la figure.

De même que dans le nivellement simple la différence de niveau de deux points successifs est donnée par la différence de leurs *cotes*, et la plus forte cote des deux appartient au point le plus bas.

8. Si l'on ne veut connaître que la différence de niveau des points extrêmes A, Z du nivellement, il suffit de faire, d'une part, la somme de toutes les *cotes d'arrière*, et de l'autre, celle de toutes les *cotes d'avant*, la différence de ces deux sommes est la différence de niveau des points extrêmes A et Z. Si la somme des cotes d'arrière est plus grande que la somme des cotes d'avant, et si l'on a marché de A vers Z, A est plus bas que Z. Z est plus bas que A dans le cas contraire; enfin Z et A sont dits *de niveau* si la différence est nulle, pourvu que l'on ait fait, s'il y a lieu, les corrections indiquées, § 5.

9. Il suffit, pour se rendre raison de cette règle, de remarquer que $a\ a'\ a''\ a'''\ldots$ étant les valeurs des cotes d'arrière, et $z\ z'\ z''\ z'''$ celles des cotes d'avant, on a pour les différences de niveau des points successifs

$$(a-z)+(a'-z')+(a''-z'')+(a'''-z''')+\ldots$$

somme qui revient à

$$(a+a'+a''+a'''\ldots)-(z+z'+z''+z'''\ldots)$$

c'est-à-dire que la *somme des différences est égale à la différence des sommes*.

10. *Vérification d'un nivellement*. C'est une opération qu'il ne faut jamais manquer de faire. Elle consiste à revenir par un nivellement *réciproque* du point Z au point A, lorsqu'on a nivelé d'abord en marchant de A vers Z, et il convient de revenir par une route différente de celle que l'on a parcourue d'abord. On prend la moyenne des deux résultats obtenus lorsqu'ils diffèrent très-peu l'un de l'autre. Si la différence est grande, tout est à recommencer sans hésitation.

11. *Attentions générales*. Ne jamais commencer un nivellement avant d'avoir vérifié et réglé le niveau (p. 970).

Le vérifier de nouveau dans le cours de la journée, lorsque le nivellement est d'une grande longueur.

Veiller à ce que la mire soit toujours placée bien verticalement.

Se faire montrer la mire et vérifier la cote inscrite par le porte-mire chaque fois qu'il passe à la station, et faire la même vérification lorsqu'on passe devant lui pour se porter avec l'instrument à la station suivante.

On se trouve souvent bien de faire enfoncer un piquet à chacune des places que la mire a occupée et d'y marquer un numéro d'ordre en chiffres romains, parce qu'ils se tracent facilement au couteau ou à la hache sur le bois.

Inscrire sur un registre et non sur une feuille volante toutes les données du nivellement, que l'on calcule ensuite en les disposant suivant un ordre qui dépend du but final de l'opération.

12. Voici l'exemple d'une disposition que j'ai souvent adoptée ; il est donné par le nivellement d'un cours d'eau sur lequel on voulait établir une usine. On a fait enfoncer à fleur d'eau un piquet au point le plus en aval, on y a placé le pied de la mire, et il a été appelé le numéro *zéro*, les autres piquets ont reçu les marques I, II, III, IV, jusques à V, également enfoncé à fleur d'eau en amont, et sur lequel on a placé la mire qui a fourni le dernier coup d'avant.

La dernière colonne, qui se déduit de la précédente, fournit les ordonnées qui permettent de tracer sur le papier le profil du terrain en prenant pour axe l'horizontale qui passe par le point le plus bas du cours d'eau.

Numéros des piquets.	Cotes arrière.	Cotes avant.	Excès des premières sur les secondes.	Hauteur absolue au-dessus du piquet 0.
	m	m	m	m
0	3.367			+ 0
		0.370	+ 2.997	
I				+ 2.997
	3.040	0.667	+ 2.373	
II				+ 5.370
	3.779	0,543	+ 3.236	
III				+ 8.606
	3.191	3.672	—0.481	
IV				+ 8.125
	2.590	3.293	— 0.703	
V				+ 7.422
Sommes. .	15.967 8.545	8.545		
Différence..	7.422	=	7.422	= chute totale.

13. *Nivellement de pente.* Le nivellement de pente consiste à déterminer des points du terrain tels que, liés entre eux deux à deux par une droite *ab*, cette droite fasse avec l'horizon un angle déterminé et généralement exprimé par le quotient $\frac{\text{hauteur}}{\text{base}}$ du triangle rectangle dont *ab* est l'hypoténuse. Ainsi, l'on dit que la pente des routes ne doit pas dépasser le $\frac{1}{20}$ ou $0^{m}.05$ par mètre.

On emploie le *niveau de pente* pour déterminer les points qui satisfont à de telles conditions, mais la *boussole-niveau* (p. 958) peut, avec quelque soin, le remplacer.

Il suffit, en effet, pour la transformer en niveau de pente, d'amener le zéro du vernier sur la division du limbe qui donne l'angle inscrit dans la troisième colonne de la table ci-dessous, et qui correspond à la pente par mètre donnée dans la première. On opérera ensuite comme il est dit plus bas.

Valeurs angulaires des pentes par mètre.

Pentes par mètre.	1 de hauteur sur base.	Angles correspondants.	Pentes par mètre.	1 de hauteur sur base.	Angles correspondants.
m 0.01	100	° ′ ″ 0.34.22	m 0.13	7.69	° ′ ″ 7.24.25
0.02	50	1. 8.45	0.14	7.14	7.58.10
0.03	33.33	1.43. 9	0.15	6.66	8.31.50
0.04	25	2.17.26	0.16	6.25	9. 5.25
0.05	20	2.51.44	»	»	»
0.06	16.66	3.26.23	»	»	»
0.07	14.28	4. 0.15	»	»	»
0.08	12.50	4.34.26	0.20	5.	11.18.35
0.09	11.11	5. 8.34	»	»	»
0.10	10.	5.42.38	»	»	»
0.11	9.09	6.16.38	»	»	»
0.12	8.33	6.50.34	0.25	4.	14. 2.10

Voici divers exemples des méthodes qu'on peut employer, on en trouverait facilement d'autres au besoin :

14. *Déterminer les positions d'une série de points tels que de la station* S *à chacun de ces points, il y ait une pente de* 0m.07 *par mètre.* Réglez le niveau et la lunette comme pour prendre une cote de niveau. Placez invariablement la ligne de visée du voyant de la mire à une hauteur au-dessus de son pied précisément égale à celle de l'axe horizontal de rotation de la lunette au-dessus du point S du terrain.

Amenez alors le zéro du vernier sur le limbe, de telle sorte que l'angle avec l'horizon = 4° 0′ 15″. Fixez bien la lunette dans cette position. Faites porter la mire à des distances quelconques dans la direction déterminée. Tous les points sur lesquels posera son pied et qui seront tels que, sans mouvoir le voyant, on apercevra la ligne de visée à la croisée des fils de la lunette, satisferont à la condition demandée.

Les points les plus éloignés de la station pourraient exiger que l'on tînt compte de la réfraction et de la sphéricité (5).

15. *Nivellement trigonométrique.* Il est quelquefois plus commode et plus court de déterminer la différence de niveau de deux points très-éloignés par la trigonométrie que par les méthodes exposées ci-dessus.

Soient, par exemple deux sommets A, B dont on connaît la distance *c* (*fig.* 5, *pl.* XCIV) donnée par un plan, une carte, etc.

Si du point A on mesure l'angle de dépression HAB, ou du point B, l'angle de hauteur ABN qui lui est égal, il est clair que l'on aura souvent avec une approximation très-suffisante pour la différence de niveau AN entre ces points

$$AN = c \times \text{tang. B}.$$

Cette méthode est souvent employée lorsque l'on est en vue d'un sommet dont la hauteur (p. 413) est bien connue.

16. Si du sommet A on apercevait d'autres points B′ B″ B‴, et que sur le plan ou la carte on eût les distances c', c'', c''' de ces points à la projection de A, on relèverait du point A tous les angles de *dépression* de ces points qui donneraient les angles de hauteur B′, B″, B‴ formées en B′, B″, B‴. Alors les valeurs c' tang. B′, c'' tang. B″, c''' tang. B‴ fourniraient les cotes par rapport à A, et par suite les différences de niveau des points B′, B″, B‴ entre eux. Ces procédés sont très-commodes lorsque l'on a à faire la *reconnaissance* d'un pays de montagnes.

17. *Lorsque la distance de deux points* A *et* B *dont on cherche la différence de niveau est très-considérable*, on emploie encore la méthode suivante (*fig.* 2, *pl.* XCV).

Du point B on mesure la distance zénithale ZBA. L'instrument donne z, et il faut ajouter à cet angle celui r que cause la *réfraction* (p. 1078). D'où distance zénithale vraie ZBA $= z + r$.

On admet alors que l'arc BN se confond avec l'arc terrestre bn, et celui-ci avec sa corde k. Or, le triange isocèle BNO donne

$$NBO = BNO = 90° - \tfrac{1}{2}C$$

et R étant le rayon terrestre, on a

$$k = 2R \sin. \tfrac{1}{2}C = RC \sin. 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en prenant la longueur du petit arc terrestre $\frac{1}{2}C$ pour son sinus, après l'avoir converti en secondes,

Faisant AN $= h =$ différence de niveau cherchée, le triangle ABN donne ainsi

$$h = k\frac{\sin. B}{\sin. A} = k \times \frac{\cos.(z + r - \frac{1}{2}C)}{\sin.(z + r - C)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en remarquant que $B = 90° - z - r + \frac{1}{2}C$,

et que $A = PBA = z + r - C$.

18. Si l'on met la valeur moyenne de r dans l'équation ci-dessus, elle devient simplement

$$h = k\,\frac{\cos.(z - 0.42\,C)}{\sin.\,(z - 0.92\,C)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et donne souvent, avec assez d'approximation, la différence de niveau cherchée.

19. Si le sommet A est visible de plusieurs points $B'B''B'''...$, leurs distances $k'k''k'''$ étant données par la carte, on trouverait de même pour chacun d'eux les valeurs correspondantes $h'h''h'''$ qui fourniraient ensuite, par approximation, les différences de niveau de ces points entre eux. Mais cela suppose que de chacune des stations $B'B''B'''$ on a pu viser au même point du sommet A, ce qui n'est pas toujours possible.

20. *Nivellement approximatif de sommets qui ont la mer pour horizon.* Si de divers sommets $SS'S''$ (*fig.* 6, *pl.* XCIV) on relève à chaque station S la distance zénithale z des limites M de l'horizon, et si l'on y ajoute la réfraction r, le triangle MSC, rectangle en M, donnera, en remarquant que

$$z+r=90°+C \text{ d'où } C=z+r-90°. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$h=\frac{R(1-\cos.C)}{\cos.C}=R\,\text{tang.}\,C\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

c'est la formule (b) de la page 513; on en déduirait, par les mêmes raisonnements, les hauteurs h en fonction de l'angle de dépression d qui devient en effet $=(z-90°)$ lorsqu'on néglige la réfraction r, comme on l'a fait dans le tableau de la page 514.

Si l'on doit tenir quelque compte de celle-ci, on peut lui supposer sa valeur moyenne $r=0.08C$ dans l'équation (4), ce qui donnera $C=1.08\,(z-90°)$.

Mettant cette dernière valeur de C dans l'équation 5; observant que C étant un angle très-petit, il n'y a pas d'erreur notable à supposer tang. $mC=m\,\text{tang.}\,C$, il vient

$$h=R\times1.08\times0.54\,\text{tang.}^2(z-90°)=0.5832\,\text{tang.}^2(z-90°). \quad (6)$$

21. On comprend que les hauteurs absolues h, h' h''... que l'on obtiendrait par ces méthodes à chaque station S, S', S''... ne méritent pas une confiance absolue, mais elles peuvent éclairer sur les différences de niveau de ces diverses stations entre elles, lorsque les circonstances atmosphériques auront été sensiblement les mêmes pour toutes les observations faites; l'après-midi est le moment de la journée le plus favorable à l'exactitude de celles-ci.

22. *Nivellement barométrique.* J'ai dit à l'article *Instruments* (p. 963) les difficultés que présentait le transport des *baromètres* destinés à la mesure des hauteurs, tels qu'on les construit encore aujourd'hui, mais je n'en dois pas moins rappeler ici la formule empirique qui permet de tirer de leur observation la hauteur approximative d'une sommité au-dessus du niveau de la mer. Soient:

a = nombre constant = 18393m d'après *Ramond*, nombre dont le logarithme est 4.2646527.

α = autre nombre constant = 0.0028371, et qui a pour logarithme $\overline{3}.45287$.

h' = hauteur du baromètre à la station inférieure.

h = hauteur du baromètre à la station supérieure.

t' = température centigrade à l'air libre à la station inférieure.

t = *id.*—*id.*—*id.*..... supérieure.

θ = excès de température du mercure du baromètre que l'on obtient en retranchant la température du mercure à la station supérieure de celle qu'il avait à la station inférieure.

θ peut être négatif.

l = la latitude du lieu, toujours connue avec assez d'approximation.

Z = différence de niveau des deux stations.

$$Z = a\{\log. h' - \log. h - 0.00008\theta\}[1 + 0.002(t'+t)](1 + \alpha \cos. 2l). \quad (7)$$

On a donc à observer, savoir :

A la station inférieure h', t' et la température du mercure;

A la station supérieure h, t et la température du mercure.

Voici un exemple de calcul appliqué aux observations faites par *Ramond*, au Puy-de-Dôme, pour lequel $l = 45° 46'$;

A Clermont, station inférieure, on avait $h' = 0^m.72852$; $t' = 28°.3$; température du mercure 24°.7 ;

Au Puy-de-Dôme, station supérieure, on trouva $h = 0^m.70565$; $t = 25°.5$, et température du mercure 27°.8.

Donc θ est négatif et $= -3°.1$, et l'on a

$$Z = 18393 \{\log. 0.72852 - \log. 0.70565 + 0.00025\} \times [1.1076] (1 + 0.002837 \cos. 91°.32').$$

Pour calculer Z, on commencera par prendre la différence des logarithmes, ce qui donnera

log de 0.72852.	$\overline{1}.8624415$
—log. de 0.70565	$\overline{1}.8485893$
	0.0138522
ajoutant	0.00025
il vient.	0.0141....

On prend alors :

log. de 18393 . . . . 4.26465
log. de 0.0141 . . . . $\bar{2}$.14922
log. de 1.1076 . . . . 0 04438

log. de α . . . . . $\bar{3}$.45287
log. cos. 91°.32′ . . 2.42746 —

log. (α. cos.2 l). . . $\bar{5}$.88033 —

qui répond à . . . . —0.000076
ajoutant. 1

on a . . . . 0.999924 dont le
logarithme est. . . . . $\bar{1}$.99997

log. de Z. 2.45822

d'où Z=287^{m}.22.

On trouvera aux mots *Hauteur* et *Coordonnées géographiques* les hauteurs d'un grand nombre de sommets au-dessus du niveau des mers. Ils peuvent servir de points de départ pour d'autres mesures barométriques.

NOEUD. *Un* nœud correspond à une vitesse de 0^{m}.5144 par *seconde*, soit *un* mille marin=une minute de degré=1851^{m}.8518 à *l'heure*. Dire qu'un navire a *filé* six nœuds, c'est dire qu'il a parcouru six milles ou deux lieues marines à l'heure.

NOMBRES (*quelques propriétés des*) :

1. La somme ou la différence de deux nombres pairs est un nombre pair.
2. La somme ou la différence de deux nombres impairs est paire, mais la somme de trois nombres impairs est impaire.
3. Le produit d'un nombre pair par un nombre impair et celui de deux nombres pairs est pair.
4. Le produit d'un nombre quelconque de facteurs impairs est impair.
5. Toutes les puissances d'un nombre pair sont paires.
6. Lorsqu'un nombre impair est diviseur d'un nombre pair, il est aussi diviseur de sa moitié.
7. Si l'on multiplie ou si l'on divise un carré par un carré, le produit ou le quotient est un carré; et si l'on multiplie ou si l'on divise un carré par un nombre qui n'est point un carré, le produit ou le quotient ne peut être un carré.
8. Un carré ne peut se terminer par un nombre impair de zéros,

— ni par aucun des chiffres 2, 3, 7 ou 8, — ni par deux chiffres égaux autres que des zéros ou des quatre.

9. Si un carré se termine par un 4, l'avant-dernier chiffre est nécessairement pair.

10. Si un carré se termine par un 5, l'avant-dernier chiffre est nécessairement un 2.

11. Si un cube est divisible par 7, il est aussi divisible par le cube de 7.

12. La différence entre un cube parfait et sa racine est toujours divisible par 6.

13. Ni la somme, ni la différence de deux cubes ne peut être un cube.

14. Un cube peut se terminer par un chiffre quelconque 0 à 9.

15. Lorsqu'un nombre quelconque se termine par un 5 ou un 6, ses puisssances quelconques se terminent respectivement par un 5 ou un 6.

16. Le produit de deux nombres premiers différents ne peut être un carré.

17. Tout nombre premier plus grand que 2 est de la forme $(4n+1)$ ou $(4n-1)$; tout nombre premier plus grand que 3 est de la forme $(6n+1)$ ou $(6n-1)$, et il n'y a pas de formule algébrique qui n'exprime que des nombres premiers (p. 449).

18. Si une série quelconque de nombres, commençant par l'unité, forme une proportion géométrique continue,

Le 3e, le 5e, le 7e,... etc..., sont des carrés;
Le 4e, le 7e, le 10e,... etc., sont des cubes;
Le 7e est donc à la fois un carré et un cube.

19. Si l'on élève les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, 4, 5 ..... k respectivement à une puissance m, puis, que l'on prenne les différences de deux termes successifs, puis les différences des différences, ou ce qu'on nomme les différences secondes, puis les différences de celles-ci ou les différences troisièmes, puis..., etc., on parvient à une différence constante pour chaque valeur de m.

Cette différence constante est le produit des m facteurs $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times m)$.

On n'y parvient qu'après avoir pris m différences.

Ainsi, faisant $m = 3$, on a :

1 . . . 8 . . . 27. . . 64. . . 125. . .
7. . . . 19. . . 37. . . 61. . . différences premières.
12 . . . 18. . . 24 . différences secondes.
6 . . . 6 différences troisièmes constantes et $= 1 \times 2 \times 3$.

m étant $= 4$, on trouverait $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ pour la différence constante, et elle serait la quatrième.

m étant $= 5$, la différence constante serait du 5[e] ordre et $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 125$.

20. Si l'on partage l'unité en deux fractions inégales $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, la somme de l'une des parties ajoutée au carré de l'autre = la somme de la seconde partie ajoutée au carré de la première

$$\frac{a}{b} + \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c}{d}$$

ainsi :
$$\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

et
$$\frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

21. On a, avec une très-grande approximation pour le rapport π du diamètre à la circonférence, l'expression numérique

$$\pi = \frac{13\sqrt{146}}{50} = \frac{1}{2} \times \frac{13}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = 3.141592653....$$

et avec plus d'approximation encore

$$\pi = \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3.1415926536.....$$

NOMBRES PROPORTIONNELS (*Équivalents chimiques*). Les corps définis que la chimie considère sont invariables quant à leur composition. Ils se combinent entre eux, non en toute proportion, mais suivant des rapports de poids rigoureusement déterminés qui ne laissent place à aucune combinaison de poids intermédiaires. Ainsi, essayez, par les moyens que la chimie enseigne, de combiner 25 grammes de mercure (nombre rond) avec 2 grammes de soufre, vous obtiendrez un composé noir pesant 27 grammes, connu dans les arts, sous le nom d'*Ethiops mercuriel*, et en chimie, sous celui de *protosulfure de mercure*. Essayez maintenant de combiner 25 grammes de mercure avec 3 grammes de soufre, et vous trouverez qu'il y aura 1 gramme de soufre qui ne se combinera pas et qui restera dans la masse de sulfure pour ainsi dire sans emploi. *Doublez*, au contraire, la première proportion de soufre, portez-la à 4 grammes et combinez ces 4 grammes avec les 25 grammes de mercure, et voilà qu'un nouveau et véritable composé chimique naîtra : c'est celui que l'on connaît dans les arts sous le nom de *vermillon* et, en chimie, sous celui de *bisulfure* de mercure.

Les rapports 25 et 2, ou plus exactement 253164 et 20116, sont les poids relatifs du mercure et du soufre, *seuls* nombres suivant lesquels, ou suivant les *multiples* desquels ces substances pourront entrer dans une *combinaison* proprement dite.

Essayez, de même, de combiner du soufre avec de l'arsenic, vous n'obtiendrez de *combinaison* qu'en prenant pour les poids relatifs de ces deux substances, savoir : en soufre; le même poids que ci-dessus 20116 ou un multiple simple de ce nombre,— en arsenic 47012; ainsi :

20116 soufre + 47012 arsenic = 67128 protosulfure d'arsenic.

$\frac{3}{2}$(20116) soufre + 47012 arsenic = 77128 deutosulfure d'arsenic.

Le nombre 20116 est ce qu'on appelle le *nombre proportionnel*, *le nombre équivalent*, ou simplement l'*équivalent* du corps *soufre ;* il exprime le nombre *relatif* suivant lequel cette substance entrera dans une combinaison quelconque, ce nombre pouvant, en général, être multiplié par quelque facteur toujours simple et presque toujours entier, tel que $\frac{3}{2}$, 2, 3,...

De même 47012 est le *nombre proportionnel* ou l'*équivalent* du corps *arsenic*, comme 253164 est celui du mercure.

On a choisi pour unité le nombre proportionnel de l'*oxygène* dont l'équivalent est représenté par 10000.

Ce sont, pour tous les corps définis de la chimie, ces *nombres proportionnels* ou *équivalents* que renferme la table suivante, table extrêmement commode et que je ne pouvais omettre ici, car elle résume en peu de pages la composition de tous ces corps, et donne ainsi à vue les proportions dont l'*analyse chimique* exige à chaque instant la connaissance. On y remarque que :

L'équivalent d'un corps simple est la quantité en poids de ce corps qui, en se combinant avec 10000 *oxygène donne naissance à un protoxyde.*

L'équivalent d'un corps composé se forme en ajoutant les équivalents des corps qui le constituent.

Si l'on trouvait plus commode d'exprimer les parties constituantes d'un composé en prenant le nombre 100 pour le poids de ce dernier (et c'est en effet presque toujours ainsi que les compositions se trouvent formulées), une règle de trois simple donnerait facilement le résultat cherché. Ainsi, veut-on tirer de la table la composition de *cent* de *chaux*. La table donne 35604 pour l'équivalent de cet oxyde et 10000 pour la quantité d'oxygène que contient 35603 chaux ; on a donc

$$35603 \text{ chaux} : 10000 \text{ oxygène} :: 100 \text{ chaux} : \text{oxygène} = \frac{10000 \times 100}{35603} = 28.09$$

donc cent de chaux contient oxygène. 28.09
calcium 71.91

100.00

Ces principes et ces résultats numériques sont uniquement déduits de l'expérience et purs de toute hypothèse. La première idée des équivalents chimiques paraît être due à *Wenzel* (Voyez sa *Théorie des affinités*, 1777).

11411 Aluminium (Al),

Avec		Forment	
10000	oxygène	21411	alumine.
44264	chlore.	55675	chlorure d'aluminium.

161290 Antimoine (Sb),

Avec		Forment	
30000	oxigène.	191290	oxyde d'antimoine.
40000	oxygène	201290	acide antimonieux.
50000	oxygène.	211290	acide antimonique.
132792	chlore.	294082	protochlorure d'antimoine.
221390	chlore.	382680	perchlorure d'antimoine.
60348	soufre.	221638	protosulfure d'antimoine.
473850	iode.	635140	protoiodure d'antimoine.

Les équivalents des deux acides, plus une quantité de base contenant 10000 oxigène, forment respectivement { Antimonite neutre. Antimoniate neutre.

135161 Argent (Ag),

Avec		Forment	
10000	oxygène.	145161	oxyde d'argent.
20116	soufre.	155277	sulfure d'argent.
44264	chlore.	177425	chlorure d'argent.
157950	iode.	293111	iodure d'argent.

47012 Arsenic (As),

Avec		Forment	
15000	oxygène.	62012	acide arsénieux.
25000	oxygène.	72012	acide arsénique.
20116	soufre.	67128	protosulfure d'arsenic.
30174	soufre.	77186	deutosulfure d'arsenic.
70140	fluor.	117152	fluorure d'arsenic.
66393	chlore.	113405	chlorure d'arsenic.
473800	iode.	520812	iodure d'arsenic.

Les nombres des deux acides, plus une quantité de base contenant 10000 oxigène forment respectivement un { Arsénite neutre. Arséniate neutre..

17703. Azote (Az),

Avec		Forment	
10000	oxygène.	27703	protoxyde d'azote.
20000	oxygène.	37703	bioxyde d'azote.
30000	oxygène.	47703	acide azoteux.
40000	oxygène.	57703	acide hypoazotique.
50000	oxygène.	67703	acide azotique ou nitrique.
50000	oxygène et 11248 eau	78951	acide nitrique concentré.
15288	carbone.	32981	cyanogène.
3744	hydrogène.	21447	ammoniaque.

67703 *Acide azotique*,

Avec	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un azotate ou nitrate neutre.

Pour avoir la composition des *sels d'ammoniaque*, il faut remplacer la quantité de base contenant 10000 oxygène par 21447 *ammoniaque*.

85693 Barium (Ba),

Avec	Forment
10000 oxygène..	95693 baryte.
10000 oxygène + 11248 eau. . . .	106941 hydrate de baryte.
20000 oxygène.	105693 bioxyde de barium.
20116 soufre.	105809 protosulfure de barium.
11690 fluor.	97383 fluorure de barium.
44264 chlore..	129957 chlorure de barium.
157950 iode.	243643 iodure de barium.

27241 Bore (B),

Avec	Forment
60000 oxygène..	87241 acide borique.
60000 oxygène + 67488 eau . . .	154729 acide borique cristallisé.
265584 chlore.	292825 chlorure de bore.
140280 fluor.	367521 acide fluo-borique.

87241 *Acide borique*,

Avec	Forment
Une quantité de bore contenant 10000 oxygène.	Un borate neutre.

88692 Bismuth (Bi),

Avec	Forment
10000 oxygène..	98692 protoxyde de bismuth.
15000 oxygène	103692 sesquioxyde de bismuth.
20116 soufre..	108808 sulfure de bismuth.
44264 chlore.	132956 chlorure de bismuth.
157950 iode..	246642 iodure de bismuth.

97830 Brome (Br),

Avec	Forment
50000 oxygène.	147830 acide bromique.
1248 hydrogène.	99078 acide bromhydrique.

147830 *Acide bromique*,

Avec	Forment
Une quantité de bore contenant 10000 oxygène	Un bromate neutre.

99078 *Acide bromhydrique*,

Avec	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène	De l'eau et un bromure.

7644 Carbone (C),

Avec	Forment
10000 oxygène.	17644 oxyde de carbone.
20000 oxygène.	27644 acide carbonique.
44264 chlore.	51904 protochlorure de carbone.
66396 chlore.	74040 sesquichlorure de carbone.
1248 hydrogène.	8892 bicarbure d'hydrogène.
2496 hydrogène.	10140 protocarbure d'hydrogène.

27644 *Acide carbonique,*

Avec	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène	Un carbonate neutre.

69677 Cadmium (Cd),

Avec	Forment
10000 oxygène	79677 oxyde de cadmium.
20116 soufre	89793 sulfure de cadmium.

25603 Calcium (Ca),

Avec	Forment
10000 oxygène	35603 chaux.
10000 oxygène + 11248 eau	46851 hydrate de chaux.
20000 oxygène	45603 bioxyde de calcium.
20116 soufre	45719 protosulfure de calcium.
11690 fluor	37293 fluorure de calcium.
44264 chlore	69867 chlorure de calcium.
157950 iode	183553 iodure de calcium.

57470 Cérium (Ce),

Avec	Forment
10000 oxygène	67440 protoxyde de cérium.
15000 oxygène	72470 sesquioxyde de cérium.
44264 chlore	101734 protochlorure de cérium.
66396 chlore	123866 sesquichlorure de cérium.

44264 Chlore (Ch),

Avec	Forment
10000 oxygène	54264 acide chloreux.
40000 oxygène	84264 oxide de chlore ou acide hypo-chlorique.
50000 oxygène	94264 acide chlorique.
70000 oxygène	114264 acide hyperchlorique.
17644 oxyde de carbone	61908 acide chloroxycarbonique.
1248 hydrogène	45512 acide chlorhydrique.

Les nombres équivalents des trois premiers acides, plus une quantité de base contenant 10000 oxygène forment respectivement { Chlorite neutre. Chlorate neutre. Hyperchlorate neutre.

45512 *Acide chlorhydrique,*

Avec	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène	De l'eau et un chlorure.

35182 Chrôme (Cr),

Avec	Forment
15000 oxygène	50182 oxide de chrôme.
30000 oxygène	65182 acide chromique.

65182 *Acide chromique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène	Chromate neutre.

36899 Cobalt (Co),

Avec	Forment
10000 oxygène.	46899 protoxyde de cobalt.
15000 oxygène.	51899 sesquioxyde de cobalt.
44264 chlore.	81163 protochlorure de cobalt.

115372 Colombium (Ta),

Avec	Forment
20000 oxygène.	135372 oxyde de colombium.
30000 oxygène.	145372 acide colombique.

145372 ***Acide colombique,***

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène	Colombate neutre.

79139 Cuivre (Cu),

Avec	Forment
10000 oxygène.	89137 protoxyde de cuivre.
20000 oxygène.	99139 bioxyde de cuivre.
20000 oxygène + 22496 eau. . . .	121635 hydrate de bioxyde de cuivre.
40000 oxygène.	119139 quadroxyde de cuivre.
20116 soufre	99255 protosulfure de cuivre.
40232 soufre	119371 bisulfure de cuivre.
44264 chlore	123403 protochlorure de cuivre.
88528 chlore	167667 bichlorure de cuivre.
157950 iode.	237089 iodure de cuivre.

73529 Etain (Sn),

Avec	Forment
10000 oxygène.	83529 protoxyde d'étain.
20000 oxygène.	93529 bioxyde d'étain.
20116 soufre.	93645 protosulfure d'étain.
40232 soufre.	113761 bisulfure d'étain.
44264 chlore.	117793 protochlorure d'étain.
88528 chlore.	162057 bichlorure d'étain.
157950 iode.	231479 iodure d'étain.

33921 Fer (Fe),

Avec	Forment
10000 oxygène.	43921 protoxyde de fer.
15000 oxygène.	48921 sesquioxyde de fer.
20116 soufre.	54037 protosulfure de fer.
40232 soufre.	74153 bisulfure de fer.
44264 chlore.	78185 protochlorure de fer.
66396 chlore.	100317 sesquichlorure de fer.
157950 iode.	191871 protoiodure de fer.

23380 Fluor (F),

Avec	Forment
1248 hydrogène.	24628 acide fluorhydrique.

24628 ***Acide fluorhydrique,***

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	De l'eau et un fluorure.

22084 Glucinium (Gl),

Avec	Forment
10000 oxygène.	32084 glucine.
44264 chlore.	66348 chlorure de glucinium.

1248 Hydrogène (H),

Avec	Forment
10000 oxygène.	11248 eau.
20000 oxygène.	21248 bioxyde d'hydrogène.

157950 Iode (I),

Avec	Forment
50000 oxygène.	207950 acide iodique.
70000 oxygène.	227950 acide hypériodique.
1248 hydrogène.	159198 acide iodhydrique.
5901 azote.	163851 iodure d'azote.
Le nombre des deux premiers acides plus une quantité de base contenant 10000 oxygène forment respectivement un.	iodate neutre. hypériodate neutre.

159198 *Acide iodhydrique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	De l'eau et un iodure.

123350 Iridium (Ir),

Avec	Forment
10000 oxygène.	133350 protoxyde d'iridium.
15000 oxygène.	138350 sesquioxyde d'iridium.
20000 oxygène.	143350 bioxyde d'iridium.
30000 oxygène.	153350 trioxyde d'iridium.
30560 carbone.	153910 carbure d'iridium.
20116 soufre.	143466 protosulfure d'iridium.
30174 soufre.	153524 sesquisulfure d'iridium.
40232 soufre.	163582 bisulfure d'iridium.
44264 chlore.	167614 protochlorure d'iridium.
66396 chlore.	189746 sesquichlorure d'iridium.
88528 chlore.	211878 bichlorure d'iridium.

8037 Lithium (L),

Avec	Forment
10000 oxygène.	18037 lithine.
10000 oxygène + 11248 eau.	29285 hydrate de lithine.
44264 chlore.	52301 chlorure de lithium.

15875 Magnésium (Mg),

Avec	Forment
10000 oxygène.	25875 magnésie.
10000 oxygène + 11248 eau. . . .	37123 hydrate de magnésie.
44264 chlore.	60139 chlorure de magnésium.
157950 iode.	173825 iodure de magnésium.

34589 Manganèse (Mn),

Avec	Forment
10000 oxygène.	44589 protoxyde de manganèse.
15000 oxygène.	49589 sesquioxyde de manganèse.
20000 oxygène.	54589 bioxyde de manganèse.

Avec	Forment
30000 oxygène.	64589 acide manganique.
35000 oxygène.	69589 acide hypermanganique.
20116 soufre.	54705 protosulfure de manganèse.
44264 chlore.	78853 chlorure de manganèse.
Les nombres des deux acides plus une quantité de base contenant 10000 oxygène forment respectivement un.	manganate neutre. hypermanganate neutre.

253164 Mercure (Hg),

Avec	Forment
10000 oxygène.	263164 protoyde de mercure.
20000 oxygène.	273164 bioxyde de mercure.
20116 soufre.	273280 protosulfure de mercure.
40232 soufre.	293396 bisulfure de mercure.
44264 chlore.	297428 chlorure de mercure.
88528 chlore.	341692 bichlorure de mercure.
157915 iode.	411079 iodure de mercure.
315900 iode.	569064 biiodure de mercure.

59852 Molybdène (Mo),

Avec	Forment
10000 oxygène.	69852 oxyde de molybdène.
20000 oxygène.	79852 acide molybdeux.
30000 oxygène.	89852 acide molybdique.
40232 soufre.	100084 bisulfure de molybdène.
60348 soufre.	120200 trisulfure de molybdène.

89852 *Acide molybdique*,

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un molybdite neutre.

36967 Nickel (Ni),

Avec	Forment
10000 oxygène.	46967 protoxyde de nickel.
15000 oxygène.	51967 sesquioxyde de nickel.
20116 soufre.	57083 sulfure de nickel.
44264 chlore.	81231 chlorure de nickel.

248602 Or (Au),

Avec	Forment
10000 oxygène.	258602 protoxyde d'or.
30000 oxygène.	278602 trioxyde d'or.
40232 soufre.	288834 sulfure d'or.
132792 chlore.	381394 trichlorure d'or.

124448 Osmium (Os),

Avec	Forment
10000 oxygène.	134448 protoxyde d'osmium.
15000 oxygène.	139448 sesquioxyde d'osmium.
20000. oxygène.	144448 bioxyde d'osmium.
30000 oxygène.	154448 trioxyde d'osmium.
40000 oxygène.	164448 acide osmique.
80464 soufre.	204912 persulfure d'osmium.
44264 chlore.	168712 protochlorure d'osmium.
88328 chlore.	212776 bichlorure d'osmium.

66590 Palladium (Pa),

Avec	Forment
10000 oxygène.	76590 protoxyde de palladium.
20000 oxygène.	86590 bioxyde de palladium.
20116 soufre.	86706 protosulfure de palladium.
44264 chlore.	110854 protochlorure de palladium.

19615 Phosphore (P),

Avec	Forment
5000 oxygène.	24615 acide hypophosphoreux.
15000 oxygène.	34615 acide phosphoreux.
25000 oxygène.	44615 acide phosphorique.
66396 chlore.	86011 protochlorure de phosphore.
110660 chlore.	130275 deutochlorure de phosphore.

34615 *Acide phosphoreux,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un phosphite neutre.

44615 *Acide phosphorique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un phosphate neutre.

44615 *Acide phosphorique,*

Multipliées	Forment
par $\frac{4}{3}$ ou par $\frac{3}{2}$ ou par 2, la quantité de base restant la même.	les phosphates acidules ou acides.

123390 Platine (Pl),

Avec	Forment
10000 oxygène.	133390 protoxyde de platine.
20000 oxygène.	143390 bioxyde de platine.
44264 chlore.	167654 protochlorure de platine.
88528 chlore.	211918 bichlorure de platine.
20116 soufre.	143506 protosulfure de platine.
40232 soufre.	163622 bisulfure de platine.

129450 Plomb (Pb),

Avec	Forment
10000 oxygène.	139450 protoxyde de plomb.
15000 oxygène.	144458 sesquioxyde de plomb.
20000 oxygène.	149450 bioxyde de plomb.
20116 soufre.	149566 protosulfure de plomb.
23380 fluor.	152830 fluorure de plomb.
44264 chlore.	173714 chlorure de plomb.
157950 iode.	287400 iodure de plomb.

48992 Potassium (K),

Avec	Forment
10000 oxygène.	58992 potasse.
10000 oxygène + 11248 eau.	70240 hydrate de potasse.
30000 oxygène.	78992 trioxyde de potassium.
44264 chlore.	93256 chlorure de potassium.
23380 fluor.	72372 fluorure de potassium.
97830 brome.	146822 bromure de potassium.
157950 iode.	206942 iodure de potassium.
20116 soufre.	69108 protosulfure de potassium.

65138 Rhodium (R),

Avec	Forment
10000 oxygène.	75138 protoxyde de rhodium.
15000 oxygène.	80138 sesquioxyde de rhodium.
20116 soufre.	85254 sulfure de rhodium.
66396 chlore.	131534 sesquichlorure de rhodium.

49458 Sélénium (Se),

Avec	Forment
10000 oxygène.	59458 acide sélénieux.
30000 oxygène.	72458 acide sélénique.
1248 hydrogène.	50706 acide sélénhydrique.

Les nombres équivalents des deux premiers acides, plus une quantité de base contenant 10000 oxygène, forment respectivement un. . . . . { sélénite neutre. séléniate neutre.

27731 Silicium (Si),

Avec	Forment
30000 oxygène.	57731 silice ou acide silicique.
132786 chlore.	160517 chlorure de silicium.
70140 fluor.	97871 acide fluosilicique.

57731 *Silice,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un silicate neutre.

29090 Sodium (Na),

Avec	Forment
10000 oxygène.	39090 soude.
10000 oxygène + 11248 eau.	50338 hydrate de soude.
15000 oxygène.	44090 sesquioxyde de sodium.
20116 soufre.	49206 protosulfure de sodium.
44264 chlore.	73350 chlorure de sodium.
23380 fluor.	52470 fluorure de sodium.
97830 brome.	126920 bromure de sodium.
157950 iode.	187040 iodure de sodium.

20116 Soufre (S),

Avec	Forment
10000 oxygène.	30116 acide hyposulfureux.
20000 oxygène.	40116 acide sulfureux.
25000 oxygène.	45116 acide hyposulfurique.
30000 oxygène.	50116 acide sulfurique.
30000 oxygène et 11248 eau.	61364 acide sulfurique concentré.
1248 hydrogène.	21364 acide sulfhydrique.

40116 *Acide sulfureux,* 90232 *Acide hyposulfurique,*
50116 *Acide sulfurique,*

Forment respectivement avec une quantité de base contenant 10000 oxygène, savoir. . . . . { un sulfite neutre. hyposulfate neutre. sulfate neutre.

21364 *Acide sulfhydrique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un sulfure et de l'eau.

54728 STRONTIUM (Sr),

Avec	Forment
10000 oxygène.	64728 strontiane.
10000 oxygène + 11248 eau. . . .	75976 hydrate de strontiane.
20000 oxygène.	74728 bioxyde de strontium.
20116 soufre.	74844 protosulfure de strontium.
44264 chlore.	98992 chlorure de strontium.
157950 iode.	212678 iodure de strontium.

80174 TELLURE (Te),

Avec	Forment
20000 oxygène.	100174 oxyde ou acide tellureux.
30000 oxygène.	110174 acide tellurique.
1248 hydrogène.	81322 acide tellurhydrique.
40232 soufre.	120406 sulfure de tellure.
44264 chlore.	124438 souschlorure de tellure.
88528 chlore.	168702 chlorure de tellure.

110174 *Acide tellurique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un tellurate neutre.

81322 *Acide tellurhydrique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	De l'eau et un tellurure.

74490 THORINIUM (Th),

Avec	Forment
10000 oxygène.	84490 thorine.
44264 chlore.	118754 chlorure de thorinium.

30366 TITANE (Ti),

Avec	Forment
20000 oxygène.	50366 acide titanique.
88528 chlore.	118894 chlorure de titane.

50366 *Acide titanique,*

Plus	Forment
Une quantité X de base contenant 10000 oxygène.	Un titanate neutre.

118300 TUNGSTÈNE (W),

Avec	Forment
20000 oxygène.	138300 oxyde de tungstène.
30000 oxygène.	148300 acide tungstique.
40232 soufre.	158532 protosulfure de tungstène.
60348 soufre.	178648 persulfure de tungstène.

148300 *Acide tungstique,*

Plus	Forment
Une quantité X de base contenant 10000 oxygène.	Un tungstate neutre.

271136 URANE (U),

Avec	Forment
10000 oxygène.	281136 protoxyde d'urane.
15000 oxygène.	286136 sesquioxyde d'urane.

Avec	Forment
20116 soufre.	291252 protosulfure d'urane.
44264 chlore.	315400 protochlorure d'urane.
66396 chlore.	337532 sesquichlorure d'urane.

85684 Vanadium (Va),

Avec	Forment
10000 oxygène.	95684 protoxyde de vanadium.
20000 oxygène.	105684 bioxyde de vanadium.
30000 oxygène.	115684 acide vanadique.
40232 soufre.	125916 sulfure de vanadium.
60348 soufre.	146032 persulfure de vanadium.
88528 chlore.	174212 chlorure de vanadium.

115684 *Acide vanadique,*

Plus	Forment
Une quantité de base contenant 10000 oxygène.	Un vanadate neutre.

40251 Yttrium (Y),

Avec	Forment
10000 oxygène.	50251 yttria.
44264 chlore.	84515 chlorure d'yttrium.

40323 Zinc (Zn),

Avec	Forment
10000 oxygène.	50323 oxyde de zinc.
10000 oxygène + 11248 eau. . . .	61571 hydrate d'oxyde de zinc.
20116 soufre.	60439 sulfure de zinc.
157950 iode.	198273 iodure de zinc.
44264 chlore.	84587 chlorure de zinc.

28013 Zirconium (Zr),

Avec	Forment
10000 oxygène.	38013 zircone.
44264 chlore.	72277 chlorure de zirconium.

NORIA, machine hydraulique élévatoire consistant en une corde ou une chaîne verticale sans fin, tournant à l'aide de deux tambours horizontaux placés l'un au-dessous de l'autre, et à laquelle sont attachés des seaux qui montent pleins et descendent à vide après avoir versé leur contenu, soit un peu avant de passer, soit en passant sur le tambour supérieur.

D'après *Navier*, la *noria* dite *de Gâteau*, utilise de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ du travail du moteur quand l'eau est élevée de 2 à 4 mèt. Les norias doivent se mouvoir lentement.

O

OBSERVATOIRES. Nous donnons ci-dessous les positions, rapportées à celui de Paris, des *observatoires* établis en France et dans les Iles-Britanniques. Ces positions ont été tirées de la *Connaissance des temps* pour 1851, publiée en août 1848.

	LATITUDE.	LONGITUDE en degrés.	LONGITUDE en temps.
Aberdeen	51° 8′ 58″	4° 26′ 6″ O	0h 17m 44
Armagh	54 21 13	8 59 17 O	0 35 37
Bedford	52 8 28	2 48 23 O	0 11 14
Blenheim	51 50 28	3 41 40 O	0 14 47
Brest	48 23 32	6 49 49 O	0 27 19
Observations directes	48 23 35	6 49 35 O	0 27 18
Bushey-Heath	51 37 44	2 40 36 O	0 10 42
Cambridge	52 12 52	2 14 31 O	0 8 58
Et d'après la triangulation	....	2 14 15 O	0 8 57
Dublin	53 23 13	8 46 36 O	0 34 42
Edinburgh	55 57 20	5 31 7 O	0 22 4
Greenwich	51 28 38	2 20 24 O	0 9 22
Kensington	51 30 13	2 32 5 O	0 10 8
Makerstown	55 34 45	4 51 24 O	0 19 26
Marseille	43 17 52	3 1 48 E	0 12 7
Observations directes	43 17 50	3 1 54 E	0 12 8
Ormskirk	53 34 18	5 14 24 O	0 20 58
Oxford (observations directes)	51 45 39	3 35 46 O	0 14 23
Paris	48 50 13	0 0 0	0 0 0
Portsmouth	50 48 3	3 26 23 O	0 13 46
Regent's-Park	51 31 30	2 29 40 O	0 9 59
Richmond	51 28 8	2 39 7 O	0 10 36
Slough	51 30 20	2 56 23 O	0 11 46
South-Kilworth	52 25 51	3 26 53 O	0 13 48
Toulon	43 7 28	3 35 37 E	0 14 22
Toulouse	43 36 47	0 52 29 O	0 3 30
Viviers	44 29 14	2 20 45 E	0 9 23

OGIVE. On a beaucoup discuté sur l'époque à laquelle l'arc aigu s'est introduit dans l'architecture. *Dagincourt* reporte au neuvième siècle la première apparition de l'ogive en Europe, au onzième siècle son introduction en Angleterre et dans le Nord, et du onzième au douzième siècle son passage en France.

OR. Métal connu dès la plus haute antiquité,—d'un beau jaune, un peu rougeâtre quand il est en masse, — transparent et d'une teinte verte quand il est réduit en feuilles minces, — souvent brun quand il vient d'être précipité en poudre fine; — sans odeur ni saveur; — d'un poids spécifique qui varie de 19.26 à 19.65; — se laissant réduire en feuilles si minces que chacune d'elles n'a pas un dix-millionième de mètre d'épaisseur; — s'étirant en fils d'une excessive longueur, mais peu tenace; car un fil de 2 millimètres de diamètre rompt sous une charge de 68 kil.; — moins fusible que l'argent et le cuivre; ne s'oxydant pas quand on le chauffe à l'air.

Action des réactifs. L'or est insoluble, même lorsqu'il est très-divisé, dans les acides nitrique, hydrochlorique et sulfurique; mais il est soluble dans l'eau régale, qui le transforme en chlorure d'or ou *chlorure aurique*, lequel a la propriété de colorer en rouge la peau de l'homme.

Cette dissolution, lorsqu'elle est fort étendue, se colore en bleu par le *protosulfate de fer*, et il s'y forme un précipité d'or métallique brun. Ce précipité naît sur-le-champ, si la dissolution n'est pas très-étendue. Une dissolution de *chlorure stanneux*, à laquelle on a ajouté assez d'acide hydrochlorique pour que la liqueur soit claire, colore d'abord la dissolution très-étendue de chlorure aurique en rouge pourpre, et détermine dans la dissolution concentrée un précipité rouge pourpre foncé d'or métallique qui ne se dissout pas dans l'acide hydrochlorique libre.

Mais l'*acide oxalique* est le réactif qui convient le mieux pour séparer l'or de sa dissolution dans l'eau régale, lors même que cette dernière contient en outre du cuivre, de l'urane, du bismuth, du cadmium, du nickel, du cobalt, du zinc, du fer, du manganèse ou leurs oxydes, des terres ou des alcalis. On acidifie d'abord la liqueur par l'addition d'un peu d'acide hydrochlorique; puis, y versant la dissolution d'acide oxalique ou même d'un oxalate, il se produit d'abord une coloration noire verdâtre foncée, puis, en maintenant la dissolution à une très-douce chaleur pendant quarante-huit heures environ, l'or réduit se précipite lentement, mais assez complétement sous formes de petites lamelles jaunes. On le réunit sur un filtre; on le fait rougir faiblement au creuset de platine et on le pèse.

Ce procédé ne conviendrait pas si l'or devait être séparé de l'argent, du platine ou même de quantités considérables de plomb. Je me borne à indiquer la méthode suivante pour séparer l'or d'un alliage avec environ 15 pour cent d'argent.

Réduisez l'alliage en lame mince, — pesez, — versez dessus de l'eau régale, et chauffez le tout pendant longtemps. L'or se dissoudra complétement, et l'argent se transformera en chlorure d'argent à peu près insoluble, qui conservera la forme de la pièce sur laquelle on a opéré. On le divisera soigneusement avec un tube de verre, puis on étendra la liqueur d'une grande quantité d'eau; — on fera chauffer. Tout le chlorure d'argent se déposera; on filtrera et pèsera (page 24).

On évaporera alors la liqueur filtrée jusqu'à ce que l'acide nitrique soit dissipé; puis, traitant par l'*acide oxalique*, comme on l'a dit ci-dessus, l'or sera séparé par filtration.

On cherchera alors dans la liqueur filtrée les oxydes des autres métaux, *cuivre*, *fer*, etc., qui pourraient s'y trouver encore.

OXYDES. Les combinaisons formées par deux corps oxygénés étant soumises à l'action d'une pile voltaïque faible, se décomposent (voyez *Acides*, page 2). Celui des composants qui se rend au pôle négatif est appelé *oxyde*. S'il est soluble, il manifeste généralement des propriétés *alcalines* caractérisées par une saveur urineuse et par la faculté de ramener au bleu la teinture de tournesol rougie par un acide. On donne aussi le nom d'*oxyde* à des corps incapables de produire des combinaisons avec les acides, et qui ne présentent ni propriétés acides ni propriétés alcalines, l'*oxyde de carbone*, par exemple.

OXYGÈNE. Gaz simple, sans couleur ni odeur, pesant à la température de la glace fondante 1.1057 fois son volume d'air. — Il a été découvert par *Bayen* et par *Priestley* en 1774; — partie intégrante de l'atmosphère terrestre, où il est associé à l'azote (page 94), il détermine seul et entretient la *combustion* (p. 356). — Il est très-peu soluble dans l'eau dont il est un des principes constituants. Il se rencontre dans le plus grand nombre des matières minérales, végétales ou animales, et joue le rôle le plus important dans les combinaisons qui s'opèrent sur la terre.

Préparation. On se procure l'oxygène de la manière la plus économique, en le tirant du *peroxyde de manganèse* naturel. On délaie celui-ci dans l'eau aiguisée d'acide hydrochlorique, pour le débarrasser du carbonate de chaux auquel il est souvent mêlé; la chaux est ainsi dissoute, et l'acide carbonique n'est dégagé que lorsque toute effervescence a cessé. On introduit alors le peroxyde dans une cornue de grès, qu'il ne doit remplir qu'aux deux tiers de sa capacité. On adapte à son col un bouchon traversé par un tube de verre convenablement recourbé, et dont on engage l'extrémité sous un flacon plein d'eau et renversé sur la tablette d'une cuve. On chauffe doucement, puis jusqu'au rouge; on laisse perdre les premiers litres du gaz qui se dégage mêlé à l'air des flacons; l'on recueille les autres, et d'un kilogramme de peroxyde on retire ainsi 25 litres environ d'oxygène, que l'on renferme ensuite dans des vessies. Il reste dans la cornue un mélange de protoxyde et de peroxyde de manganèse.

Autre méthode. On peut encore introduire dans une cornue de verre 50 de peroxyde de manganèse en poudre, 30 d'acide sulfurique concentré; puis peu à peu, pour éviter un dégagement de chaleur trop brusque, 30 d'eau. On chauffe alors doucement d'abord, puis un peu plus fort. On recueille le gaz comme il a été dit ci-dessus, en laissant perdre les premières portions. Il reste dans la cornue du protosulfate de manganèse.

Troisième méthode. Mélangez 3 de *chromate* acide ou *bichromate de potasse* et 4 d'acide sulfurique ordinaire dans une grande cornue.

Chauffez modérément : il se dégagera de l'oxygène pur avec une rapidité que vous pourrez modérer. Une cornue ordinaire et une lampe suffisent pour obtenir promptement, facilement et avec économie, une assez grande quantité d'oxygène.

Enfin, on obtient encore de l'oxigène, en fondant dans une cornue de verre du *chlorate de potasse*, qui se transforme en chlorure de potassium par la fusion, et abandonne ainsi l'oxygène de l'acide et de la base.

P

PAIN *et biscuit.* 100 kilogrammes de *farine* pure pétrie avec 57 kilogrammes d'eau donnent 157 kilogrammes de pâte; qui fournit 135 kilogrammes de pain cuit. La cuisson de ces 135 kilogrammes de pain exige 108 kilogrammes de bois sec.

D'après d'autres expériences sur une très-grande échelle, faites, en 1783, par une commission de l'Académie des Sciences, et très-bien dirigées, 100 kilogrammes de *blé* donnent par la mouture à la grosse 67 kilogrammes de farine propre à faire du pain blanc + 8 kil. farine propre au pain bis.

Les 67 kil. farine donnent $87^k.864$ pain blanc ; les 8 kil. farine bise donnent $10^k.500$ pain bis.

En d'autres termes, 16 kil. farine donnent 21 kil. pain cuit; de sorte que le poids de la farine étant donné, il faut y ajouter ses $\frac{5}{16}$ pour avoir le poids du pain cuit qu'elle devra donner.

108 kil. *blé* donnent donc environ 98 kil. pain, dont les $\frac{9}{10}$ pain blanc et $\frac{1}{10}$ pain bis.

Par la mouture *économique* (p. 1170) on obtient pour 100 kil. de blé première qualité 99 kil. pain dont les $\frac{8}{10}$ en pain blanc et les $\frac{2}{10}$ en pain bis.

Prix de la mouture. D'après *Sganzin*, le prix ordinaire de la mouture pour la marine est fixé à 1 fr. 30 c. par quintal métrique de farine, et le rendement n'est calculé qu'à raison de $53^k.90$ farine par quintal de blé, ce qui paraît très-faible.

Fours à pain et à biscuit. Les fours employés à la fabrication du biscuit ont moins de montée, ou de flèche, que ceux qui servent à la fabrication du pain. Elle est de $0^m.55$ à $0^m.58$ pour les premiers, et de $0^m.65$ à $0^m.70$ pour les seconds relativement à des diamètres transversaux variables de $3^m.35$ à $5^m.52$, et à des distances depuis la bouche jusqu'au fond, variables de 4^m à $4^m.50$.

Produits et consommations. Les produits des fours sont évalués comme suit : chaque fournée de *pains* comporte 180 pains qui ont $0^m.22$ à $0^m.27$ diamètre, $0^m.08$ épaisseur moyenne, et pèsent $1^k.50$ chacun. On peut faire dans le même four jusqu'à 10 fournées en 24 heures.

Chaque fournée de *biscuit* de mer est d'environ 480 galettes pesant ensemble 80 kil. et ayant $0^m.13$ en carré et $0^m.015$ épaisseur. Il peut y avoir aussi 10 fournées en 24 heures.

Les boulangeries ont besoin de chaudières alimentées par des conduits d'eau douce. Chaque fournée de pain consomme environ 115 kil. d'eau chauffée de 40 à 50°, et chaque fournée de biscuit $42^k.50$ à la même température.

PALLADIO. Né à Vicence en 1518, mort en 1580. Il est le *prince* des architectes, si l'on ne considère l'architecture qu'au point de vue artistique.

PANTOGRAPHE. Instrument qui sert surtout à *réduire* les dessins, et dont on voit (*pl*. XCV, *fig*. 3) une assez bonne perspective que j'ai empruntée à la *topographie* de M. *Salneuve*.

Invention. Le pantographe paraît avoir été mis en pratique vers la fin du XVIe siècle, par le peintre *Georges de Dillingen*. *Christophe Scheiner*, savant jésuite, informé de ses résultats et lié avec *Georges*, qui avait refusé de lui faire connaître l'instrument, chercha à résoudre le problème du *pantographe* et y parvint de nouveau. Il appliqua même, dit-on, l'instrument à la reproduction des solides, et il en publia la description en 1631. En 1743, il recevait de *Langlois*, sous la désignation bizarre de *singe perfectionné*, les améliorations qui l'ont amené à peu près à la forme indiquée par la figure (Voyez *Machines de l'Académie des Sciences*, 1743).

Description. Il se compose essentiellement de deux règles AH, AG articulées en A (*fig*. 3 et 4, *pl*. XCV), et de deux règles plus courtes CD, DB articulées sur les premières aux points C, B, et entre elles au point D. AB, BD, DC, AC ont d'ailleurs des longueurs égales que nous désignons par l, de sorte que, quelque mouvement que l'on donne au système, ABCD forme toujours un *losange*.

En un point variable I de la longueur BD, cette règle est traversée par un axe vertical fixé dans un *plomb* qui pose sur la table à dessiner ; en un point K de AH est un *calquoir*, et en un point E de AG un *crayon*. En suivant, avec le calquoir K, les traits du modèle, le crayon E, *singeant* les mouvements de K, reproduit ces traits à une échelle qui dépend, comme on va le voir, des positions respectives du calquoir K, du pivot I et du crayon E.

Théorie. Remarquons d'abord que, le calquoir K et le pivot I ayant été disposés dans des positions quelconques, la droite KI prolongée coupera la branche AG en un point E dont la distance $BE = c$ sera *constante*, quelque variation que subissent les angles du système.

En effet, appelons p la distance BI du pivot à l'articulation B, et

k la distance AK du calquoir au sommet A ; imaginons par le point I une parallèle IO à AB$=l$, KIE étant une droite, OKI, BIE, formeront deux triangles semblables dont les côtés parallèles donneront la relation

$$\mathrm{OK : OI :: BI : BE} = \frac{\mathrm{OI \times BI}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{OI \times BI}}{\mathrm{AK - BI}}$$

$$(k-p) : l :: p : c = \frac{pl}{k-p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ainsi, OI$=l$, BI$=p$, OK$=k-p$ étant des quantités invariables, $c=$BE, qui ne dépend que de ces quantités, aura une valeur constante indépendante de la valeur des angles ; et, quelque inclinaison que prenne la droite KI par le jeu de l'instrument, cette droite passera toujours par un seul et même point E de AG, point dont la distance c à l'articulation B ne dépendra que des positions données au calquoir K et au pivot I. Le point E est la position que reçoit l'*axe* du crayon.

On voit en outre que les triangles EBI, EAK, ayant toujours leurs côtés parallèles, seront toujours semblables, quels que soient les angles des règles l et les positions de celles-ci ; d'où

$$\mathrm{KI : EI :: AB : EB} :: l : c$$

c'est-à-dire que les *distances respectives, au pivot, du calquoir et du crayon sont entre elles dans le rapport constant* $\frac{l}{c}$.

Donc, si le calquoir trace une droite KK′, le crayon tracera une droite parallèle EE′ qui sera à la première dans le rapport constant $\frac{c}{l}$. Car K′IE′ étant nécessairement une droite aussi bien que KIE, les parties de ces droites ont pour rapport constant

$$\frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{EI}} = \frac{\mathrm{K'I}}{\mathrm{E'I}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \frac{l}{c}$$

et les triangles EIE′, KIE′, ayant leurs angles en I égaux comme opposés au sommet, et les côtés qui le comprennent proportionnels, sont semblables, d'où

$$\mathrm{KK' : EE'} :: l : c$$

et toute figure décrite par le calquoir est reproduite par le crayon dans ce même rapport.

La constitution de l'instrument s'opposant à ce que le pivot I soit indéfiniment rapproché de l'articulation D, soit I′ le point le plus voisin de D où le pivot puisse être amené sur la règle BD, et P cette valeur *maximum* de BI ; cherchons la position qu'il faudrait alors donner au calquoir K pour que le crayon E, nécessairement

situé sur la droite KI′, traçât une copie *de même grandeur* que le modèle : c'est évidemment demander de faire $c = l$ dans la formule (1), ce qui donnera $K = 2P$ ou $AK = 2BI'$.

Or on peut fixer à tout jamais le calquoir dans cette position extrême, et pour les *réductions* à toute autre échelle, on n'aura plus à faire varier que les positions du pivot I et du crayon E, qui dépendent d'ailleurs l'une de l'autre, puisque K, I, E, sont toujours en ligne droite. Faisant alors M la grandeur d'une ligne du modèle, *m* celle de la ligne homologue de la copie, la formule (1) donne pour placer le pivot et le crayon les valeurs ci-dessous de *p* et de *c*, K étant constant.

$$\frac{c}{l} = \frac{m}{M}; \quad c = l\frac{m}{M}; \quad p = \frac{m}{m+M}K \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

de sorte qu'aux réductions à $\frac{m}{M}$ indiquées dans la première colonne répondent les distances *c* et *p* du crayon et du pivot à l'articulation B, marquées dans la deuxième et la troisième.

$\frac{m}{M}$	c	p	$1-\frac{m}{M}$
1.	l	$\frac{1}{2}$ K.	0
$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{3}$ K.	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3}l$	$\frac{1}{4}$ K.	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}l$	$\frac{1}{5}$ K.	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5}l$	$\frac{1}{6}$ K.	$\frac{4}{5}$
$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}l$	$\frac{3}{7}$ K.	$\frac{1}{4}$

En vertu d'un ancien et incommode usage, les artistes indiquent sur l'échelle de l'instrument les positions du crayon qui correspondent à des *diminutions* de *moitié*, des *deux tiers*, etc., etc., ce qui explique l'emploi de la quatrième colonne qui montre la concordance entre leurs indications et l'expression habituelle des rapports de grandeur des lignes. Ainsi une réduction au $\frac{1}{5}$ est pour eux une diminution des $\frac{4}{5}$.

Je n'insiste pas sur les rapports d'*agrandissement* des figures que l'on obtiendrait en mettant le calquoir à la place du crayon et réciproquement, parce que le pantographe est rarement employé dans ce but ; mais j'indique sommairement comment il faut procé-

der lorsque la grandeur du dessin à réduire exige le déplacement général de l'instrument.

On tracera avant ce déplacement deux lignes homologues AB, *ab* sur le modèle et sur la copie. — On donnera alors à l'instrument sa nouvelle position. On placera le calquoir sur A, et l'on amènera *a* de la copie sous la pointe du crayon; on déviera le crayon sans changer la position du pivot de l'instrument; on enfoncera une aiguille fine en *a*. Alors on amènera le calquoir sur B du modèle et l'on fera pivoter la copie autour de l'aiguille *a* jusqu'à ce que *b* arrive exactement sous la pointe du crayon. Il n'y a plus alors qu'à continuer la réduction.

PARABOLE (*pl.* XCVI, *fig.* 1). 1. Un point fixe F nommé *foyer* est donné ainsi que la position d'une droite YZ qu'on appelle *directrice,* la courbe M'AM, dont chaque point M est à égales distances MF = MH du foyer F et de la directrice, est une *parabole.* Cette courbe est celle que l'on obtiendrait en coupant un cône droit par un plan parallèle à l'une de ses génératrices.

2. Il résulte de la définition même de la parabole que, si, sur la perpendiculaire FV menée du foyer F à la directrice, on prend un point A à égales distances AF = VA = z de F et de V, ce point appartient à la courbe; il en est le *sommet.* La perpendiculaire FAV prolongée est prise habituellement pour l'axe des abscisses x; PM, FK, sont les ordonnées y de la courbe. La double ordonnée KK', qui passe par le foyer F, est le *paramètre p* de la parabole, et la droite FM menée du foyer à un point quelconque M de la courbe est le *rayon vecteur v* de ce point : $v=(z+x)$ par définition.

3. *Equation de la courbe.* Les x étant comptées à partir du sommet A, la propriété du triangle rectangle donne immédiatement :

$$\overline{FM}^2=\overline{FP}^2+\overline{PM}^2 \quad \text{ou} \quad v^2=(x+z)^2=(x-z)^2+y^2$$

d'où $$y^2=4xz \quad \text{et} \quad y=\pm 2\sqrt{zx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

4. Cette équation de la courbe suffit pour montrer que 1° la parabole a deux branches AM, AM' parfaitement symétriques, puisqu'à *une* valeur quelconque de x correspondent *deux* valeurs de y égales et de signes contraires; 2° ces branches sont infinies, car l'ordonnée y a toujours une valeur réelle, quelque grand que soit x positif; 3° y devenant imaginaire, lorsque l'on fait x négatif, aucun point de la courbe n'est situé du côté de la directrice par rapport au sommet A.

5. *Paramètre* p=KK'. Faisant $x=z$ dans l'équation (1), elle donne $y=\frac{1}{2}p=\pm 2z$: donc le *paramètre p* ou la double ordonnée

qui passe par le foyer F *est égal à quatre fois la distance* z *du sommet au foyer*

$$p = 4z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = \tfrac{1}{4}p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

6. *Equation au paramètre.* Mettant cette valeur à la place de z dans (1), on a pour l'*équation au paramètre*

$$y^2 = px\,;\; y = \pm\sqrt{px} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y^2}{x} = \text{paramètre} \; . \; . \; (3)$$

c'est-à-dire que *le carré de l'ordonnée d'un point est égal au produit de son abscisse par le paramètre.* Donc aussi *les carrés des ordonnées* y^2, y'^2 *de deux points* M, R, *sont entre eux comme leurs abscisses* x, x'.

7. *Tangentes, normales,* etc. Les méthodes générales exposées au mot *Courbes* (p. 429) donnent facilement pour la *tangente* TM la *sous-tangente* PT, la *normale* MI et la *sous-normale* PI au point quelconque M dont les ordonnées sont x et y, savoir :

Sous-normale $PI = 2z = \frac{1}{2}p$. . . . . (4)

8. Ainsi *la sous-normale est la même pour tous les points de la courbe, et égale à la moitié du paramètre ou à la distance du foyer à la directrice.*

Normale $MI = N = \frac{1}{2}\sqrt{p(4x+p)}$. . . . . (5)

Sous-tangente $TP = 2x$. . . . . (6)

9. *La sous-tangente est double de l'abscisse;* et AT = AP.

Tangente $TM = 2\sqrt{x(z+x)} = 2\sqrt{xv}$ . . . . . . (7)

10. Si de la sous-tangente $2x$ on retranche $FP = x - z$, il reste $FT = x + z = v$: donc la distance du point quelconque M à la directrice égale la distance du foyer au point T, où la tangente rencontre l'axe des x. Ces lignes HM, FT, étant parallèles et égales, MF et HT sont nécessairement parallèles et égales entre elles : mais $FM = v = HM$: donc HMFT est un *losange :* donc aussi ses diagonales HF, TM se coupent réciproquement à angle droit au point O en parties égales, et la direction MT de la tangente en M perpendiculaire à HF passe par le milieu de cette ligne et divise l'angle HMF en deux parties égales.

11. Les rayons lumineux hM parallèles à l'axe AI d'une parabole se réfléchissent au foyer, et ceux qui émanent du foyer F se réfléchissent parallèlement à l'axe : angle $QMh = TMF$.

12. La sous-tangente de la parabole étant $= 2x$, il en résulte, en en retranchant l'abscisse x du point M, que AT est $= x$ ou que le sommet A et le pied T de la tangente sont toujours distants de x.

13. Donc les points milieux O' de toutes les tangentes à la parabole sont tous situés sur la tangente AT' au sommet A.

14. Et si du point O', où une tangente quelconque rencontre AT', on lui élève une perpendiculaire O'F, elle passera par le foyer F.

15. *Rayon de courbure* ρ. Comme pour les autres sections coniques, il est le quotient du cube de la normale N par le carré du demi-paramètre.

$$\rho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4x+p)^3}{p}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Faisant $x=0$, on trouve $\frac{1}{2}p=2z$ pour le rayon de courbure au sommet A de la courbe.

16. *Equation polaire.* θ étant l'angle IFM compté de FI, et formé par l'axe des x avec le rayon vecteur $v=$ FM du point M, on a

$$FP=(x-z)=v\cos.\theta=v-2z$$

$$v=\frac{2z}{1-\cos.\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

17. *Longueur* s *de l'arc parabolique* AM. On a

$$ds=\sqrt{dy^2+dx^2}=dx\sqrt{1+\frac{z}{x}}$$

expression qui, intégrée de o à x, donne

$$s=\text{arc AM}=\sqrt{x^2+zx}+z\,\text{log.hyp.}\left[\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{x}{z}+1}\right] (10)$$

Un arc quelconque RM s'obtiendra ensuite par différence

arc RM = arc AM — arc AR

18. *Aire* A *de l'espace parabolique* AMM' (p. 434). On a AMM' = 2 APM.

$$APM=\int_0^x ydx=\int_0^x dx\sqrt{px}=\frac{2x\sqrt{px}}{3}=\frac{2}{3}xy. \quad . \quad (11)$$

$$AMM'=\frac{4}{3}xy=\frac{2}{3}x.2y. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

de sorte que *les espaces paraboliques* APM, AMM' *terminés par des perpendiculaires à l'axe sont chacun les* $\frac{2}{3}$ *des rectangles qui leur seraient circonscrits.*

19. *Volume* V *du paraboloïde* engendré par la révolution de l'arc

AM autour de AP. On l'obtiendra en multipliant l'aire APM par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette aire, centre situé (p. 243) à une distance de l'axe des $x = \frac{3}{8}y$, il vient donc

$$V = \frac{1}{2}\pi y^2 x$$

c'est *la moitié du volume du cylindre de même base* πy^2 *et de même hauteur* x.

Le tronc de paraboloïde s'obtiendra facilement par différence

20. Tracés. La parabole se trace par *points*, les tracés *continus* manquant de précision. 1° Le paramètre p étant connu, on prend des x croissantes par différences égales; on élève par leurs extrémités des ordonnées y doubles et indéfinies : l'équation (3) donne les longueurs des ordonnées correspondantes à chaque valeur de x. On fait passer une courbe par leurs extrémités, soit à la règle, soit au *pistolet*.

21. Le lieu A du sommet étant fixé ainsi que la direction de l'axe des x TVI qui passe par A, on fait AF $=$ AV $= z = \frac{1}{4}p$; ce qui donne le foyer F et la position de la directrice perpendiculaire à TVI, lorsqu'on connaît z ou p. Par des points quelconques de l'axe des x, on élève des ordonnées indéfinies MM'; puis, du foyer F comme centre et avec un rayon $(x+z) =$ VP $=$ distance de leurs pieds à la directrice, on recoupe chaque ordonnée positive et négative par un petit arc de cercle qui limite leur longueur (2)

22. *Dans les arts*, le tracé suivant donne la parabole avec une approximation très-grande (*pl.* XCV, *fig.* 6). On suppose connues la plus grande ordonnée $=$ CB et la plus grande abscisse $=$ CV; sur le double AB de la première, on construit un triangle isoscèle ADB d'une hauteur DC $=$ 2CV; on divise chacun de ses côtés DA, DB en un même nombre de parties égales, *seize* par exemple; on numérote l'un des côtés de haut en bas, et l'autre de bas en haut, comme l'indique la figure, où l'on n'a adopté toutefois que huit divisions. Il ne reste plus qu'à tirer des droites par les points de division de même numéro. Avec seize divisions, le *polygone parabolique* se confondrait à l'œil avec la parabole.

23. *Tangentes. Par un point donné* M *sur la courbe, mener une tangente à la parabole* (*fig.* 1, *pl.* XCVI). Menez MH perpendiculaire à la directrice ou à l'ordonnée MP, et alors égale au rayon vecteur FM du point, joignez HF; le milieu O de cette ligne étant sur la tangente (10), tirez MOT.

24. *Ou, mieux encore*, marquez le pied P de l'ordonnée du point donné M; faites AT $=$ AP $= x$, et menez MT (9).

25. *D'un point extérieur, mener des tangentes à la parabole.* Si le point extérieur T est sur l'axe des x, faites AP $=$ AT, menez la

double ordonnée PMM′ qui déterminera les points de tangence M, M′ ; menez TM, TM′.

26. *Si le point extérieur Z est en dehors de l'axe* (*fig.* 2, *pl.* XCVI), du point Z comme centre avec un rayon ZF égal à sa distance au foyer, décrivez un cercle qui coupera la directrice en deux points *i* et *o*. Par ces points, menez des parallèles à l'axe AF : les points *t*, *t′*, où ces parallèles rencontrent la courbe, appartiennent aux tangentes *zt*, *zt′*.

27. *Mener une tangente parallèle à une droite donnée* XY (*pl.* XCVI, *fig.* 3). Abaissez du foyer F une perpendiculaire à la droite donnée XY, et prolongez cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre R avec la directrice ; menez R*t* parallèle à AF ; *t* est le point de contact de la tangente cherchée : il suffira donc de mener par le point *t* une parallèle *t*T à la droite XY.

28. *Rayon et centre de courbure.* Voyez le procédé graphique applicable aux trois sections coniques, indiqué page 615.

PARACHUTE. Appareil fort semblable à un vaste parapluie, à l'aide duquel les aéronautes peuvent descendre sans danger des hautes régions de l'atmosphère, et que plus d'un prisonnier a su mettre à profit pour se soustraire à la captivité.

Garnerin est le premier qui (en 1802) ait osé se lancer dans l'espace sous la protection d'un parachute ; et cette audacieuse expérience eut un succès complet.

Le parachute a de 4 à 5 mètres de rayon. Il se compose ordinairement de trente-six fuseaux de taffetas cousus ensemble et réunis vers le centre autour d'une rondelle de bois. A cette rondelle sont fixées les cordes qui portent la nacelle d'osier du navigateur. Trente-six petites cordes rayonnent de la rondelle centrale et soutiennent les coutures des fuseaux de taffetas ; elles se réunissent d'abord deux à deux en pointe, et vont se nouer ainsi à dix-huit ficelles attachées à la nacelle. Ce système a pour but de s'opposer au *retournement* du parapluie sous l'effort de l'air pendant la descente. Un cercle en bois léger de $1^{m}.50$ de rayon concentrique au parachute le maintient un peu ouvert pour en aider le développement. La distance de la nacelle à la rondelle centrale est d'environ 10 mètres.

On a proposé, pour diminuer les oscillations du système, de remplacer la rondelle centrale par une cheminée de 1 mètre de hauteur, qui permet à l'air de s'échapper rapidement et donne comme un *axe* au mouvement vertical ; mais je crois que l'on s'est borné à percer la rondelle.

Mouvement du parachute. Le mouvement du parachute serait facilement déterminé si l'on connaissait bien la loi de la résistance de l'air à son mouvement de descente ; soient en effet

P le poids du parachute, de la nacelle et de l'aéronaute ;
R la résistance en kilogrammes qui s'oppose à sa descente ;

La force accélératrice (P — R) étant à chaque instant égale à la force d'inertie du système, on a l'équation fondamentale (p. 785)

$$(P-R)=\frac{P}{g}\frac{dv}{dt};\quad \frac{dv}{dt}=\frac{(P-R)g}{P}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

On en déduit

$$v=\frac{(P-R)}{P}gt \quad \text{et} \quad t=\frac{Pv}{g(P-R)}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

de sorte que si la résistance de l'air R était constante aussi bien que le poids P, la vitesse v augmenterait sans cesse avec le temps t ; et il faudrait à la fois que, dès l'origine du mouvement, R fût très-peu différent de P, et que, en même temps, la durée t du mouvement fût assez courte, pour que le parachute conservât quelque efficacité.

Mais, bien que la résistance de l'air ne nous soit qu'imparfaitement connue, on sait du moins qu'elle croît beaucoup plus rapidement que la vitesse. Le terme (P — R) diminuera donc de plus en plus ; et dès lors il viendra un moment où l'*accélération* $\frac{dv}{dt}$ deviendra elle-même *presque* nulle. Nous disons *presque*, car $(P-R)=0$ donnerait à t une valeur infinie ; de sorte que la vitesse du mouvement ne cesse de s'accélérer, ou ce mouvement ne devient uniforme, qu'au bout d'un temps *infini*.

Cependant R prend en peu de temps une valeur si grande par rapport à P que l'accélération $\varphi=\frac{dv}{dt}$ peut être considérée comme sensiblement nulle à partir de cet instant.

A étant la projection horizontale du parachute ;
p' le poids du mètre cube d'air à la pression 0.76 et à la température moyenne $=10°$; $p'=1^k.214$ environ ;
p le poids du mètre cube d'air au moment de l'expérience ;
V la vitesse de descente ;

on a, d'après les expériences de M. *Didion*, sur un parapluie de $1^m.27$ de diamètre, A étant $=1^{mm}.2$ seulement, et aussi longtemps que le mouvement n'est pas parvenu à l'uniformité,

$$R=\frac{p}{p'}A\,(0.07+0.163\,v^2+0.142\,\varphi). \quad . \quad . \quad (3)$$

Lorsque le mouvement est devenu sensiblement uniforme, et pourvu que la vitesse v ne dépasse pas 8 mètres, on a, d'après MM. *Didion*, *Piobert* et *Morin*,

$$R = 1.936\,\frac{p}{p'}\,A\,(0.036 + 0.084\,v^2) = \frac{p}{p'}\,A\,(0.07 + 0.163\,v^2) \quad (4)$$

Enfin, lorsque le parapluie tombe à l'envers, sa concavité tournée vers le haut

$$R' = 0.768\,\frac{p}{p'}\,A(0.036 + 0.084\,v^2) = \frac{p}{p'}\,A(0.028 + 0.0652\,v^2) \quad (5)$$

soit à peu près les 0.4 de la résistance éprouvée lorsque la concavité est tournée en dessous.

Si l'on fait $\frac{p}{p'} = 1$ dans la formule (4), la condition $(P - R) = 0$ donne

$$V = \sqrt{\frac{P}{0.163\,A} - 0.4294} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

valeur de la vitesse limite V, qui permettra de régler le poids P et la projection A du parachute avec assez d'approximation.

PARALLAXE (*pl.* XCV, *fig.* 5). C'est l'angle p=OL'C sous lequel, d'un astre L', on verrait le rayon terrestre OC mené du centre C à la position O occupée par l'observateur terrestre, qui prend la hauteur AOL' ou la distance zénithale apparente ZOL' de cet astre.

Si l'astre est à l'horizon, en L par exemple, la parallaxe P=OLC est dite *horizontale;* et, comme les rayons terrestres menés aux pôles et à l'équateur sont inégaux, on distingue encore la *parallaxe horizontale équatoriale* qui correspond évidemment à la position d'un observateur qui, étant sous l'équateur, verrait l'astre sur son horizon.

C'est cette dernière parallaxe qui est donnée dans toutes les éphémérides et dans la *Connaissance des temps* en particulier. Il est clair que lorsqu'il est permis de supposer la terre sphérique, la parallaxe équatoriale et la parallaxe horizontale ont la même valeur pour un même astre, toutes choses égales d'ailleurs.

La *parallaxe* horizontale *du soleil* est d'environ 8 secondes, 8".5776 d'après *Encke,* 8".8 d'après la *Connaissance des temps.* Les ingénieurs, dans les opérations dont ils sont chargés, peuvent la regarder comme constante (p. 69).

La *parallaxe de la lune* est d'environ 1 degré. Elle dépend naturellement de la distance de l'astre et varie de 53'48" à 61'24"; elle est de 57'36" à la distance moyenne (p. 82). Celle des étoiles est *infiniment petite;* on n'a jamais à en tenir compte (p. 87).

La notion que nous venons de donner de la parallaxe montre suffisamment que cet angle n'aurait point la même valeur, par rapport à un même astre, pour deux observateurs, dont l'un occu-

perait la station O et l'autre la station O'; et dès lors ils attribueraient à l'astre, vu de leurs stations respectives, des situations différentes. Or, les éphémérides étant destinées à servir en tous lieux, on a dû y supposer que l'observateur occupait une station déterminée, et celle qu'on a choisie est le centre même de la terre ou C.

On voit ainsi comment la parallaxe affecte la hauteur vraie d'un astre. L' étant cet astre, l'observateur O, qui le voit de la surface, lui attribue une hauteur AOL'; vu du centre C, la hauteur deviendrait $ECL' = LAL' = LAM + p$, en faisant AM parallèle à OL'.

Tenant compte de la *réfraction* (p. 1075), dont l'influence est contraire à celle de la parallaxe, on a donc en général

Hauteur géocentrique. } = haut. observée + parallaxe — réfraction.

Distance zénithale géocentrique } = distance zénithale observée — parallaxe + réfraction.

Il nous reste à trouver la parallaxe de hauteur $p = L'AM$ en fonction de la parallaxe horizontale donnée par les tables.

D étant la distance CL' de l'astre au centre de la terre, dont $OC = R$ est le rayon, h la hauteur AOL' de l'astre L' ou z sa distance zénithale ZOL', observées de O à la surface terrestre, le triangle L'OC donne

$$\frac{\sin. p}{\cos. h} = \frac{R}{D} \quad \text{ou sensiblement} \quad p = \frac{R}{D} \cos. h$$

Lorsque l'astre est à l'horizon, le second membre se réduit à $\frac{R}{D}$; c'est la valeur de la *parallaxe horizontale* P. On a donc en général

$$p = P \cos. h = P \sin. z$$

p et P étant l'un et l'autre exprimés, soit en minutes, soit en secondes : ainsi

La parallaxe de hauteur = parallaxe horizontale × cosinus de la hauteur apparente = parallaxe horizontale × sinus de la distance zénithale. La parallaxe est donc nulle lorsque l'astre est au zénith.

Soient la distance zénithale de la lune corrigée de la réfraction $= 77° 45' 36''.5 = Z$, et P donnée par les éphémérides $= 59' 33''.2$, on a

log. sin. Z	9.9900140	Z =	77° 45′ 36″.5
log. P en secondes	3.5530573		
log. p en secondes	3.5430713	p =	0° 58′ 12″
Distance zénithale géocentrique		=	76° 47′ 24″.5

On rappelle que la première partie des tables de *Callet*, celle qui

donne les *logarithmes des nombres*, fournit immédiatement les logarithmes des arcs *en secondes*, et, réciproquement, les arcs en secondes qui correspondent à un logarithme donné. Chaque page de cette partie offre, à la gauche des nombres, deux colonnes où sont indiqués les arcs qui, réduits en secondes, produisent ces nombres. Le logarithme de ce nombre est celui du nombre de secondes de l'arc ; sa caractéristique est 3, si l'arc se trouve dans la première colonne, et 4 s'il est dans la seconde.

PARALLÉLISME DES TRANCHES. *Hypothèse* imaginée dans le but de faciliter la mise en équation des problèmes relatifs au mouvement des fluides. Elle consiste à admettre que toutes les molécules qui traversent une même *tranche* perpendiculaire à la direction du mouvement de la masse fluide y sont animées de vitesses égales et *parallèles*. Admettre cette hypothèse, c'est admettre en même temps que la pression dans le sens du mouvement est la même pour chaque élément superficiel et égal d'une tranche. Ainsi, lorsqu'un liquide s'écoule d'un vase par un orifice horizontal, on considère la masse liquide comme partagée en tranches planes parallèles infiniment minces, d'égal volume. On regarde les molécules liquides d'une même tranche comme ayant toutes la même vitesse verticale ; et on attribue à chaque tranche la faculté de se resserrer et de s'élargir, tout en conservant son volume, suivant que l'exigent les variations des sections horizontales du vase. Il en résulte que les vitesses sont ainsi en raison inverse des sections du vase ; hypothèse fausse en elle-même, qui a cependant conduit parfois à des résultats assez approximatifs lorsqu'elle a été appliquée avec mesure et discernement à certaines circonstances du mouvement toujours si compliqué des fluides. *Daniel Bernouilli* est, je crois, l'inventeur du *parallélisme des tranches* (année 1738).

PARALLÉLOGRAMME DE WATT (*pl.* XCVII, *fig.* 1), appelé en France parallélogramme *articulé* par tous ceux qui se plaisent à plonger dans l'oubli les noms des inventeurs. Le parallélogramme articulé a été imaginé et appliqué par *Watt* dès 1784; et, bien que cet organe important ait une certaine analogie avec le *pantographe* (page 1228), nul avant *Watt* ne paraît avoir songé à tirer parti de ce système flexible pour changer le mouvement circulaire du balancier AB en un mouvement rectiligne au point *f*, ou du moins sensiblement rectiligne.

Nous avons donné (page 140), à l'article *Bielle*, une théorie générale et suffisamment exacte du mouvement de ces systèmes, d'après M. *Willis*. Nous ne la reprenons ici que pour en montrer l'application et justifier le *tracé* que nous indiquons ci-dessous. Nous conservons les lettres et notations de la page 140.

Tracé général du parallélogramme de Watt. AB est la longueur L

du demi-balancier ou plutôt la distance des axes des tourillons des *figures* 1 et 2 de la *planche* XVIII. Il décrit au-dessus et au-dessous de sa position moyenne des angles $BAb = Bab' = \theta$. On donne habituellement au demi-balancier AB une longueur $L = AB$ entre les tourillons, telle que le sinus $b'n$ de l'arc Bb' soit égal à la demi-levée ρ, ou demi-course verticale du point f, course qu'il s'agit de maintenir sur la verticale BE.

Nous avons démontré (page 140) qu'en articulant deux tringles $bf = ed$ en des points b, e de l'axe de figure du demi-balancier, puis reliant f et d par une autre tige articulée fd parallèle et égale à $be = R_1$, on obtenait un mouvement très-sensiblement vertical du point f par les conditions suivantes : 1° prendre un point fixe sur une horizontale CM placée au-dessous du centre de rotation A d'une quantité $AM = ed = bf$; 2° articuler à l'angle d intérieur une bride Cd ayant son centre de rotation sur l'horizontale CM et une longueur $r = \frac{R^2}{R_1}$; Ae étant $= R$.

Watt donnait à son demi-balancier AB une longueur $L = 3.09255$, ou un peu plus de trois fois la demi-course, ce qui fixait la plus grande valeur de θ à 18°52′, soit, en nombre rond, 19°. En outre, il faisait $be = Ae$ ou $R_1 = R$, ce qui donnait simplement $r = R = R_1$; enfin, il a souvent pris $ed = bf = \rho$, d'où $AM = \rho$. Avec ces conditions, le tracé se simplifie et devient le suivant.

Tracé. Du rayon horizontal $AB = 3.0925 \times$ demi-course verticale ρ du point f, décrivez du centre de rotation A un arc de cercle indéfini. Faites la perpendiculaire $AM = \rho$; par M menez une parallèle à AB qui limitera en b l'amplitude de l'arc $bb' = 2Bb$ décrit par le point B. Tirez Ab' et Ab; prenez sur Ab les distances égales $Ae = eb = R = R_1$. Du point b avec le rayon ρ recoupez la verticale de B en f, et achevez le parallélogramme $befd$. Enfin du point d, comme centre avec le rayon $r = R = R_1 = be$, recoupez CM en C; ce point est le centre de rotation de la bride $Cd = r$.

On préfère quelquefois que le point f se meuve sur la verticale qui passe par le milieu v du sinus verse Bn de l'arc 2θ. C'est alors cette dernière verticale que l'on recoupe du centre b et du rayon ρ. Le tracé s'achève ensuite par le même procédé que ci-dessus (Voir la *planche* XVIII).

Le tracé du parallélogramme des bateaux à vapeur s'obtiendra facilement d'après ce qu'on a dit page 141.

PARATONNERRE. Appareil indiqué par *B. Franklin*, dans le but de préserver les édifices des effets de la foudre, et réalisé par *Dalibard* à Marly-la-Ville, le 10 mai 1752 (Voyez *Œuvres de Franklin*, tome 1er, p. 62 et 105).

Il se compose de deux pièces principales, savoir : 1° une *tige*

métallique de plusieurs mètres de hauteur, fixée verticalement au point culminant de l'édifice ; 2° un système flexible de barres, ou mieux un câble de fils *métalliques*, appelé *conducteur*, dont une extrémité est invariablement attachée au pied de la tige et dont l'autre va se perdre dans un sol humide, un puits, une nappe d'eau.

La *tige* reçoit habituellement une hauteur à peu près égale à la moitié du rayon de l'espace horizontal à protéger ; elle est en fer carré de 0.05 à 0.06 de côté vers sa base et s'amincit en forme de pyramide en montant. Vers le sommet et sur une longueur de 0m.50, le fer est souvent remplacé par une tige conique en laiton réunie à la tige en fer au moyen d'un goujon en fer qui entre à vis dans l'une et l'autre tige, et est maintenu par des goupilles en fer, enfin, l'extrémité du paratonnerre est aujourd'hui terminée par une pointe en *platine* d'environ 0m.05 de longueur, ce métal étant à la fois moins altérable sous l'action de l'eau et de l'air, et beaucoup moins fusible que le fer ou le cuivre.

L'*aiguille de platine* doit être extrêmement aiguë. On la soude à la tige de laiton à la soudure d'argent, et l'on enveloppe en outre la jonction avec un petit manchon de cuivre.

La base de la tige est garnie d'une *embase* destinée à rejeter l'eau de pluie. Immédiatement au-dessus de cette *embase* la tige est arrondie sur une étendue d'environ 0m.05 qu'embrasse étroitement un collier brisé à charnières portant des oreilles entre lesquelles on serre l'extrémité supérieure du *conducteur* au moyen d'un boulon. Toutes ces pièces sont en fer.

La tige du paratonnerre se fixe sur les toits de diverses manières : — 1° au-dessus d'une ferme ; on perce le faîtage et on l'assujettit contre le poinçon au moyen de plusieurs brides en fer ; — 2° sur le faîte : on le perce d'un trou carré de même dimension que la tige. Par-dessus et en dessous on fixe, avec quatre boulons, deux plaques de fer de 0m.02 d'épaisseur, percées chacune d'un trou correspondant. La tige s'appuie par un petit collet sur la plaque supérieure ; elle est fortement serrée contre la plaque inférieure par un écrou qui se visse sur son extrémité ; —3° sur une voûte : on termine la tige par trois ou quatre *empattements* scellés dans la pierre avec du plomb.

Les tiges doivent être placées sur les points culminants de l'édifice.

Le conducteur est une corde métallique d'environ 0m.02 diamètre ; elle se compose de quatre torons de quinze fils chacun, de fer ou de cuivre. Chaque toron est goudronné séparément, et la corde l'est de nouveau avec beaucoup de soin. Cependant, d'après M. *Arago*, le conducteur ne doit pas recevoir de goudron dans les parties destinées à plonger dans le sol humide, parties dont les surfaces métalliques doivent être laissées à nu autant que possible. Afin de prévenir l'oxydation de ces parties souterraines, on les fait courir

dans des augets en briques remplis de *braise de boulanger* et non de charbon ordinaire, de manière qu'elles aient une enveloppe de *braise* de $0^m.04$ à $0^m.05$ d'épaisseur.

Le conducteur doit se rendre, de préférence, à une *nappe d'eau naturelle*, à un étang, à un puits, et y plonger d'environ un mètre pendant les basses eaux. Une citerne dallée et bétonnée dont le masticage pourrait s'opposer à la libre transmission du fluide ne peut être considérée comme une nappe d'eau *naturelle*. Si l'on n'a point une telle nappe d'eau dans le voisinage, le conducteur doit au moins plonger dans un sol très-humide ou rendu tel par la direction que l'on donnera aux eaux pluviales. Il est bon, dans tous les cas, de le mettre en communication avec les matières métalliques souterraines, telles que tuyaux de conduite en fonte ou en plomb.

Moins le sol sera humide, plus les parties souterraines du conducteur devront recevoir de développement, tant dans le sens horizontal qu'en profondeur, et son extrémité divisée en plusieurs racines plongera finalement dans un amas de *braise* bien damée.

Le chemin que suit le conducteur depuis le pied de la tige jusqu'au sol doit être le plus court possible; et il importe d'éviter dans ce trajet les angles aigus et, en général, les changements brusques de direction; car « il semble que, dans le calcul de la marche « de la matière fulminante, l'on ne puisse pas faire totalement abs- « traction de la force d'inertie. »

Enfin, il convient de mettre toutes les pièces métalliques de l'édifice en communication entre elles par des tringles de fer, de cuivre, ou par des bandes de plomb, de zinc, et tout ce système lui-même en communication *métallique* avec le conducteur : car « c'est une « propriété de la matière fulminante de se porter en grande quan- « tité sur les métaux, même à travers les masses de pierres dont ils « pourraient être recouverts. »

La plus parfaite *continuité* doit régner depuis la pointe du paratonnerre jusqu'à l'extrémité inférieure et souterraine du conducteur.

Si l'édifice porte plusieurs paratonnerres, chacun d'eux doit avoir son conducteur ; ce qui n'empêche pas qu'il y ait utilité à établir une liaison intime entre les pieds des tiges de tous les paratonnerres à l'aide de barres de fer courant le long des faîtières des toits, et qui n'ont pas besoin d'être aussi fortes que les conducteurs proprement dits. Il sera toujours avantageux d'étendre le même genre de communication aux grosses pièces métalliques qui font partie des toits ou balustrades des édifices, et surtout aux couvertures métalliques dont l'usage est si commun aujourd'hui.

Pointes multiples. On avait proposé de terminer supérieurement la tige des paratonnerres par un certain nombre de pointes diver-

gentes rayonnant vers plusieurs points de l'espace. « Tant que l'on « n'aura pas prouvé, par des expériences, qu'une pointe unique « agit toujours plus fortement qu'un groupe de pointes disposées en « étoile, on n'aura pas le droit de ranger les paratonnerres à pointes « multiples parmi les conceptions qui ne méritent que le dédain. « Je conviendrai néanmoins que, en attendant ces expériences, il « sera sage et très-suffisant de s'en tenir à la forme recommandée « dès l'origine par *Franklin.* » (M. *Arago.*)

Quant aux paratonnerres dirigés obliquement, ils ont aussi leur utilité.

Rayon d'action des paratonnerres. D'après M. *Arago*, on est autorisé à porter l'amplitude de l'action préservatrice des paratonnerres implantés sur les parties culminantes des édifices au double de la hauteur des tiges au-dessus de leur point d'attache; de sorte que le nombre des tiges à placer sur un comble sera suffisant lorsqu'il n'y aura aucun point du comble dont la distance horizontale à la tige la plus voisine soit plus grande que le double de la hauteur de cette tige au-dessus de sa base.

L'efficacité des paratonnerres est-elle constatée? Parmi les *faits* nombreux et intéressants cités par M. *Arago* en réponse à cette question, je me borne à résumer les suivants :

L'église du château d'Orsini, en Carinthie, était frappée de la foudre quatre ou cinq fois chaque année. Un paratonnerre y est établi en 1778; et, depuis cette année jusqu'en 1783, elle ne reçoit qu'un seul coup de foudre qui fond la pointe de son paratonnerre sans produire d'autre accident.

Depuis l'époque de sa construction, l'église de *Saint-Michel*, à *Charlestown*, était visitée et endommagée par la foudre chaque deux ou trois ans. On se décide à l'armer d'un paratonnerre, et elle n'est pas frappée une seule fois durant la période de 14 ans qui suit son établissement.

En 1772, *Toaldo* imprimait que le château royal de Turin, le *Valentino*, n'était plus frappé de la foudre depuis que *Beccaria* avait armé ses principaux pavillons de paratonnerres. Il était souvent ravagé avant cette époque.

Le clocher de *Saint-Marc*, à *Venise*, était souvent et rudement foudroyé; on n'a pas connaissance qu'il l'ait été depuis 1776, époque où il fut armé d'un paratonnerre.

La tour de *Sienne*, souvent foudroyée et endommagée par la foudre, a été munie d'un paratonnerre en 1777. Elle reçut une nouvelle décharge le 18 avril de cette même année, après la pose de l'appareil ; mais la foudre ne produisit aucun dégât.

Il y a, dans le *Devonshire*, six églises dont les clochers sont élevés. Toutes les six ont été frappées de la foudre dans l'espace de

quelques années. Une *seule* l'a été sans éprouver de dommages : c'est aussi la *seule* qui soit armée d'un paratonnerre.

Le 12 juillet 1770, la foudre tombe simultanément à *Philadelphie* sur un *sloop* et sur trois maisons. L'une d'elles est armée d'un paratonnerre; la pointe en est fondue sur une assez grande longueur, sans plus de dégât. Les deux autres maisons et le *sloop* sont fortement endommagés.

Au mois de juin 1813, à *Port-Royal, Jamaïque,* le vaisseau le *Norge* et un navire marchand sont frappés de la foudre au milieu d'un grand nombre d'autres bâtiments armés de paratonnerres qui ne sont pas atteints. Le *Norge* et le navire marchand seuls en étaient privés parmi ceux qui les entouraient.

En janvier 1814, le tonnerre tombe dans le port de *Plymouth* : un seul vaisseau, le *Milford* est frappé, et c'est aussi le seul qui n'est pas armé d'un paratonnerre.

En janvier 1830, dans le canal de Corfou, trois coups de foudre terribles atteignent le paratonnerre du vaisseau anglais l'*Etna*. Ce bâtiment n'éprouve aucun dommage. Les vaisseaux sans paratonnerres, le *Madagascar* et le *Mosqueto*, placés non loin de l'*Etna* sont également frappés et la foudre y cause des dégâts considérables.

Les bâtiments armés de paratonnerres ne sont-ils jamais foudroyés? Nous venons de voir que des bâtiments armés de paratonnerres *avaient* été foudroyés, mais sans dégâts. Voici quelques autres *faits* empruntés en partie à la même notice, et qui expliquent de diverses manières l'irruption de la foudre sur des bâtiments protégés

Le 17 juin 1774, la foudre tombe à *Tenterden* (*Kent*) sur une des quatre cheminées de la maison de M. *Haffenden,* quoique l'une d'elles soit surmontée d'un paratonnerre; mais la cheminée foudroyée est à une distance de 15 mètres du paratonnerre, et la pointe de celui-ci ne dépasse que de 1m.50 le niveau de la cheminée foudroyée.

Le fait suivant est d'une explication plus difficile, et les adversaires des paratonnerres, ceux qu'on appelle les *dissidents,* le considèreront peut-être comme un démenti donné par la foudre elle-même à l'illustre inventeur. Le 15 mai 1777, la foudre frappe le magasin à poudre de *Purfleet,* à cinq lieues de Londres, malgré le paratonnerre que *Franklin, Cavendish, Watson,* etc., y avaient fait établir. Les dégâts sont peu importants. Le coup de foudre atteint un point du bâtiment situé à une distance du pied du paratonnerre *moindre que sa hauteur; mais la pointe de la tige n'était pas bien aiguë.*

Le 17 juin 1781, un violent coup de foudre atteint la maison des pauvres de *Heckingham* (*Norfolk*), malgré les *huit* paratonnerres

dont elle est armée ; mais le point frappé d'abord est à 16m.50 du paratonnerre le plus voisin et à 6m.60 seulement en contre-bas de sa pointe. Une large plaque de plomb recouvrait ce point; de plus les conducteurs ne se terminaient pas dans un sol suffisamment humide.

Le 22 juin 1808, la foudre tombe sur le paratonnerre du château de *Knonau*, près *Zurich*. Le premier coup de foudre est suivi presque immédiatement d'un autre qui frappe, à quelques pas du château, la maison de M. *Walder*, munie également d'un paratonnerre, y tue deux enfants et en renverse trois autres.

Le *Journal des Débats* du 3 février 1815, citant le *Mercure du Rhin*, annonce que le clocher de *Cologne*, qui a été frappé de la foudre et qui est devenu la proie des flammes, était armé de *deux* paratonnerres.

Le 4 janvier 1827, la foudre tombe sur le paratonnerre du phare de *Gênes*. Ce paratonnerre et le conducteur sont brisés en plusieurs points, quoique tout semblât en bon état, quoique le conducteur plongeât dans l'eau ; mais « l'eau était contenue dans une *citerne* « *étanche* de peu de capacité, creusée de main d'homme dans la « *roche* sur laquelle le phare repose. »

Le 23 février 1829, le magasin à poudre de *Bayonne* est foudroyé malgré son paratonnerre de 6m.80 d'élévation dont la pointe fond sur une longueur de 0m.013; mais le conducteur arrivé à 0m.80 près du sol, courait horizontalement à l'air libre, soutenu par cinq poteaux en bois, mauvais conducteurs. Il se terminait en plongeant dans le charbon ordinaire (non de la braise) et ne plongeait que de 2 mètres.

Le 9 juin 1829, la foudre tombe sur la principale aiguille de la cathédrale de *Milan*, aiguille armée d'un paratonnerre en bon état dont le conducteur plongeait dans un vaste *puisard;* mais vérification faite par le professeur *Configliachi*, il fut constaté que le prétendu puisard était une *citerne dallée*.

Le 18 avril 1830, la frégate anglaise la *Junon*, faisant route pour l'Inde, est foudroyée à peu de distance des Canaries, malgré son paratonnerre en bon état. La foudre semble abandonner le conducteur et se jette à babord, tandis que l'extrémité de celui-ci plonge à tribord. On conjecture qu'à cet instant le roulis avait soulevé l'extrémité inférieure du conducteur au-dessus de la mer. Toutefois, l'explication pourra paraître insuffisante, si, suivant l'usage, l'extrémité inférieure du conducteur était réunie à une plaque de métal communiquant *sans discontinuité* avec le doublage en cuivre du navire.

En 1842, si ma mémoire est fidèle, le paratonnerre de la cathédrale de Strasbourg est foudroyé, et je crois me rappeler que le

gardien et sa famille furent tués ou gravement blessés, à 140 mètres au-dessous de la tige.

J'ai essayé de résumer ici, tant d'après l'intéressante notice de M. *Arago*, que d'après l'*Instruction* publiée par l'Académie des Sciences, les conditions d'établissement des paratonnerres, en laissant de côté toutes les considérations théoriques. Je renvoie au premier de ces deux mémoires surtout, les ingénieurs à qui je n'aurais pas inspiré assez de foi dans l'utilité et l'efficacité de ces curieux appareils, ne me sentant pas moi-même animé de cette foi vive et sincère qui, seule, sait convaincre et convertir.

PARPAING. Toute pierre à deux parements parallèles qui, par sa largeur, fait seule l'épaisseur d'un mur.

PASCAL (*Blaise*). Né à Clermont (Auvergne), le 16 juin 1623, mort le 19 août 1662.

PEINTURE. Il y a économie à peindre les bois (secs) et les ferrures, les roues hydrauliques, par exemple; et l'industrie particulière peut alors employer avec avantage les couleurs et les procédés mis en usage par l'artillerie pour la peinture de ses attirails.

C'est avec l'huile de lin, moins chère que l'huile de noix, que l'on prépare les couleurs.

Pour rendre cette huile plus siccative, on la fait bouillir à petit feu égal jusqu'à ce que *l'écume ait disparu*, en y tenant suspendu dans un linge pour 102.50 d'huile crue, 3.15 de couperose blanche (sulfate de zinc) + 6.30 de litharge rouge. L'opération dure environ quatre heures. La litharge et la couperose forment alors une sorte de pierre qu'on peut mêler encore dans les couleurs pour les faire sécher plus promptement : c'est ce qu'on appelle du siccatif ou dessicatif.

Les proportions suivantes se rapportent toujours à 100 de matière ou de couleur, en poids :

Dessicatif = 60 du mélange de litharge et de couperose, broyé et rendu liquide, avec 56 essence de térébenthine + 2 huile cuite.

Mastic pour boucher les trous et les fentes du bois : 81.6 blanc d'Espagne en poudre + 20.4 huile cuite formant une pâte dure.

Couleurs en pâté. Le *noir :* prenez 28.4 noir de fumée + 74 huile cuite + 1.60 essence de térébenthine. Formez une pâte dans un seau de fer-blanc et broyez par petites quantités avec la molette.

Olive en pâté : 68 ocre jaune en poudre + 1.10 noir de fumée + 37 huile cuite + 0.4 essence de térébenthine. Formez une pâte épaisse avec l'ocre et l'huile dans un seau de fer-blanc, et avec le noir de fumée dans un autre. Broyez-les ensemble par petites parties et conservez dans le fer-blanc.

Dans ces deux préparations, l'essence de térébenthine ne sert qu'à nettoyer la pierre à broyer.

Couleurs délayées. Le *blanc* = 81 blanc de céruse broyé sur la pierre avec l'huile + 21 huile cuite + 0.5 essence de térébenthine.

Le *gris* = 64 blanc de céruse broyé sur la pierre avec l'huile + 1.40 noir de fumée + 22 essence de térébenthine + 16 huile cuite.

Le *noir :* mettez dans un vase 56 du noir en pâté + 20 d'essence de térébenthine + 8 huile cuite + 16 du dessicatif broyé ; et remuez.

L'*olive :* mettez dans un vase 61.50 de l'olive en pâté + 5.50 essence de térébenthine + 29.50 huile cuite + 3.50 du dessicatif broyé ; et remuez.

On met deux couches de couleur olive sur les bois ; une couche olive d'abord, puis une couche noire sur les ferrures.

On m'affirme que le *noir* est tout à fait passé de mode pour les ferrures et qu'on les peint aujourd'hui en *bronze !* Suivons le progrès :

Bronze : minium broyé à l'huile de lin, deux couches ; une troisième couche se donne avec la couleur *bronze*, qu'on obtient d'un mélange de céruse, de stil de grain et de bleu de Prusse broyés séparément à l'huile de lin, puis mêlés et broyés dans les proportions qui atteindront la nuance désirée.

PÉNÉTRATIONS. Je me borne à consigner ici les pénétrations des projectiles de petit calibre, et je renvoie aux Traités spéciaux pour les effets des boulets de 36, 24, 12 et ceux des obus de 8° et au-dessus. J'ai indiqué (p. 1152) les effets *moyens* de la mitraille.

Pénétrations de quelques projectiles dans les terres rassises moitié sable, moitié argile.

PROJECTILES.	Charge.	DISTANCES DE									
		25^{m}	50^{m}	100^{m}	200^{m}	300^{m}	400^{m}	500^{m}	600^{m}	800^{m}	1000^{m}
	k.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Boulets de 8. . .	1.25	1.43	1.39	1.32	1.19	1.10	1.02	0.95	0.90	0.81	0.73
Obus de 6 p. . .	1.50	1.34	1.30	1.24	1.14	1.04	0.95	0.86	0.78	0.64	0.56
Balles de fusil d'infanterie . .	0.01	0.25	0.27	0.22	0.15	0.11	0.08	0.06	0.04	»	»

Pour obtenir les enfoncements dans les autres espèces de terre, on multipliera les coefficients ci-dessus, savoir :

Pour le sable mêlé de gravier, par. 0.63

Pour la terre mêlée de sable et de gravier, pesant plus de 2000^{k} le mètre par. 0.87

Les terres végétales rassises et les terres rapportées, mêlées de sable et d'argile. 1.09

Pour l'argile à potier, humide. 1.44

Idem., mouillée 2.10

Pour les terres légères d'ancien parapet. 1.50

Pour les mêmes, nouvellement remuées. 1.90

Dans les bois de chêne, hêtre ou frêne.

PROJECTILES.	Charge.	DISTANCES DE									
		25m	50m	100m	200m	300m	400m	500m	600m	800m	1000m
	k.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Boulets de 8. . .	1.25	1.00	0.97	0.92	0.82	0.73	0.65	0.57	0.49	0.35	0.27
Obus de 6 p. . .	1.50	0.84	0.81	0.77	0.68	0.60	0.52	0.46	0.38	0.30	0.25
Balles de fusil d'infanterie . .	0.01	0.090	0.080	0.065	0.045	0.027	0.018	0.012	0.008	»	»

On multipliera les coefficients ci-dessus par 1.30 pour l'orme, 1.8 pour le sapin et le bouleau, et enfin par 2 pour le peuplier.

Dans le chêne, les fibres se déplacent latéralement sur le passage du projectile et se resserrent ensuite, de manière à ne laisser qu'un vide à peine suffisant pour y introduire la sonde : ce qui explique comment les vaisseaux reçoivent des boulets au-dessous de la flottaison sans couler bas. Mais l'écartement des fibres produit des déchirures longitudinales qui, pour les plus petits boulets, ont jusqu'à 2 mètres de longueur. Les éclats sont lancés jusqu'à 12 et 15 mètres, et les plus fortes pièces peuvent être promptement détruites. Dans le sapin, toutes les fibres frappées sont à peu près rompues ; mais l'effet se borne au vide produit.

Dans les bonnes maçonneries de moellons.

Boulets de 8. . .	1.25	0.44	0.40	0.38	0.34	0.30	0.26	0.23	0.19	0.14	0.11

On multipliera les coefficients ci-dessus, savoir :

Par 1.25 pour la maçonnerie en moellons de médiocre qualité ;

Par 1.75 pour la maçonnerie de briques;

Par 0.46 pour les roches calcaires.

L'effet des obus contre les maçonneries est à peu près nul ; ils se brisent au moment du choc ; ou bien, tirés à très-petites charges, ils ne produisent que des impressions très-faibles.

Les trous faits par les boulets dans les bonnes maçonneries de moellons, lorsqu'ils sont tirés perpendiculairement et à petites distances, sont formés d'un entonnoir extérieur dont le diamètre moyen égale environ cinq fois celui du projectile, et d'une partie intérieure à peu près cylindrique. L'entonnoir extérieur paraît pro-

duit par la réaction de la maçonnerie, dont quelques débris sont projetés jusqu'à 40 et 50 mètres. La traînée de décombres devant les trous est d'environ 6 mètres. Presque tous les boulets sont brisés, même lorsqu'ils sont tirés à faible charge, et, en général, suivant des plans méridiens dont le pôle est le point qui a frappé le premier. Sur les boulets restés entiers et sur les fragments, on observe, en outre, des sillons rayonnants autour du même point, et ayant quelquefois $0^m.0005$ de profondeur.

Les balles des carabines forcées commencent à être meurtrières à 500 mètres, et les balles des fusils de munition à 300 mètres. Bien que ces dernières blessent encore à des distances beaucoup plus grandes, ce n'est guère qu'à 200 mètres que le feu de l'infanterie est regardé comme efficace. A 150 mètres, la cuirasse des cuirassiers français, de $0^m.0028$ d'épaisseur, n'est pas à l'épreuve du fusil de munition, ni du pistolet à 35 mètres.

La balle du fusil de munition, tirée à 10 mètres, pénètre de $0^m.12$ dans le papier ; à 50 mètres, elle ne perce pas un madrier de chêne de $0^m.02$ revêtu du côté de la balle d'une feuille de tôle, de $0^m.0025$ d'épaisseur ; à 22 mètres, elle pénètre de $0^m.72$ dans des matelas de laine placés entre deux claies ; à 40 mètres, elle traverse 14 matelas simplement appuyés contre une planche de chêne et formant une épaisseur de laine de $1^m.12$; tirée à bout portant, elle ne traverse pas un madrier de chêne de $0^m.10$ d'épaisseur ; mais après un petit nombre de coups, le madrier est fendu ; de sorte que, pour être à l'épreuve de la balle, des poutrelles en chêne doivent recevoir environ $0^m.15$ d'épaisseur.

Fourcroy, dès 1768, avait remarqué que toutes les balles tirées dans le *sable* se trouvaient fort élargies, convexes par le côté qui a frappé le sable, et fort concaves du côté du fusil ; que les bords en sont devenus fort minces, garnis de déchirures et ébarbures fort irrégulières qui ont jusqu'à $0^m.02$ de longueur ; que la partie concave se trouve recomblée de sable entassé, fort adhérent, fort dur et presque aussi fin que s'il avait été porphyrisé ; enfin que la partie convexe est toute inégale, raboteuse, souvent écorchée et déchirée, et par conséquent la plupart des balles diminuées de leur poids.

Des *chandelles* calibrées et raccourcies au poids de $0^k.030$, tirées au lieu de balles dans le sable, y pénètrent à la même profondeur, mais en faisant des trous plus larges ; tirées à 3 mètres de distance de 2 feuillets de chêne, chacun de $0^m.04$ d'épaisseur, dressés contre une coupe de sable, elles les percent tous deux, à chaque coup, d'un trou irrégulier d'environ $0^m.04$ dans sa plus grande largeur.

Boulets. D'après *Cormontaingne*, le simple roulis d'un boulet de calibre quelconque est extrêmement dangereux pour les hommes, même à une grande distance. Ils ricochent sous les angles de 5° sur

l'eau, de 8° sur la terre ferme, de 26° sur le bois, et de 33° sur la maçonnerie à la charge de $\frac{1}{4}$ de leur poids. Si la charge est plus forte, ils ne ricochent que sous des angles plus aigus.

PENDULE. Corps solide pesant, oscillant autour d'un axe fixe horizontal (pl. XCVIII, *fig.* 1).

Pendule simple. On simplifie la recherche des lois du mouvement d'un tel corps en étudiant d'abord celles d'un pendule *idéal* supposé formé d'un fil inextensible AB, inflexible, sans poids, suspendu par l'une de ses extrémités à un point fixe A, et supportant à l'autre *une seule* molécule matérielle B dont nous ferons le poids $=p$; c'est ce que l'on appelle le *pendule simple.*

Considérons le système au moment où, écarté de la verticale AB d'un angle $BAC=A$, il vient d'être abandonné à lui-même sans aucune espèce d'impulsion initiale, et appelons L sa longueur constante AC. Il est d'abord évident que le poids p ne peut, dans ces hypothèses, parcourir qu'un arc de cercle de rayon L; et, soit qu'on le considère comme un corps qui descend de la hauteur verticale $BD=H$ de l'arc décrit, ou comme un corps qui tourne autour du point fixe A, le principe des forces vives (p. 786) donne

$$pH=\frac{1}{2}p\frac{V^2}{g}=\frac{1}{2}\frac{p}{g}\Omega^2L^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d'où $$V=\sqrt{2gH}=\sqrt{2gL(1-\cos. A)}=L\Omega. \quad (2)$$

$$\Omega=\frac{1}{L}\sqrt{2gH}=\pm\sqrt{\frac{2g(1-\cos. A)}{L}} \ldots \quad (3)$$

en appelant V la vitesse, tangentielle à la courbe, acquise au point le plus bas B, et Ω la vitesse angulaire de p en ce même point.

Ainsi : 1° ces vitesses sont indépendantes du poids p de la molécule suspendue au fil; 2° l'angle A étant considéré comme ayant son origine en C ou en C', et étant pris positivement de C vers B et négativement de C' vers B, les vitesses acquises au point le plus bas augmenteront avec cet angle de plus grand écartement; 3° une fois acquises, elles ne deviendront nulles qu'à la condition $(1-\cos. A)=0$, $\cos. A=1$, ou $A=0$, c'est-à-dire lorsque p atteindra les points C', C, au même niveau et également éloignés de la verticale AB. La masse pendulaire p oscillerait donc sans cesse de C en C' et de C' en C, si la résistance de l'air ne diminuait pas de plus en plus l'*amplitude* CBC' de chaque *oscillation* et n'éteignait enfin son mouvement.

On voit même facilement (*fig.* 2, pl. XCVIII) que, si quelque arrêt fixe n, n', n'' était rencontré par le fil pendant sa course, le corps

p n'en remonterait pas moins à son niveau primitif en décrivant autour de ces arrêts fixes des arcs de cercle de rayons plus courts, et le pendule, abstraction faite de la résistance de l'air, oscillerait ainsi indéfiniment en décrivant les courbes non symétriques C B o, C B o'.

Toutefois, ainsi qu'on le verra plus loin, les branches de ces courbes, situées à gauche dans la *figure* 2, seraient décrites dans des temps plus longs que les branches situées à droite, car ces durées dépendent du rayon de l'arc décrit.

Si (*fig.* 1, pl. XCVIII) l'on voulait avoir les vitesses v ou ω au moment où la masse $\frac{p}{g}$ parvenue à un point quelconque M doit encore décrire l'angle a pour arriver au point le plus bas, on aurait, en vertu du même principe, h étant $=$ MI $=$ L(cos. a — cos. A) :

$$v = \sqrt{2gh} = \omega \mathrm{L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{\mathrm{L}}(\cos. a - \cos. \mathrm{A})} \quad (4)$$

vitesses qui deviennent nulles aux positions pour lesquelles on a ($a = $ A); et comme, dans un mouvement quelconque sur une courbe, $\omega dt = da$, on trouverait pour la valeur dt du temps que le poids p mettra à décrire le petit arc da

$$dt = \frac{da}{\omega} = \frac{\mathrm{L}da}{\sqrt{2gh}} = \frac{\mathrm{L}da}{\sqrt{2g\mathrm{L}(\cos. a - \cos. \mathrm{A})}} \;\ldots\ldots\; (5)$$

Imaginons maintenant un deuxième pendule simple d'une longueur différente $\mathrm{L}' = \mathrm{A}c'$, écarté d'abord de la verticale AB d'une valeur angulaire $b'\mathrm{A}c' = \mathrm{BAC} = \mathrm{A}$, puis parvenu sur son arc d'oscillation à un point M' homologue de M, après être descendu d'une hauteur $\mathrm{M'I'} = h'$. Supposons même, pour plus de généralité, que ce dernier pendule oscille en un autre lieu pour lequel la gravité $= g'$, nous aurons, en raisonnant comme pour le premier, et accentuant les quantités qui se rapportent au pendule L' :

$$v' = \omega' \mathrm{L}' = \sqrt{2g'h'}; \quad \omega' = \sqrt{\frac{2g'}{\mathrm{L}'}(\cos. a - \cos. \mathrm{A})} \quad (6)$$

$$dt' = \frac{da}{\omega'} = \frac{\mathrm{L}'da}{\sqrt{2g'h'}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

ce qui donnera, pour le rapport des temps employés par l'un et l'autre pendule pour parcourir un petit arc da de même valeur angulaire et semblablement placé :

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\mathrm{L}\sqrt{2g'h'}}{\mathrm{L}'\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{g'h'\mathrm{L}.\mathrm{L}}}{\sqrt{gh\mathrm{L}'.\mathrm{L}'}} = \sqrt{\frac{g'\mathrm{L}}{g\mathrm{L}'}} \;\ldots\ldots\; (8)$$

car les lignes homologues des cercles A$c'b'$, ACB donnent : $h : h' :: \mathrm{L} : \mathrm{L}'$ ou $h\mathrm{L}' = \mathrm{L}h'$.

Ainsi, lorsque deux pendules ont été écartés de leur verticale d'une même valeur angulaire et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes, les temps élémentaires dt, dt', employés par chacun d'eux pour décrire de petits arcs homologues, sont dans un rapport constant. Or, les arcs CB, $c'b'$, à décrire par chacun d'eux pour parvenir à leurs points lesplus bas, se composent d'un même nombre de petits arcs semblables : donc, les temps respectifs t, t', qui expriment en secondes les durées de ces descentes ou demi-oscillations, sont dans le même rapport et

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \sqrt{\frac{L}{L'}} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

si les pendules simples oscillent au même lieu, $g' = g$ et

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L'}} \quad \text{ou} \quad \frac{L}{L'} = \frac{t^2}{t'^2} \ldots\ldots\ldots (10)$$

et *les durées de leurs oscillations sont entre elles comme les racines carrées de leurs longueurs*.

Si, au contraire, leurs longueurs sont les mêmes et s'ils oscillent dans des lieux différents, on a, en faisant $L = L'$ dans (9) :

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}} \quad \text{ou} \quad g t^2 = g' t'^2 \ldots\ldots (11)$$

et *les durées*, en secondes, *de leurs oscillations de même amplitude, sont entre elles réciproquement comme les racines carrées des valeurs de la gravité dans ces lieux différents*.

Mais quelle durée absolue T emploiera un pendule simple d'une longueur déterminée L pour descendre au point le plus bas de sa course, dans un lieu où la gravité est g?

On obtiendrait cette durée si l'on savait intégrer l'expression (5), que nous mettons sous la forme

$$dt = \frac{-L\,da}{\sqrt{2gL(\cos. a - \cos. A)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

parce que l'arc a diminue à mesure que le temps augmente. Cette intégrale n'étant pas de celles que l'on connaît, on a, par approximation, en désignant par f la flèche de l'arc d'oscillation mesurée dans le cercle de rayon *un* ou le sinus verse, mesuré dans le même cercle de la demi-oscillation du pendule simple :

$$T = \frac{1}{2}\pi \left(1 + \frac{1}{8}f + \frac{9}{256}f^2 + \ldots\right) \sqrt{\frac{L}{g}} \ldots (13)$$

Le double de cette quantité sera donc la durée 2T d'une oscilla-

tion entière de C en C′. Les deux premiers termes de la parenthèse suffisent lorsque l'amplitude totale ne dépasse pas 5 à 6 degrés tout au plus, et l'on a alors

$$2\,T = \pi\left(1+\frac{1}{8}f\right)\sqrt{\frac{L}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

pour la durée très-approchée d'une oscillation entière, abstraction faite de la résistance de l'air. Cette formule (14) est celle qu'il convient d'employer dans la pratique.

Lorsque l'angle de plus grand écartement A est très-petit, a qui y est toujours contenu devient lui-même très-petit *à fortiori*, et l'on peut, dans l'expression (12), remplacer cos. a et cos. A par leurs valeurs respectives approchées $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$ et $\left(1-\frac{A^2}{2}\right)$, d'où résulte cos. a — cos. A $= \frac{1}{2}(A^2 - a^2)$; l'expression (12) devient alors intégrable, et l'on a (p. 991, § 40) :

$$T = \int \frac{-da}{\sqrt{A^2 - a^2}}\sqrt{\frac{L}{g}} = \text{arc}\left(\cos. = \frac{a}{A}\right)\sqrt{\frac{L}{g}} + C.$$

La constante C est nulle, puisque, lorsque $a = A$, T est zéro. Faisant $a = 0$, l'arc dont le cosinus $= \frac{o}{A} = 0$ est $\frac{1}{2}\pi$, ce qui donne pour limite inférieure de la durée T d'une demi-oscillation de très-peu d'amplitude :

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

On peut même observer que l'arc qui a zéro pour cosinus étant aussi bien $\frac{1}{2}\pi$ que $\frac{3}{2}\pi$ ou $\frac{5}{2}\pi\ldots$, le mobile p reviendra en C dans une infinité de temps successifs, tous séparés entre eux par la durée constante $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ de *deux* oscillations entières.

La méthode infinitésimale n'étant pas en faveur aujourd'hui, c'est peut-être un devoir pour nous de parvenir à l'expression (15) en masquant l'intégration. Passons donc de nouveau par les considérations suivantes qui sont regardées comme plus élémentaires.

En assimilant un cercle BC (*fig.* 3, pl. XCVIII) à un polygone d'une infinité de côtés, un quelconque MN de ces côtés est égal au produit de sa projection NQ = PP′ sur le diamètre qui passe à l'origine B par le rapport $\frac{AM}{MP}$ du rayon du cercle à l'ordonnée correspondante à ce côté.

En effet, les triangles rectangles MNQ, AMP, ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables et

$$\mathrm{MP} : (\mathrm{QN} = \mathrm{PP}') :: \mathrm{AM} : \mathrm{MN} = \mathrm{PP}' \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MP}}.$$

Si, sur la hauteur de chute H=DB comme diamètre, ou décrit une demi-circonférence DmB, la projection mn sur cette circonférence du petit arc MN décrit dans le petit temps dt donnera de même

$$m\mathrm{P} : \mathrm{PP}' :: \mathrm{O}m : mn = \mathrm{PP}' \times \frac{\mathrm{O}m}{m\mathrm{P}}$$

Remarquant que $m\mathrm{P} = \sqrt{h(\mathrm{H}-h)}$ et que DB étant par hypothèse le sinus verse d'un arc très-petit, on peut faire $\mathrm{MP} = \sqrt{2\mathrm{L}(\mathrm{H}-h)}$ par approximation ; on a, pour le rapport du petit arc décrit $\mathrm{MN} = \mathrm{L}da$ à sa projection mn sur la circonférence DmB, dont le diamètre est H :

$$\frac{\mathrm{MN}}{mn} = \frac{\mathrm{AM} \times m\mathrm{P}}{\mathrm{MP} \times \mathrm{O}m} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MN} = \frac{mn}{\mathrm{H}} \sqrt{2h\mathrm{L}}$$

ce qui donne, pour l'expression (5) du petit temps dt employé à parcourir le petit arc $\mathrm{L}da = \mathrm{MN}$:

$$dt = \frac{\mathrm{L}da}{\sqrt{2gh}} = \frac{\mathrm{MN}}{\sqrt{2gh}} = \frac{mn}{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

c'est-à-dire que ce petit temps dt est proportionnel à la projection mn de l'arc MN, réellement décrit sur la demi-circonférence dont le diamètre est égal à la chute totale H : donc, l'arc de chute total CB, dont la projection est DmB, sera parcouru dans un temps dont la limite inférieure est

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{D}m\mathrm{B}}{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\mathrm{H}}{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}} \quad . . (17)$$

ainsi qu'on l'a trouvé plus haut (15). L'oscillation entière de C en C' s'accomplirait dans un temps double ou 2 T.

Il est digne de remarque que cette durée soit indépendante de l'amplitude du très-petit arc décrit ; on en conclut que *les oscillations du pendule simple, dans le vide, sont sensiblement isochrones ou d'égale durée, pourvu que leurs amplitudes soient presque nulles*. Avec cette condition, en effet, l'arc de cercle décrit se confond *presque* avec celui d'une *cycloïde* (p. 493) dont le cercle générateur aurait un rayon $r = \frac{\mathrm{L}}{4}$, et l'on sait depuis *Huyghens* (1673) qu'un pendule simple qui décrirait cette courbe dans le vide accomplirait tou-

tes ses oscillations dans des durées absolument indépendantes de leurs amplitudes, et par conséquent égales entre elles.

Admettre l'isochronisme des oscillations suivant des arcs de cercle infiniment petits, c'est d'ailleurs l'admettre suivant des arcs infiniment petits d'ellipse, de parabole ou de courbes quelconques, car sur une très-petite étendue leur courbure se confond avec celle de leur cercle osculateur.

On remarque encore qu'un corps qui tomberait d'une hauteur égale au diamètre 2L de l'arc du cercle décrit par un pendule emploierait à descendre, le long de ce diamètre dans le vide, un temps $t' = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$: or, la durée de la chute, selon le diamètre, est celle de la chute par une corde quelconque de ce cercle (voyez plan incliné); le temps $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ de la descente par l'arc dont la tangente est horizontale est donc plus court que le temps de la descente par la corde de ce même arc dans le rapport de π à 4 ou 3.14156 à 4, et la ligne droite, qui est le plus court chemin d'un point à un autre, ne serait pas ici le chemin de plus courte durée entre ces mêmes points s'ils étaient très-rapprochés, comme on le suppose ici. Au reste, l'arc de cercle n'est pas lui-même la courbe *de plus vite descente* entre ces points, et l'on sait depuis *Jacques Bernouilli* (1696) que cette courbe est la *cycloïde* dont l'origine serait au point de départ du mobile (voir p. 493).

Pendule composé. Le pendule simple n'a évidemment qu'une existence *idéale*, puisqu'il est matériellement impossible de faire osciller *une seule* molécule pesante à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse suivant un arc infiniment petit et dans le vide. Le pendule est donc toujours un corps massif, étendu, physique, que l'on nomme *pendule composé.* Nous avons traité, à la page 1143, du mouvement d'un tel corps autour d'un axe horizontal, et nous y sommes parvenu à l'expression suivante de sa vitesse angulaire ω, lorsque parti sans vitesse initiale d'un écartement A, il lui reste à parcourir a pour revenir à la verticale :

$$\omega = \sqrt{2g(\cos.a - \cos.A)}\sqrt{\frac{MD}{I_1}} \quad . \; . \; . \; (18)$$

M étant la masse du corps, D la distance de son centre de gravité à l'axe et I_1 son moment d'inertie de masse par rapport au même axe. Si l'on rapproche cette vitesse de celle (4) que l'on a trouvée pour le pendule simple placé de la même manière par rapport à la verticale, on voit facilement qu'elles deviennent identiques en faisant

$$L = \frac{I_1}{MD} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Ainsi, les lois du mouvement d'un pendule composé sont celles d'un pendule simple d'une longueur L que l'on obtiendra en divisant le moment d'inertie de masse I_1 du pendule composé par le produit fait de sa masse M et de la distance D de son centre de gravité à l'axe fixe.

Donc, si ces oscillations ont une amplitude extrêmement petite, il vient de même

$$\omega=\sqrt{\frac{PD}{I_1}(A^2-a^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$P=Mg$ étant son poids dans le vide ; et comme on a alors

$$dt=\frac{-da}{\sqrt{A^2-a^2}}\sqrt{\frac{I_1}{MgD}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

la durée minimum T de la descente suivant un arc extrêmement petit devient :

$$T=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{I_1}{MgD}}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{I_1}{PD}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Le double de cette quantité serait la durée approchée d'une oscillation entière dans le vide. Mais nous avons vu (p. 251) que

$$L=\frac{I_1}{MD}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

était le *rayon d'oscillation* du pendule composé : donc, on peut dire encore que le pendule simple, dont le mouvement dans le vide concorde avec celui d'un pendule composé, a pour longueur le rayon d'oscillation L de celui-ci.

Il en résulte qu'un cône plein, dont l'angle au sommet est droit, formerait un pendule composé *synchrone* d'un pendule simple d'une longueur L égale à la hauteur du cône.

Et comme les centres d'oscillation et de suspension sont réciproques l'un de l'autre (p. 252), la durée d'une oscillation d'un pendule composé reste la même, par quelque extrémité de son pendule simple synchrone L qu'on le suspende (Huyghens). Ainsi, le cône ci-dessus pourrait être suspendu par son sommet ou par le centre de sa base sans que la durée de son oscillation changeât.

Voilà donc les mouvements du pendule composé ramenés à ceux du pendule idéal ou simple, et ces derniers, très-approximativement déterminés pour le cas des amplitudes extrêmement petites et abstraction faite de la résistance de l'air. Voyons quelle peut être l'influence de celui-ci.

Influence de l'air. On peut, jusqu'à un certain point, entrevoir sans calcul que la résistance de l'air devra augmenter la durée de la

première descente sans avoir aucune influence sur son amplitude. Parvenu ainsi à son point le plus bas avec une vitesse moindre que celle qu'il eût acquise dans le vide, le pendule s'élèvera à une moindre hauteur que celle d'où il est descendu; et l'amplitude de l'arc de première ascension étant ainsi diminuée, cet arc d'ascension sera parcouru probablement en un temps moindre que l'arc de descente. Il est même possible que l'accroissement de la durée de la descente compense la diminution de la durée de l'ascension, et que la *première* oscillation entière s'accomplisse ainsi en un même temps que dans le vide, l'amplitude du mouvement étant toujours supposée extrêmement petite.

Quant à la seconde oscillation entière, son amplitude totale diminuant encore en vertu des mêmes causes, on pourrait croire qu'elle s'accomplira en un temps moindre que la première, et finalement que les durées des oscillations successives iront sans cesse en diminuant avec les amplitudes de celles-ci, de sorte que l'*isochronisme* des oscillations du pendule n'existerait pas pour les mouvements dans l'air, même très-petits. Ce fait est bien confirmé, en effet, par une foule d'observations (*) ; mais il paraît, heureusement, qu'il ne devrait pas avoir lieu, si l'amplitude des oscillations était encore plus petite et que, *quelle que soit la résistance du milieu, le temps de l'oscillation entière est le même que si le mouvement avait lieu dans le vide*, pourvu que l'amplitude soit excessivement petite, et, dans certaines hypothèses sur la loi de la résistance, pourvu que cette résistance soit très-faible elle-même par rapport au poids de la lentille du pendule. Du moins, ce théorème, en partie soupçonné et énoncé par *Bouguer*, que *Borda* désirait démontrer, bien qu'il n'y soit pas parvenu, a été finalement établi par *Poisson* dans un mémoire auquel je renvoie, et où il a pris soin de négliger toutes les puissances supérieures à la deuxième, qui auraient pu modifier, pour le mouvement dans l'air, la loi si simple de l'*isochronisme* des oscillations *infiniment petites* du pendule dans le vide.

Mais il ne s'ensuit pas que la durée des oscillations, même très petites, soit en effet la même dans l'air que dans le vide : car le pendule y perd une partie de son poids égale à celui du volume

(*) Admettant que l'amplitude des arcs décrits dans l'air diminue en progression géométrique, lorsque le temps augmente en progression arithmétique, M. *Biot* est parvenu à l'expression suivante dans son *Astronomie physique* :

$$N = N' \left\{ 1 + \frac{\sin. A \sin. (A - a)}{16 \log. hyp. \frac{A}{a}} \right\}$$

A et a étant respectivement les arcs de demi-oscillation au commencement et à la fin de la durée de l'observation, N′ le nombre d'oscillations accomplies pendant cette durée et N le nombre d'oscillations qui auraient été accomplies si le mouvement avait eu lieu suivant un arc infiniment petit.

d'air qu'il déplace. Soit donc $P = Mg$ le poids du pendule dans le vide, et $P_1 = Mg_1$ le poids du pendule dans l'air, on a

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P}{g} \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{P_1}{P}\, g \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

c'est-à-dire que, si l'on voulait tenir compte de cette influence, on devrait mettre cette valeur de g_1 à la place de g dans toutes les formules ci-dessus ou y multiplier g par le rapport $\frac{P_1}{P}$.

Enfin une certaine quantité d'air est entraînée dans le mouvement du pendule et l'accompagne, ce qui change la masse et le moment d'inertie du système oscillant, suivant des lois qui dépendent de ses formes et qui ne sont réellement connues pour aucune d'elles.

Réduction au niveau des mers. La formule de la page 339 montre d'ailleurs qu'il y a entre deux pendules *synchrones*, l'un L_0 observé au niveau des mers où la gravité est g_0, l'autre L' observé à une hauteur E au-dessus de ce niveau et où la gravité est g', les relations

$$L_0\left(1 + \frac{2E}{R}\right) = L' \quad \text{ou} \quad L_0 = L'\left(1 - \frac{2E}{R}\right) . \; . \quad (25)$$

R étant le rayon terrestre calculé pour la latitude du lieu où l'on observe. Encore faut-il remarquer que l'on néglige ici, à cause de leur incertitude, les corrections dues à l'attraction des couches terrestres comprises entre les deux niveaux.

Il y aurait bien à faire encore quelques autres corrections indépendantes de celles qui sont relatives à l'amplitude, à la perte de poids dans l'air, à l'élévation, aux attractions locales, pour donner aux résultats des observations du pendule la précision qu'exigent les conséquences que l'on en tire; nous ne pouvons nous y arrêter ici, et nous terminons cet article par le résumé de quelques valeurs numériques en rapport avec la théorie du pendule.

Longueurs L, *réduites au niveau des mers, de pendules simples accomplissant une oscillation entière infiniment petite, et, dans le vide, en une seconde sexagésimale de temps moyen.*

STATIONS.	LATITUDES.	L	OBSERVATEURS.
		m.	
Paris	48° 50′ 14″	0.9938493	Borda
—	— —	0.9938673	Biot, Mathieu, Bouvard.
—	— —	0.9939673	Freycinet, Duperrey.
Londres	51 31 8	0.9941236	Kater, Sabine.
Ile Rawak	0 1 35 S	0.9909584	Freycinet.
Bordeaux.	44 50 26	0.9934529	Biot, Mathieu.
Dunkerque. . . .	51 2 10	0.9940804	*Id.*, *id.*
Hammerfest . . .	70 40 5	0.9955409	Sabine.
Spitzberg.	79 49 58	0.9960859	*Id.*

PENDULE BALISTIQUE (*fig.* 4, *pl.* XCVIII). Instrument proposé, en 1742, par l'ingénieur *Benjamin Robins*, employé encore aujourd'hui par toutes les artilleries de l'Europe pour mesurer la vitesse de leurs boulets, et qui se prêterait peut-être à des applications moins militaires et partant plus utiles.

Il se réduit en principe à une forte masse de bois $M = \frac{P}{g}$, suspendue à un axe horizontal A. Le projectile tiré à très-petite distance de cette masse, et dans un plan de tir qui partage le pendule en deux parties symétriques, pénètre dans une cavité remplie de matière molle, et met ainsi le pendule en mouvement. On mesure la grandeur de l'arc ZZ' décrit par un point Z de la masse totale situé à une distance connue R de l'axe de rotation; et l'on en déduit, par les relations suivantes, la vitesse approchée du projectile au moment où il a atteint le bloc. *Euler* a, le premier, donné la théorie complète de cet appareil.

Soit u la vitesse du boulet, p son poids, et dès lors $\frac{p}{g}$ sa masse m, on tire, de manière que le boulet soit dirigé vers le centre d'oscillation O du pendule situé à une distance de l'axe A, que nous désignons par L; mais il arrive souvent qu'il frappe à une autre distance de cet axe que nous appelons l.

Soient enfin P le poids du pendule; — $\frac{P}{g} = M$ sa masse; — D la distance AG' de son centre de gravité à l'axe A; — I son moment d'inertie de masse par rapport au même axe, $I = MDL$; — Ω la vitesse angulaire du pendule et du boulet après le choc; — a l'arc de rayon un qu'ils décrivent ensemble par l'effet du choc; — $NG = D(1 - \cos. a)$ la plus grande hauteur dont le centre de gravité du pendule s'élève après le choc;

Egalant le moment $\frac{p}{g} lu$ du choc qui tend à produire la rotation à la somme des moments des forces d'inertie du système qui y ont résisté, somme égale à $(I + ml^2)\,\Omega = (MDL + ml^2)\,\Omega$, on a immédiatement

$$u = \frac{(PDL + pl^2)\,\Omega}{pl} \qquad \text{ou} \quad \Omega = \frac{plu}{(PDL + pl^2)} \ldots \quad (26)$$

de sorte que si Ω était connu, on en déduirait u : or, le principe des forces vives donne encore

$$(I + ml^2)\,\Omega^2 = 2\,(PD + pl)\,(1 - \cos. a)$$

ou

$$\frac{(PDL + pl^2)}{g}\,\Omega^2 = (PD + pl)\; 4\,\sin.^2 \tfrac{1}{2}\,a$$

$$\Omega = 2 \sin.\tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{(\text{PD}+pl)\,g}{(\text{PDL}+pl^2)}} \ldots\ldots\ldots (27)$$

Éliminant Ω entre les équations (26) et (27), on a pour la valeur approchée de la vitesse u du projectile

$$u = \frac{2 \sin.\tfrac{1}{2} a}{pl} \sqrt{g\,(\text{PD}+pl)\,(\text{PDL}+pl^2)} \ldots (28)$$

Remarquant que la corde $C = ZZ'$ de l'arc de recul

$$= R \times 2 \sin.\tfrac{1}{2} a,$$

on a encore en fonction de cette corde

$$u = \frac{C}{Rpl} \sqrt{g\,(\text{PD}+pl)\,(\text{PDL}+pl^2)} \ldots\ldots (29)$$

Si l'on suppose que le projectile ait été assez exactement dirigé vers le centre d'oscillation O du pendule, l devient $= L$, et les formules précédentes prennent les formes plus simples

$$u = \frac{(\text{PD}+pL)\,\Omega}{p} \quad \text{ou} \quad \Omega = \frac{pu}{(\text{PD}+pL)} \ldots\ldots (30)$$

$$\Omega = 2 \sin.\tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{L}} \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$u = 2 \sin.\tfrac{1}{2} a \,\frac{(\text{PD}+pL)}{p} \sqrt{\frac{g}{L}} \ldots\ldots (32)$$

$$u = \frac{C}{R}\,\frac{(\text{PD}+pL)}{p} \sqrt{\frac{g}{L}} \ldots\ldots\ldots (33)$$

On détermine assez facilement le moment PD du pendule, en fixant en arrière du bloc et dans le plan vertical qui contient son centre de gravité une poulie, dans la gorge de laquelle passe un cordon très-flexible ayant son point d'attache dans le même plan, et portant à son autre extrémité un plateau en fer que l'on charge de poids jusqu'à ce que le pendule soit écarté de la verticale d'un angle α, tel que le cordon soit perpendiculaire au plan qui passe par le centre de gravité et les deux appuis de l'axe de rotation. Q étant le poids du plateau et de sa charge, d la distance du point d'attache à l'axe de rotation, l'égalité des moments donne

$$\text{DP} \sin.\alpha = Qd \quad \text{ou} \quad \text{PD} = \frac{Qd}{\sin.\alpha}$$

La valeur de ce moment PD conduit à son tour à celle du moment d'inertie I; car on a (19)

$$I = \text{MLD} = \frac{\text{PD}}{g}\,L = \frac{\text{PD}\,\theta^2}{\pi^2} = 0.10132\,\text{PD}\theta^2$$

en appelant θ la durée en secondes d'une oscillation très-petite du pendule, durée que l'on obtiendra en laissant osciller librement le pendule sur son axe et prenant une moyenne entre les durées de quelques-unes de ses oscillations de moindre amplitude. Ces méthodes ont encore été suggérées par *Euler* (voyez sa traduction et son commentaire des *Principes d'artillerie de Robins*). Elles trouvent souvent leur application à d'autres cas, à la détermination des moments des centres de gravité et des moments d'inertie des marteaux de forge, par exemple.

Benjamin Robins, auteur de cet ingénieux appareil, est né à Bath en 1707. Il est mort ingénieur aux Indes-Orientales en 1751, après avoir été membre de la Société royale de Londres, membre très-influent de la chambre des Communes, et enfin créé pair, sous le nom de comte d'*Orford*.

PENDULE *de Foucault* (*fig.* 5, *pl.* XCVIII). On appelle ainsi un pendule d'une grande longueur à l'aide duquel M. *Foucault* a le premier, je crois, rendu très-apparent le mouvement de rotation de la terre sur son axe. Il est formé d'une sphère assez lourde suspendue à un fil d'acier très-délié attaché à un seul point fixe A. La sphère porte à son pôle inférieur un style exactement placé dans le prolongement du fil de suspension. On éloigne le pendule de la verticale, on l'abandonne à lui-même, il oscille alors dans un plan vertical dont l'*orientation* primitive doit rester éternellement la même, si l'inertie est une des lois de la nature (p. 776).

Soit donc A le point de suspension ; pendant toute la durée des oscillations du pendule, ce point A est emporté autour de l'axe terrestre PP′ d'un mouvement rigoureusement uniforme, et, vu la petitesse du pendule par rapport aux dimensions de la terre, le point A peut être considéré comme confondu avec B, et décrivant dès lors uniformément un cercle de rayon DB dont le plan est parallèle à l'équateur ECQ.

Admettons, pour plus de simplicité, que le plan primitif d'oscillation A*sn* se confonde avec celui ECP du méridien du lieu B d'observation. Etablissons en B un plan horizontal en sable sur lequel le style du pendule pourra marquer la trace de son passage, et prolongeons par la pensée la méridienne horizontale BM du point B jusqu'à sa rencontre avec l'axe terrestre en M. Le point B, mobile autour de D et de M à la fois, appartient donc toujours à la circonférence décrite du rayon BD et au cône dont DM est l'axe, BM l'une des génératrices et le demi-angle au sommet = BMD = λ = latitude du pendule : donc aussi, pour un angle quelconque *d* décrit par B autour de D, il y aura toujours un angle *m* décrit par B autour de M, et tel que l'on a entre ces angles la relation

$$\frac{m}{d} = \frac{DB}{MB} = \sin\lambda \quad \text{ou} \quad m = d \times \text{sin. latitude.}$$

Ainsi B, décrivant autour de D quinze degrés par heure sidérale, ce point ne décrirait autour de M que 11° 18′ environ dans le même temps, si le pendule oscillait à la latitude de 48° 52′, qui est à peu près celle du *Conservatoire* à Paris.

Cela posé, admettons que le pendule commence ses oscillations à 0 heure suivant le plan du méridien MB ou ME_0; sa première oscillation tracera sur le sable la méridienne *sn*. Après une heure sidérale, cette trace *sn*, le méridien ME_0 et le point de suspension A du pendule se trouveront tous transportés vers l'orient dans le plan ME_1 à 11°18′ de ME_0 pour la latitude indiquée, et si le pendule oscille encore, il tracera sur le sable la droite s_1n_1. En vertu de l'inertie qui conserve au plan des oscillations sa première *orientation*, cette trace, dont la projection est s_1n_1 parallèle dès lors à ME_0, coupera la première trace *sn* sous un angle $S_1B_1E_1$, et pour l'observateur qui, placé sur le méridien la face tournée vers le sud, a été emporté avec tout le système, le pendule *semblera* avoir dévié à droite de l'angle $S_1B_1E_1 = E_0ME_1$. Si le pendule oscille encore une heure plus tard, la déviation $S_2B_2E_2$ sera double; enfin, elle aura triplé après trois heures, et la trace s_3n_3 couperait alors la première trace *sn* sous un angle $S_3B_3E_3$ de près de 34 degrés. Il est facile de voir maintenant que la déviation *apparente* du pendule de l'orient vers l'occident est l'effet du mouvement de rotation *réel* de la terre en sens inverse.

On a réclamé, en faveur de *Galilée*, la priorité de cette grande et belle expérience. Les citations des écrits de ce grand homme, qui ont été apportées au débat, ont montré avec évidence qu'il avait au moins entrevu ces effets, mais elles n'ont pas prouvé jusqu'ici qu'il les ait jamais confirmés par une expérience directe. Or, il y a souvent très-loin d'une prévision théorique au fait qui la réalise, et M. *Foucault* paraît bien être ici le premier qui ait franchi cette énorme distance.

PENTES. On trouvera page 1206 une table des valeurs angulaires des *pentes par mètre*. La *pente moyenne* des principaux fleuves est indiquée à l'article *Cours d'eau*, page 463.

PERCUSSION. On lui donne aujourd'hui le nom d'*impulsion* (p. 942). La *force de percussion* des anciens géomètres n'est point une *force* proprement dite (p. 776); c'est une cause complexe de mouvement qui implique à la fois les *intensités* successives des forces et les *durées* de leur action. Elle exprime en général la somme $\int$ des efforts variables F exercés à chaque instant *dt* pendant toute la durée *t* de la réaction de deux corps l'un sur l'autre. C'est en un mot une expression de la forme $\int_0^t F\,dt$ (voyez *Choc*,

p. 329). Voyez aussi page 257, pour la détermination des *centres de percussion*.

PERMUTATIONS. Voyez *Combinaisons* (p. 352).

PERSPECTIVE ISOMÉTRIQUE. Mode de projection qui remplace, avec de grands avantages, la *perspective* ordinaire, pour tous les genres de dessins relatifs à l'art de l'ingénieur.

La perspective isométrique a été introduite en Angleterre, vers l'année 1823, par le professeur *William Farish*; et il a consacré à ce système de projection, dans le volume Ier des *Transactions* de la Société philosophique de *Cambridge*, un mémoire intéressant que le présent article analyse et développe.

Le principe de la méthode est contenu tout entier dans la mise en perspective d'un *cube* dont chacune des faces circonscrirait un cercle.

Perspective isométrique d'un cube (*fig.* 1, *pl.* XCIX). Menez la diagonale CD′ du cube. Imaginez un plan transparent XY perpendiculaire à cette diagonale; supposez celle-ci prolongée à l'*infini*, et placez l'œil à son extrémité, de l'autre côté du tableau par rapport au cube. Dans cette hypothèse, toutes les droites menées de chaque point du cube à l'œil pourront être considérées comme parallèles à la diagonale ou perpendiculaires au plan transparent, qui devient ainsi un véritable plan de projection orthogonale.

Il n'est guère moins évident que, ces conventions une fois admises,

1° La trace du cube, sa *projection* sur le tableau formera un hexagone *régulier* ADBFEG, dont le périmètre représentera les limites apparentes du cube;

2° Deux côtés AG, BF de cet hexagone seront *verticaux;*

3° Trois autres arêtes du cube seront des rayons CE, CB, CA, menés l'un au sommet de l'angle inférieur, les autres aux sommets B et A;

4° Les neuf arêtes du cube qui soient visibles, égales entre elles dans le cube, sont encore égales entre elles dans la perspective;

5° Toutes les *parallèles* menées dans le cube à l'une quelconque de ses trois arêtes constituantes seront entre elles, dans l'image, en même rapport que dans le cube lui-même, et y seront parallèles.

Donc, si l'on adopte pour l'image perspective une réduction de moitié, du tiers, du centième, etc., pour l'une de ces arêtes, toutes les parallèles à l'une quelconque d'entre elles se trouveront réduites dans le même rapport; et l'on pourra leur appliquer une seule et même échelle, ce qui explique et justifie la dénomination de perspective *isométrique* ou d'égale mesure, donnée par *Farish* à ce mode de représentation.

J'omets, pour abréger, la démonstration des propositions énoncées ci-dessus, que j'ai cherché à rendre, d'ailleurs, assez évidente par le tracé de la *planche* XCIX, et qu'au besoin les ingénieurs un peu géomètres trouveraient facilement. Je ne démontre pas non plus que :

6° Les trois angles perspectifs C sont égaux entre eux, et de 120° ;

7° Les angles formés par les rayons C A, C B, C E, avec les autres arêtes perspectives, sont aussi égaux entre eux, mais de 60° seulement, angle supplémentaire de celui de 120°.

On voit donc, en somme, que dans la *perspective isométrique* les droites situées dans les trois directions principales sont toutes réduites à la même échelle, et que les angles qui étaient droits à la surface du cube se trouvent toujours représentés par des angles de 120 ou de 60 degrés, celui de tous les angles dont la construction graphique est la plus facile.

Or, dans les machines (*fig.* 2), dans les appareils, dans les bâtiments eux-mêmes, la plupart des lignes se trouvent naturellement dans les trois directions parallèles aux arêtes d'un cube convenablement placé qui les contiendrait. Donc, la perspective ou projection du cube conduit directement à la perspective isométrique de toutes les formes parallélipipédiques rectangles qui abondent en pratique ; et l'on conçoit, sans que je m'y arrête ici, comment la position d'un point quelconque *intérieur* au cube étant connue par ses coordonnées rectangulaires, on aura immédiatement ses coordonnées *perspectives* ou ses distances aux plans perspectifs G E F, E F B, E G A, en menant des parallèles aux arêtes *perspectives* ou directions *isométriques*.

Il n'est pas moins facile de voir que, si l'on a déjà en perspective un des points du plan isométrique dans lequel doit se trouver un autre point dont on cherche le lieu, le premier pourra servir de point de départ, et l'on obtiendra la position du second par *deux* distances au lieu de trois. Enfin, et c'est le cas le plus fréquent dans la pratique, si le point dont on cherche le lieu perspectif se trouve sur une *ligne* déjà placée, on n'a plus qu'*une* seule distance à prendre.

Il est vrai que, s'il se trouve quelques lignes qui ne soient pas parallèles à l'une des trois directions *isométriques*, elles ne pourront pas en général être directement mesurées avec la même échelle ; mais c'est là un vice commun à la perspective *isométrique* et à la *méthode* usuelle *des projections*. Toutefois on parviendra de même à les représenter dans le dessin ; et, ces lignes étant droites, par exemple, on déterminera comme il a été dit ci-dessus les lieux perspectifs de leurs extrémités et on joindra celles-ci par une droite. Souvent même on pourra faire usage de l'espèce d'*échelle elliptique*

(*fig.* 2, *pl.* C) dont nous parlerons dans un moment. Si ces lignes sont *courbes*, on déterminera par la même méthode tant de points qu'on voudra et l'on fera passer la courbe perspective par tous ces points, soit à la main, soit à l'aide du *pistolet*.

Ellipse isométrique. Mais on rencontre, dans le dessin des machines surtout, des courbes circulaires, des roues, des engrenages (*fig.* 2, *pl.* XCIX), etc. Or, par la nature des choses, la plupart de ces organes se trouveront disposés dans des plans *isométriques*, et il arrive fort heureusement que la perspective isométrique d'un cercle, dont le plan est parallèle à l'une quelconque des faces du cube devient une ellipse *de même forme* pour toutes les faces (*fig.* 1). Cependant on distingue parfaitement ces cercles les uns des autres par leur position sur leurs axes respectifs, axes qui, eux-mêmes, sont des *lignes isométriques* coïncidant toujours avec la direction du petit axe de l'ellipse qui les représente.

Ceci paraîtra évident en jetant les yeux sur le cube perspectif de la *planche* XCIX, lequel porte un cercle dans chacun de ses plans isométriques, cercles que l'on peut considérer comme des roues infiniment minces montées sur leurs axes. Les deux lignes tt', mn formant les quatre bras de la roue, et qui sont conduits dans l'ellipse par les points de contact opposés du cercle avec le parallélogramme qui le circonscrit, sont aussi des *lignes isométriques*, que nous appellerons les *diamètres* isométriques du cercle. On voit clairement, en effet, que les points de contact t, t', m, n sont les milieux des côtés du parallélogramme circonscrit ; les droites qui joignent ces milieux sont donc parallèles aux directions isométriques.

On ne devra pas oublier que les diamètres *isométriques seuls* donnent, à l'échelle adoptée, le vrai diamètre de la roue.

On sait, d'ailleurs, que les axes d'une ellipse sont entre eux comme les diagonales du parallélogramme qui les circonscrit. Or, dans l'ellipse isométrique, la petite diagonale EF divise ce parallélogramme CBFE en deux triangles équilatéraux. Donc, si $2a$ et $2b$ sont le grand axe et le petit axe de l'ellipse isométrique, on a

$$2a : 2b :: a : b :: \sqrt{3} : \sqrt{1}$$

Mais dans toute ellipse, la somme des carrés des rayons conjugués est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes ; si donc ces demi-axes sont respectivement $b = \sqrt{1}$ et $a = \sqrt{3}$ et r le rayon isométrique, on a

$$2r^2 = 1 + 3 = 4 \quad \text{et} \quad r = \sqrt{2}$$

De là cette propriété curieuse de l'ellipse isométrique :

8° Le demi-petit axe b, le rayon isométrique r et le demi-grand axe a sont entre eux comme

$$2b : 2r : 2a :: b : r : a :: \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

et par approximation

$$b : r : a :: 1 : 1.4142 : 1.7321 :: 28 : 40 : 49$$

de sorte que, en rapportant tout au rayon isométrique r, qui est toujours connu, on a

$$a = r\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247\,r; \quad b = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071\,r$$

On pourra obtenir géométriquement ces trois lignes b, r, a par la construction suivante (*fig.* 3, pl. C).

Formez en B un angle droit, prenez sur ses côtés les distances BA = BD; portez l'hypothénuse AD de B en α, tirez la droite indéfinie αDδ, il est facile de voir que l'on aura

$$BD : (B\alpha = AD) : \alpha D :: \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

Donc, si à partir de α et sur la droite indéfinie $\alpha\beta$, on porte un rayon isométrique quelconque $r = \alpha\beta$, la perpendiculaire élevée par le point β jusqu'à sa rencontre en δ avec l'indéfinie $\alpha\delta$, sera le demi-petit axe b de l'ellipse et son demi-grand axe sera $a = \alpha\delta$

$$r : b : a :: \alpha\beta : \beta\delta : \delta\alpha :: \sqrt{2} : \sqrt{1} : \sqrt{3}$$

Quant à l'ellipse elle-même, on pourra la décrire, soit à l'aide du compas à ellipse (p. 614), soit par arcs de cercle (p. 47), en ayant égard à la note qui termine cet article, et avec l'attention de ne pas altérer le contour vers les extrémités des quatre rayons isométriques.

L'auteur propose un système d'ellipses solides emboitées les unes dans les autres comme il est indiqué à peu près (*fig.* 4, *pl.* C), et quelques autres instruments que je n'ai pas trouvés très-commodes en pratique et sur lesquels je ne m'arrête pas.

Toutefois, quand on se livre à ce genre de dessin, il est bon d'être muni d'une ellipse en corne analogue à celle de la *fig.* 2, *pl.* C, qui sert ainsi de *rapporteur* et que nous apprendrons tout à l'heure à tracer.

Si la machine ou l'appareil à dessiner comportait une roue ou un cercle situé dans un plan autre que les plans isométriques, on observerait que le grand axe de son ellipse resterait le même dans quelque plan qu'il fût placé; quant à son petit axe, il serait au grand comme le sinus de l'angle formé par le plan de ce cercle avec la ligne de vue CD′ est au rayon des tables.

Enfin, la perspective de toute autre ligne parallèle et égale à un diamètre quelconque du cercle, s'obtiendra en tirant une ligne égale et parallèle au diamètre correspondant dans l'ellipse.

Remarquons encore sommairement : 1° que les diamètres de l'el-

lipse qui seraient à son grand axe :: $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$, lorsqu'il en existe de tels, sont des lignes isométriques; 2° que, si l'on imaginait un cône ayant son sommet en C dans la figure perspective (*fig.* 1, *pl.* XCIX) et pour génératrices les rayons CA, CB, CE, toutes les autres génératrices de ce cône et toutes les parallèles à ces génératrices seraient encore des *lignes isométriques;* mais puisqu'elles ne se distinguent pas comme telles immédiatement et au premier aspect, nous ne ferons de ces lignes aucun usage en pratique, et nous nous bornons à les signaler parmi d'autres encore.

Divisions de la circonférence de l'ellipse. Veut-on diviser la circonférence de l'ellipse isométrique en degrés ou en un nombre quelconque de parties de la division du cercle? On opérera par la méthode suivante justifiée page 610.

Sur le grand axe AG de l'ellipse (*fig.* 5, *pl.* C) comme diamètre, décrivez le demi-cercle AEFG; divisez sa circonférence en degrés ou en parties quelconques. B, C, D, E, F étant les points de division du cercle, tirez de ces points des perpendiculaires au grand axe, et leurs intersections *b, c, d, e, f* formeront, sur l'ellipse, les points de division cherchés.

On parviendrait difficilement ainsi à marquer, avec une suffisante exactitude, les divisions situées vers les extrémités du grand axe, mais alors on prend le petit axe pour diamètre d'un autre cercle et l'on opère d'une manière analogue à celle ci-dessus indiquée; on construirait, par ces méthodes, l'*ellipse rapporteur* (*fig.* 2, *pl.* C) dont nous avons parlé plus haut.

Quant à la mesure des distances suivant des directions qui ne point *isométriques*, on pourrait l'obtenir directement à l'aide d'ellipses concentriques (*fig.* 2, *pl.* C) divisant les diamètres isométriques en parties égales. Tous les autres diamètres se trouveraient ainsi divisés de manière à servir d'échelles pour toutes les lignes du dessin qui leur sont respectivement parallèles. Ainsi, dans le cube perspectif, les distances prises le long des grandes diagonales ou parallèlement à celles-ci seraient mesurées par les divisions 1, 2, 3, 4...... 10 du grand axe SWNE de la *figure* 2, *pl.* C, et celles qui coïncident avec la petite diagonale ou qui lui sont parallèles dans quelque plan que ce soit, seraient mesurées par les divisions correspondantes du petit axe NWSE.

Un peu de pratique suffira maintenant pour réussir avec certitude dans ce genre de dessin, dont les effets toujours satisfaisants et facilement obtenus deviennent bientôt un encouragement à mieux faire. On peut prendre une idée de ces effets (*fig.* 2, *pl.* XCIX) (*fig.* 6, *pl.* C), et sur la *planche* XVI, où j'ai mis en perspective isométrique une roue de marteau des forges de l'Ariége avec ses grossiers et solides organes. Les *planches* IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV qui représentent des entures et des assemblages, sont égale-

ment dessinées d'après ce mode de projection. Je doute que la méthode usuelle puisse rendre ces systèmes avec autant de clarté.

Est-ce à dire que la perspective isométrique doive être substituée à l'antique méthode des projections, à ce que, depuis 1770, on appelle en France la *Géométrie descriptive* (*)? On voit bien, en effet, poindre cette opinion dans le mémoire de *W. Farish*, et elle y est même assez adroitement motivée. Toutefois, je ne reproduirai ici ni ces motifs ni le développement de cette opinion, qui ne m'a pas paru suffisamment justifiée. La perspective isométrique pourra souvent venir en aide à la géométrie descriptive, l'éclaircir, l'expliquer en la *traduisant* comme je l'indique dans les *figures* 7 de la *pl.* C. Elle enseignera à *voir dans l'espace*, pour me servir d'une heureuse expression de l'illustre *Monge*, elle se prêtera facilement à la représentation géométrique de *certaines formes*; mais, ainsi que je l'ai dit déjà au commencement de cet article, c'est plutôt à la perspective ordinaire qu'à la méthode habituelle des projections qu'elle se substituera avec avantage et dans le seul genre de dessins que comporte l'art de l'ingénieur. On peut même avancer aujourd'hui que cette utile réforme a déjà commencé pour la France, et je m'applaudirai toujours d'y avoir contribué par le précepte, par l'exemple, et par une propagande plus active que féconde depuis tantôt vingt-cinq ans.

Du reste, la méthode ayant pris naissance en Angleterre, elle ne pouvait s'introduire en France et venir y troubler nos habitudes routinières sans y soulever, suivant l'usage, une question de priorité nationale. Après avoir longtemps repoussé la *perspective isométrique*, on ne l'adopte qu'en contestant à *Farish* le mérite de l'invention. *W. Farish* étant mort en 1837, je crois devoir répondre au moins sommairement aux deux arguments dont on n'est pas sorti jusqu'ici : les uns, et c'est le grand nombre, avancent que la perspective isométrique n'est rien autre chose que notre ancienne *perspective cavalière*; l'assimilation est très-inexacte, car dans la perspective cavalière d'un cube, par exemple, le plan du tableau n'est pas perpendiculaire à la diagonale. Les autres apportent au débat le tome V des machines de l'Académie de 1728 et montrent un laminoir à plomb (p. 52 de ce volume) en perspective qui n'a

(*) *Lagrange*, assistant à une leçon où *Monge* exposait les généralités de sa *Géométrie descriptive*, se leva en s'écriant avec une naïveté qui rendait l'exclamation plus plaisante : « *Je ne savais pas que je savais la géométrie descriptive!* » Lagrange n'y voyait en effet qu'une facile application de la méthode des coordonnées rectangulaires si familière aux géomètres. *Fourneau*, *Clairaut*, l'ingénieur *Fraizier* surtout (année 1738) avaient d'ailleurs, bien avant *Monge*, réuni, coordonné et réduit en principes les procédés répandus de tout temps parmi les charpentiers et les appareilleurs, procédés qu'ils désignent encore aujourd'hui sous le nom d'*art du trait*.

pas de lignes *fuyantes*, il est vrai ; mais ils ne remarquent pas que les lignes principales des plans horizontaux y sont *perpendiculaires* entre elles et qu'elles forment, avec la verticale, des angles de 45°, tandis que ces lignes, dans la perspective isométrique, se croisent, comme nous l'avons vu, sous des angles de 120° et sont inclinées de 30° sur la verticale, ce qui change tout le système. Ils ne voient pas enfin que l'avantage de la perspective isométrique tient, au fond, à ce que les trois faces du cube y donnent des projections toutes semblables entre elles. C'est ce que *Farish* a très-bien aperçu, et ce dont il a, le premier, à ce qu'il semble, tiré un parti avantageux.

Note sur l'ellipse isométrique (*fig.* 1, *pl.* C). Je crois utile de signaler, en terminant, quelques propriétés de l'ellipse isométrique, non-seulement curieuses, mais encore propres à faciliter les tracés. et que, en vue d'abréger sans doute, l'auteur a complétement négligées. L'équation au centre de l'ellipse isométrique est

$$y^2 + \frac{1}{3} x^2 = \frac{1}{2} r^2 = b^2$$

La distance c du foyer F au centre O est égale au rayon isométrique

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = r = \mathrm{OT} = \mathrm{OD}$$

propriété qui donnera immédiatement les foyers F de l'ellipse en décrivant du centre O, avec $\mathrm{OT} = r$ qui est toujours connu, l'arc de cercle TF qui coupe la grande diagonale au foyer F.

La proportionnalité des diagonales AB CD aux axes $\mathrm{MN} = 2a$ et $\mathrm{PQ} = 2b$ montre, d'ailleurs, que l'extrémité M ou Q de l'un des axes étant déterminée, on obtiendra l'extrémité Q ou M de l'autre axe en menant une parallèle MQ à la direction tt' des rayons isométriques.

Appelant $x_1\, y_1$ les coordonnées des points importants Tt' $\mathrm{T}'t$, extrémités des rayons isométriques, on a

$$x_1 = \frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{ab}{r}\,;\quad y_1 = \frac{1}{2} r$$

$$x_1 y_1 = \frac{1}{2}\, ab$$

Quant aux rayons vecteurs $v\,v'$ de ces points, l'un d'eux est égal à la différence des demi-axes, l'autre à leur somme, et leur produit égale le carré du rayon isométrique

$$v' = a - b\,;\quad v = a + b \quad \text{et} \quad v\,v' = r^2 = c^2$$

La tangente TB, en ces points, est égale au rayon isométrique, et la sous-tangente SB est égale à l'abscisse

$$\text{tang.} = r;\ \text{sous-tang.} = r\sqrt{\frac{3}{4}} = x_1.$$

de sorte que l'ordonnée $TS = y_1$ coupe la demi-diagonale OB en deux parties égales.

La sous-normale est d'ailleurs égale à la moitié de la normale en ces points

$$\text{normale} = r\sqrt{\frac{1}{3}};\ \text{sous-norm.} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

et le rayon de courbure ρ y est le double de la normale

$$\rho = 2r\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Quant au paramètre p de l'ellipse, il est le tiers de son grand axe, et le rayon de courbure R' à l'extrémité du grand axe, est la moitié de ce paramètre :

$$p = \frac{2}{3}a;\quad R' = \frac{1}{3}a$$

Le plus grand rayon de courbure R ou celui de l'extrémité du petit axe, est égal à une fois et demie ce petit axe :

$$R = 3b.$$

L'ellipse isométrique jouit de beaucoup d'autres propriétés singulières sur lesquelles je n'insiste pas ici. Je crois pourtant devoir remarquer qu'elle est un *pendule simple* (p. 1256); c'est-à-dire que, si elle oscillait dans son plan autour de P, ses oscillations seraient *synchrones* avec celle d'un pendule simple qui aurait pour longueur $PQ = 2b =$ petit axe.

PESANTEUR. Voyez *Chute des graves*, p. 389 et p. 795.

PESON. Voyez la page 110 de l'article *Balances*.

PHILIBERT DELORME, ingénieur et architecte, né à Lyon au commencement du XVIe siècle, mort à Paris le 9 février 1577, inventeur d'un système de charpentes qui porte son nom (p. 735). Il a élevé les châteaux d'Anet, de Meudon, de St-Maur et celui des Tuileries.

PHOSPHORE. Corps qui ne paraît devoir rester que très-provisoirement rangé parmi les corps simples. Il a été découvert, en 1669, par un bourgeois de Hambourg nommé *Brandt*, qui ne le cherchait pas, et ce, aux lieu et place de la pierre philosophale qu'il

cherchait dans le résidu d'une distillation d'urine humaine putréfiée. Il a été découvert une seconde fois, quelques années plus tard, par *Kunckel*, et c'est ce dernier qui l'a nommé *phosphore* (porte-lumière).

Le phosphore est solide à la température ordinaire, jaunâtre, corné, translucide et flexible comme la cire, il se colore parfois et spontanément en rouge sous l'influence des rayons solaires. Il s'enflamme d'autant plus aisément à l'air, que la température extérieure est plus élevée ; il s'y brûle en répandant une épaisse fumée blanche et dégage une légère odeur d'ail ; il luit dans l'obscurité, ce qui lui a valu son nom. Son poids spécifique est 1.77 ; il est donc plus pesant que l'eau ; et comme il est insoluble dans ce liquide, on l'y plonge pour le conserver. Il est fusible vers 35°, et dès lors, dans l'eau portée à cette température ; il bout entre 200 et 300 degrés.

Le phosphore, seul ou combiné avec le fer, le cuivre, le cobalt et le nickel, se dissout aisément dans l'acide nitrique et l'eau régale qui le convertissent en acide phosphorique ; l'acide hydrochlorique ne le dissout pas. Il est soluble dans une dissolution de potasse pure. Il forme avec l'oxygène plusieurs acides dont la composition est indiquée page 1220.

Le phosphore se tire aujourd'hui des os des animaux par un procédé pour lequel je renvoie à l'article *Phosphore* du *Dictionnaire technologique* rédigé par M. *Payen*. L'analyse des minéraux qui le contiennent est assez délicate ; j'en ai donné une idée, page 39.

PIERRES DE CONSTRUCTION. L'art des constructions divise les pierres en pierres argileuses A, calcaires B, gypseuses C, siliceuses D, diverses E.

A *Les pierres argileuses*, parmi lesquelles on classe les schistes micacés et les ardoises, ne font point effervescence par l'action des acides ; elles n'étincellent pas sous le choc du briquet. Leur résistance et leur dureté sont très-variables ; leur adhésion aux mortiers assez grande par les faces qui ne sont point polies. Elles sont généralement altérables à l'air et à l'eau. Leur poids est d'environ 2600 kil. le mètre cube. Un centimètre cube de ces pierres s'écrase sous des pressions comprises entre 420 et 680 kil.

B *Pierres calcaires*. Il y en a une très-grande variété. Elles font effervescence avec les acides, n'étincellent pas sous le choc du briquet ; elles sont décomposables au feu, qui en dégage l'acide carbonique et les transforme en chaux plus ou moins pure. Leur mètre cube pèse de 2000 à 2700 kil., à l'exception de la lambourde et du tufau, pour lesquels il se réduit à environ 1500. Leur résistance à l'écrasement diminue, en général, avec ce poids ; elle est comprise, pour un centimètre cube, entre 133 kil. et 788 kil., la lam-

bourde et le tufau exceptés pour lesquels elle s'abaisse à 23 k. Leur adhésion aux mortiers augmente avec la porosité et diminue avec le poli. Les variétés tendres absorbent l'humidité atmosphérique et s'écaillent à la surface.

C *Pierres gypseuses.* Elles ne font point effervescence avec les acides, n'étincellent pas sous le choc du briquet. Elles sont friables, déliquescentes, altérables au feu.

D *Pierres siliceuses.* En général, elles ne font point effervescence par l'action des acides, et elles étincellent sous le choc du briquet. Elles comprennent un grand nombre de variétés parmi lesquelles on distingue, savoir :

Les *porphyres* et les *granits*, dont le mètre cube pèse de 2780 à 2880. Le centimètre cube s'écrase sous des pressions variables de de 423 kil. à 2600 kil. Ils éclatent souvent par le choc, sont inaltérables à l'air et à l'eau, à moins que le *feldspath* y domine, et conviennent, dès lors, aux travaux sous l'eau. Ils sont altérables à un feu violent et n'adhèrent que faiblement aux mortiers.

Les meulières. Excellentes pierres de construction, inaltérables à l'air, à l'eau, à la gelée et souvent au feu. Forte adhésion aux mortiers.

Les grès. Inaltérables à l'air, à la gelée, quelquefois altérables à l'eau, résistent assez bien au feu. Faible adhésion aux mortiers. On a, pour le grès dur: poids du mètre cube, environ 2500 kil., résistance minimum d'un centimètre cube à l'écrasement, 813 kil., et pour le grès tendre, poids 2400 à 2500 k., et résistance très-variable de $2^k.5$ à 77 k.

E *Pierres diverses.* Elles comprennent beaucoup de variétés, et l'on y fait entrer des espèces qui se classeraient aussi bien dans les divisions déjà énumérées. On distingue principalement, parmi les pierres diverses, savoir :

Les *pierres* dites *volcaniques* : basaltes, laves, pouzzolanes, amphiboles, pyroxènes, trapps — très-dures — faible adhésion aux mortiers — inaltérables à l'air, à l'eau, à la gelée — fusibles à un feu violent. Le poids du mètre cube des basaltes varie de 2000 à 3000 k. La résistance d'un centimètre cube à l'écrasement varie de 1900 à 2000 kilog.

Pierres talqueuses. Friables, généralement infusibles.

Résistance des pierres à l'écrasement. Je me suis contenté de donner les charges extrêmes sous lesquelles on a écrasé un centimètre cube de diverses pierres. On trouve dans une foule d'ouvrages des tables assez étendues de résultats analogues que je ne reproduis pas ici, où elles pourraient devenir la cause de graves erreurs. L'ingénieur chargé d'une construction doit, en effet, constater par lui-même la résistance spéciale des matériaux qu'il emploie ; il ne peut imprudemmentse fier à des résultats moyens.

Si les matériaux dont il doit faire emploi sont d'un usage général dans la localité, l'examen des plus hautes et des plus anciennes constructions qui y existent suffira souvent pour l'éclairer sur la limite des charges qu'il convient de leur faire porter. Dans le cas contraire, il en soumettra quelques échantillons taillés en cubes à des pressions croissantes jusqu'à celle qui produira l'écrasement, et le *dixième* de celle-ci sera la limite supérieure de la charge qu'il devra faire porter sur une surface égale à la base du cube d'essai.

Gélivité des pierres. C'est encore à dessein que je n'indique pas le traitement par le *sulfate de soude* pour reconnaître le degré de gelivité des pierres. Ce procédé ingénieux a souvent fait considérer comme gélives des pierres qui ne l'étaient point, et quelquefois aussi la réciproque a eu lieu.

Analyse des pierres. 1° Faire rougir un fragment au feu, le plonger rouge dans l'eau froide pour *l'étonner* et faciliter la pulvérisation; 2° tenir compte de ce que la pierre gagne ou perd en poids à cette opération; 3° réduire en poudre impalpable; 4° traiter cinq grammes de cette poudre par la potasse au creuset d'argent (p. 33), ce qui donnera la *silice*; 5° achever l'opération, comme il est dit pages 35 et 36 de l'article *Analyse*, ce qui donnera l'*alumine*, la *chaux*, la *magnésie*, l'*oxyde de fer* et de *manganèse*, constituants principaux des pierres. Les pierres reconnues comme *calcaires* (B) pourront être analysées par le procédé de la page 301.

Si l'on ne retrouvait pas, à quelques centièmes près, le poids de la matière sur laquelle on a opéré, c'est que la pierre contiendrait *probablement* de la *potasse* ou de la *soude*, ou de la *lithine*, et il y aurait à craindre que, employée dans les constructions, elle y devînt altérable à l'air ou à l'eau.

Emploi des pierres de construction en France. Les monuments de *Lyon* sont construits en *calcaires secondaires*; *St-Etienne*, de même que Bristol et Edimbourg, en *grès* grisâtre de la formation houillère dits *grès houillers*; *Strasbourg*, ou du moins sa cathédrale, en *grès rouge* des Vosges; *Besançon*, *Nancy*, *Lunéville*, *Metz*, *Dijon*, *Bourges*, *Poitiers*, *Niort*, *La Rochelle*, *Bayeux*, *Caen* en *calcaire jurassique*; *Orléans*, *Angers*, *Tours*, *Saumur* en *craie tufau*; *Rouen* et le *Havre*, partie en *craie tufau*; *Paris*, en calcaire grossier du terrain tertiaire. Le *calcaire compact* homogène aux monuments; la *pierre meulière* aux égouts.

PILES DE SPHÈRES ÉGALES. On range habituellement les sphères en piles pyramidales à base carrée ou triangulaire, ou en piles oblongues à base rectangulaire, et du nombre n d'assises horizontales, on peut déduire immédiatement le nombre S de sphères contenues dans la pile.

Pile pyramidale à base carrée. n étant le nombre de tranches ho-

rizontales, y compris la plus élevée qui ne contient qu'*une* sphère, on a facilement

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

n indique aussi combien il y a de sphères sur un côté de la base. n étant 10, on aurait $S = 385$.

Pile pyramidale à base triangulaire. On a

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$n = 1 \quad \text{donne} \quad S = 220$$

Pile oblongue à base rectangulaire. Les tranches sont ici des rectangles, à l'exception de la plus élevée qui ne contient qu'une rangée. m étant le nombre de sphères de cette rangée, celui de la n^{me} tranche contiendra $n(m+n-1)$ sphères ou n rangées, ayant chacune $(m+n-1)$ sphères, la pile totale en aura S

$$S = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$$

Si l'on suppose $m = 10$ et $n = 10$, on trouve $S = 880$.

Lorsque les piles ne sont pas entières, on les complète par la pensée; on calcule la pile entière E, puis celle qu'il a fallu ajouter A : la différence E—A est la pile tronquée.

Nombres de tranches par pile. Connaissant S pour chaque pile complète, on peut avoir à trouver n. Or, pour la *pile à base carrée*, n sera la racine cubique du plus grand cube contenu dans 3 S. Pour la *pile à base triangulaire*, n sera la racine cubique du plus grand cube contenu dans 6 S. Quant à la pile oblongue, comme il entre dans son équation trois quantités différentes, il faut connaître deux d'entre elles pour obtenir la troisième.

PISÉ. Genre de construction économique qui convient parfaitement à certaines dépendances des usines, telles que halles à charbon, écuries, magasins, baraquements, ateliers de charronnage, forges de maréchal, etc., etc. ; mais qui ne peut être adopté que dans les localités où l'on n'a à redouter ni des gelées ni des pluies d'une longue durée.

Le pisé exige une *terre franche* grasse, collante, mais en même temps un peu graveleuse. L'argile proprement dite ne conviendrait pas parce qu'elle se fendillerait au soleil; les terres végétales un peu *fortes* sont au contraire très-convenables. La terre doit être passée à la claie, pour la débarrasser des racines et des gros cailloux. Elle a ordinairement, en sortant de la fouille, le degré d'humidité nécessaire : ce que l'on reconnaît à ce qu'elle fait corps en la serrant dans

la main. Si elle est trop sèche, on l'humecte avec le moins d'eau possible, bien également, et on la corroie. Enfin, il faut éviter pour le travail les temps pluvieux et les grandes sécheresses.

Les constructions en pisé doivent reposer sur une fondation en pierre ou en brique, qui s'élève d'environ 0m.50 au-dessus du sol, pour mettre les murs à l'abri de l'humidité.

Voici maintenant comment les murs se construisent par parties de niveau au-dessus de cette fondation. On dispose au-dessus d'elle un coffrage formé de quatre planches, deux longues d'environ trois mètres, les deux autres ayant en longueur l'épaisseur qu'on veut donner au mur, soit 0m.50 à 0m.60 environ. Ces quatre planches ont à peu près 0m.80 de hauteur. Il résulte de leur arrangement une sorte de caisse n'ayant ni dessus ni fond. Pour la maintenir dans sa forme, on passe d'abord par dessous et en travers du mur quelques chevrons horizontaux de 0m.08 d'équarrissage, et qui dépassent les faces du mur. Ils portent vers chaque bout une mortaise, dans laquelle on engage les tenons d'autres petits chevrons verticaux d'environ un mètre de long, et qui s'élèvent dès lors au-dessus de la partie supérieure de la caisse. On relie leurs bouts supérieurs par des cordes qui se croisent ainsi au-dessus de la caisse. Pour s'opposer au rapprochement des planches qu'elles tendent à opérer, on *étrésillonne* l'encaissement en dedans. Cela fait, on étend sur le mur et au fond de la caisse un lit de mortier ; puis *un* terrassier débite la terre à *deux* manœuvres, qui la portent dans des paniers à *trois piseurs*, qui se sont partagé le travail à faire dans l'intérieur du moule. Cette terre, versée dans la caisse ou moule, est d'abord battue par les piseurs avec leurs pieds, puis avec une masse de bois dur armée d'un manche. On procède couche par couche, et l'on bat jusqu'à ce que chaque couche ait été réduite à la moitié de son épaisseur. On enlève les étrésillons intérieurs à mesure que les couches s'élèvent dans la caisse. Quand, de cette manière, et à l'aide de plusieurs caisses semblables, on a fait un rang de niveau au-dessus de la fondation, on délie les cordes, on dispose de nouveaux chevrons horizontaux dans des tranchées laissées à la partie supérieure de la couche ; puis, sur ces chevrons, appelés *lançonniers*, on construit, de la même manière, un nouveau moule, et ainsi de suite. On enlève les premiers *lançonniers*, en les chassant perpendiculairement à la surface du mur, dans lequel ils laissent dès lors des ouvertures que l'on ne bouche guère que six mois ou un an plus tard.

Lorsque la façon d'un rang de niveau exige que l'on déplace horizontalement le moule ou que l'on en dispose plusieurs les uns à la suite des autres, il est clair que l'une des faces doit être enlevée. Il convient, d'ailleurs, de donner à tous les joints montants d'un rang de niveau une inclinaison d'environ 60°. On incline dans l'autre sens les joints montants du rang supérieur.

Enfin, pour donner plus de solidité et de liaison aux encoignures, les assises des murs qui les forment doivent se surmonter et se croiser alternativement. La solidité augmente lorsque tous les joints quelconques se lient par du mortier.

Pour les portes et fenêtres, on bâtit les jambages et le linteau en pierres ou en briques, et quand cette construction est faite, on continue le mur latéralement en liant le pisé aux pierres par du mortier.

La plus haute assise ne reçoit que la moitié de la hauteur des autres.

S'il doit y avoir des planchers, on établit des sablières en bois sur le pisé pour recevoir les bouts des charpentes; même disposition pour le comble.

On laisse sécher six mois au moins avant de crépir, et ce crépissage se fait avec du mortier clair en commençant par le haut; on l'étend avec un balai.

Dans les constructions ordinaires, on donne un soixantième de talus (fruit) aux murs et une épaisseur de $0^{m}.50$ à $0^{m}.60$.

Ces constructions sont très-durables lorsqu'elles ont été bien faites; je pense qu'on ne devra y employer que des ouvriers exercés qu'on trouvera, du reste, en grand nombre dans les départements du Rhône, de l'Ain et de l'Isère.

D'après *Francœur* (*Dictionnaire technologique*), *un* terrassier, *deux* manœuvres et *trois* piseurs peuvent faire ensemble, par jour, douze mètres carrés d'ouvrage, et la façon d'un mur en pisé, près de Lyon, ne revient pas à un franc le mètre carré, lorsque l'on est voisin du lieu qui fournit la terre (voyez les ouvrages de *Cointereaux*).

PIVOTS. La résistance éprouvée par les corps qui tournent sur des pivots, à la manière des aiguilles aimantées, a été l'objet de quelques expériences de *Coulomb*, dont je résume ici les principaux résultats.

Les pivots étaient en acier, les *chapes* et les *plans* de support ont été en *grenat*, *agate*, *cristal de roche*, *verre* ou *acier*.

Le mode d'expérimentation consistait : à faire pirouetter le corps tournant sur la pointe de son pivot; — à observer très-exactement, au moyen d'une montre à secondes, le temps que le corps employait à accomplir les quatre ou cinq premiers tours; — à déduire de cette observation ce que Coulomb appelle un *tour moyen* qui lui donnait la vitesse initiale; — puis, à compter le nombre de tours accomplis jusqu'à ce que le mouvement eût cessé. Toutes les précautions avaient d'ailleurs été prises pour n'avoir point à tenir compte de la résistance de l'air ou pour la rendre négligeable.

Cela posé, b étant la fraction de tour accomplie pendant la *première* seconde du mouvement du corps tournant, et X le nombre total de

tours accomplis depuis l'origine du mouvement jusqu'à son extinction, Coulomb a trouvé que le rapport $\frac{b^2}{X}$ était sensiblement constant et égal pour un pivot d'acier et des plans de

	grenat,	agate,	cristal de roche,	verre,	acier,
$\frac{b^2}{X} =$	$\frac{1}{1029}$	$\frac{1}{847}$	$\frac{1}{784}$	$\frac{1}{579}$	$\frac{1}{487}$

de sorte que les effets produits par le frottement sont comparativement et respectivement

1	1.214	1.313	1.717	2.257

c'est-à-dire plus que doubles pour l'acier que pour le grenat. Voyez, pour les gros pivots, l'article *Axes*, p. 96.

PLAN INCLINÉ. D'après *Lagrange*, ce serait à *Stevin* que reviendrait le mérite d'avoir, le premier, déterminé le rapport de la force F qui retient un corps sur un plan incliné au poids absolu P de ce corps, mais pour le seul cas où la direction de la force est parallèle à la longueur du plan. Quoique la solution de *Stevin* paraisse fondée sur une considération indirecte, elle est assez ingénieuse et assez intéressante au point de vue historique pour que j'aie cru devoir l'adopter ici. Elle a d'ailleurs l'avantage d'être indépendante de toute théorie antérieure.

1. *Stevin* considère un triangle solide ABC (*fig.* 2, *pl.* XCVII) posé sur sa base horizontale AB. Il imagine qu'une chaîne uniforme enveloppe les deux côtés h, l de ce triangle de manière que toute sa partie supérieure se trouve appliquée à ces deux côtés, tandis que la partie inférieure pend librement au-dessous de la base horizontale AB ou b.

Il remarque que, en supposant que la chaîne puisse glisser, elle doit cependant demeurer en repos. En effet, si elle commençait à glisser d'elle-même dans un sens, elle devrait continuer à glisser toujours, puisque la même cause de mouvement subsisterait, la chaîne se trouvant, à cause de l'uniformité de ses parties, placée toujours de la même manière sur le triangle; — d'où résulterait une *rotation perpétuelle*; ce qui est absurde.

Il y a donc équilibre nécessaire entre toutes les parties de la chaîne.

Or, on peut regarder la portion pendante au-dessous de la base comme étant déjà en équilibre d'elle-même. Donc, il faut que la tendance à glisser de tous les poids appuyés le long de l égale la tendance à glisser de tous les poids appliqués le long de h. Donc, si p est le poids du mètre de chaîne, pl et ph seront les poids totaux de chaîne en contact avec l et h. Soit m la fraction du poids $pl = P$ qui exprime sa tendance $F = mpl$ au glissement le long

de l; CB $= h$ étant vertical, la tendance à descendre le long de ce côté sera simplement le poids ph; or, nous venons de voir que l'on avait :

$$mpl = ph \quad \text{ou} \quad F = mP \quad \text{donc} \quad m = \frac{h}{l} \quad \text{et}$$

$$F = P.\frac{h}{l}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

c'est-à-dire que *la tendance* F *d'un corps à descendre le long d'un plan incliné est une fraction du poids* P *de ce corps exprimée par le quotient de la hauteur par la longueur du plan* (*); en d'autres termes, le travail Fl qu'il faudra dépenser pour élever un poids P le long de la pente l est le même que celui Ph qu'il faudrait dépenser pour l'élever de la hauteur h du plan; $Fl = Ph$.

2. *Mouvement sur le plan incliné d'un angle* α (*fig.* 3, *pl.* XCVII). Si le corps dont le poids est P et la masse $\frac{P}{g}$ est abandonné à lui-même sur le plan sans vitesse initiale, il tendra à descendre; et égalant sa force d'inertie $\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$ à la force constante

$$F = P\frac{h}{l} = P \sin.\alpha$$

qui entraîne son centre de gravité, on a pour obtenir la valeur de l'*accélération* $\frac{dv}{dt}$:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P \sin.\alpha \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = g \sin.\alpha = g\frac{h}{l}$$

de sorte que, abstraction faite du frottement et supposant que le corps glisse sans rouler, le mouvement de descente le long du plan est exprimé par les formules de la chute des graves dans le vide (p. 338) en y mettant simplement l'accélération $g \sin.\alpha = g\frac{h}{l}$ à la place de g.

(*) *Voy.* les éléments de statique et les additions à la statique de *Stevin*, dans les *Hypomnemata mathematica*, imprimés, à Leyde, en 1605, et dans les œuvres de *Stevin*, traduites en français et imprimées, en 1634, par les *Elzevirs*. *Galilée*, vers 1634, a donné le premier une démonstration *directe* des conditions de l'équilibre sur le plan incliné pour le cas où la puissance qui soutient le poids est parallèle à la longueur du plan. — *Voy.* les Mécaniques de *Galilée*, publiées en français, par le père *Mersenne*, en 1634. « Il eût été facile à *Galilée*, dit *Lagrange*, de résoudre aussi le cas où la puissance a une direction oblique au plan, mais ce nouveau pas n'a été fait que quelque temps après par *Roberval*; et ce, dans un *Traité d'Harmonie* de *Mersenne*, imprimé en 1636, où personne, ajoute-t-il, ne s'aviserait d'aller chercher cette solution. »

Ainsi V étant la vitesse acquise parallèlement à la pente au bout du nombre de secondes t, et L la longueur parcourue sur le plan avant que le corps ait acquis cette vitesse, on a les relations :

$$L = \frac{V^2}{2g\sin.\alpha} = \frac{1}{2} g \sin.\alpha\, t^2 = \frac{1}{2} V t \dots\dots\dots (2)$$

$$V = \sqrt{2g\sin.\alpha.\, L} = g\sin.\alpha\, t = \frac{2L}{t} \dots\dots\dots (3)$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g\sin.\alpha}} = \frac{2L}{V} = \frac{V}{g\sin.\alpha} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{H}{L} = \sin.\alpha = \frac{V^2}{2gL} = \frac{2L}{gt^2} = \frac{V}{gt} \dots\dots\dots (5)$$

3. Donc un corps qui, sans rouler et sans frotter, a parcouru la longueur L d'un plan incliné, a acquis la même vitessse $V = \sqrt{2gH}$ que s'il était tombé librement de la hauteur H du plan; de sorte que les vitesses acquises par des corps qui ont descendu des plans quelconques de même hauteur sont égales entre elles et ne diffèrent que par leurs directions.

4. Deux corps (*fig. 4, pl.* XCVII) partis en même temps du sommet commun A de deux plans inclinés AM, AN, arrivent en même temps aux extrémités D, C, des perpendiculaires BC, BD, abaissées sur ces plans d'un même point B de leur hauteur commune. Car, si l'on fait $l = AD$, $l' = AC$, et $AB = 2R$, comme les triangles sont rectangles, on a $l = 2R \sin.\alpha$ et $l' = 2R \sin.\alpha'$, et la formule (4) donne, pour les temps t et t', $t = t' = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$.

5. Toutes les cordes AD, AC. . . menées par les extrémités du diamètre vertical $AB = 2R$ d'un cercle sont parcourues dans un même temps $t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$ égal à la durée de la descente le long du diamètre 2R.

6. Si le mobile recevait de haut en bas une vitesse initiale V_0, elle s'ajouterait évidemment à la vitesse $g\sin.\alpha t$ due à la pente, et cette somme formerait la vitesse totale V ; d'où :

$$V = V_0 + g\sin.\alpha t \dots\dots\dots (6)$$

$$L = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin.\alpha = \frac{V^2 - V_0^2}{2g\sin.\alpha} \dots\dots\dots (7)$$

7. *Roulement.* On peut, sans crainte d'erreur sensible, faire abstraction du frottement, lorsqu'au lieu de glisser, le corps roule en descendant la pente; mais les formules (2 à 5) n'ont plus lieu

ou, du moins, elles se modifient. En effet, la composante du poids P du corps qui est parallèle au plan ou P sin. α a, dans ce cas, un double travail à effectuer, savoir : 1° un travail de translation ; 2° un travail de rotation ; et l'on prévoit dès lors que les vitesses acquises et les espaces parcourus par un corps qui roule seront toujours moindres, toutes choses égales d'ailleurs, que s'il descendait la pente, sans frottement, en vertu d'un simple mouvement de transport parallèle. Prenons pour exemple le cas d'un cylindre plein et homogène.

8. *Cylindre roulant.* Soient r son rayon, — l sa longueur, — ϖ le poids du mètre cube de sa substance : — $\pi r^2 l$ sera son volume et $\varpi\pi r^2 l$ son poids P. Son moment d'inertie, par rapport à son axe de figure, sera donc $\frac{P r^2}{2g}$ ou celui que donnerait la moitié de sa masse transportée à la surface.

Si l'on appelle Ω sa vitesse angulaire autour du même axe pendant sa descente à un instant quelconque, Ωr sera au même instant la vitesse de translation V de son centre de gravité parallèlement au plan ; sa force vive de translation sera donc $\frac{P}{g} V^2$ et sa force vive de rotation $\frac{P r^2}{2g} \Omega^2 = \frac{P V^2}{2g}$. Egalant la moitié de ces forces vives au travail P sin. $\alpha \cdot$ L de la composante du poids parallèlement au plan, il vient

$$V^2 = \frac{4}{3} g \sin.\alpha . L \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

ce qui donne, pour la valeur de l'accélération du centre de gravité,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin.\alpha \quad \text{. . . . .} \quad (9)$$

Il suffira donc de remplacer, dans les formules (2 à 5), le facteur g sin. α par $\frac{2}{3} g$ sin. α, pour qu'elles expriment toutes les circonstances du mouvement d'un cylindre plein et homogène parti du repos et roulant sans glisser sur la pente d'un plan incliné, en vertu de son poids.

On trouverait ainsi que ce cylindre roulant ne parcourrait, dans un temps donné, que les deux tiers du chemin qu'il eût librement parcouru dans le même temps d'un mouvement de transport parallèle au plan.

9. On conçoit que, dans certaines conditions d'inclinaison et certains états des surfaces du plan et du cylindre, celui-ci pourrait ou rouler, ou rouler et glisser à la fois, ou glisser seulement ; mais on déterminerait toujours le mouvement de rotation, en enveloppant le cylindre d'un ruban dont une extrémité serait attachée à un point fixe, et dont le plan serait parallèle à celui du plan incliné.

Lorsque la masse de la partie de ce ruban qui se déroule à la surface peut être négligée, on détermine facilement sa tension T pendant le mouvement, en remarquant qu'elle doit être celle qui communiquerait au cylindre la force vive de rotation, dont il est, en effet, animé autour de son axe. Or, le mouvement du cylindre étant uniformément accéléré, la tension T du ruban doit être constante, et l'on trouve en effet

$$T = \frac{1}{3} P \sin.\alpha \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

de sorte que si le plan était vertical, la tension constante se réduirait au tiers du poids du cylindre.

10. *Si le cylindre roulant était creux* et pouvait être assimilé à une pure surface cylindrique, qui toutefois ne serait pas dénuée de son poids P, on aurait, pour l'accélération et pour la tension du fil ou ruban,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} g \sin.\alpha \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} P \sin.\alpha \ldots \ldots \ldots (11)$$

Ainsi l'accélération est réduite pour ce cas à la moitié de celle que supposent les formules (2 à 5).

11. *Sphères roulantes.* Je ne reprendrai pas le calcul pour ce cas, me contentant d'indiquer les accélérations et les tensions lorsque la sphère est pleine et homogène, et lorsqu'étant creuse, elle peut être considérée comme une surface sphérique non dénuée de poids. On a

$$\text{Sphère pleine} \; \frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \sin.\alpha; \text{ et } T = \frac{2}{7} P \sin.\alpha \ldots (12)$$

$$\text{Sphère creuse} \; \frac{dv}{dt} = \frac{3}{5} g \sin.\alpha; \text{ et } T = \frac{2}{5} P \sin.\alpha \ldots (13)$$

12. Ainsi ces sphères et ces cylindres prendraient, en roulant sur un même plan incliné, des vitesses très différentes, circonstance dont on n'a pas tenu le moindre compte dans quelques expériences sur la résistance de l'air au mouvement des corps, ce qui a faussé tous les résultats. Enfin, sans insister plus longuement sur ces théories trop négligées dans la pratique, parce qu'elles n'entrent plus dans l'enseignement de nos écoles, je remarque que de deux cylindres de même grandeur, de même forme et de même poids, l'un homogène, l'autre ayant la plus grande partie de son poids accumulé vers la surface, ce sera le cylindre homogène qui, en roulant, parviendrait le premier au bas d'un même plan incliné; car c'est celui dont le moment d'inertie est le plus petit.

Influence du frottement de glissement. Lorsqu'au lieu de rouler, les corps glissent sur le plan, on ne peut plus, dans la pratique du

moins, négliger le frottement énergique que ce mouvement développe. Supposons d'abord (*fig.* 3, *pl.* XCVII) que

13. *Le corps glisse de lui-même sur le plan :* c'est supposer que la verticale GP, qui passe par son centre de gravité, passe aussi entre les limites de contact de sa base avec le plan, sans quoi le corps se renverserait ou tournerait, puisque nous admettons un frottement à sa base. Soit $f = \text{tang.}\,\varphi$ le rapport du frottement à la pression ou φ l'angle du frottement : P étant le poids du corps, $P \sin.\alpha$ sera la composante de ce poids qui tend à le faire glisser parallèlement au plan, $P \cos.\alpha$ la composante avec laquelle il presse le plan et $f.\,P\cos.\alpha = P\cos.\alpha\,\text{tang.}\,\varphi$ l'énergie du frottement supposée proportionnelle à la pression. Égalant la résultante des forces mouvante et résistante à la force d'inertie, on aura donc

$$P\sin.\alpha - fP\cos.\alpha = \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{P\sin.(\alpha-\varphi)}{\cos.\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nous négligerons ici et dans ce qui suivra les mouvements de rotation qui pourraient naître de ce que le point d'application du frottement ne se confond pas avec celui des autres forces. Nous aurons donc en général pour la valeur de l'*accélération,*

$$\frac{dv}{dt} = g\cos.\alpha\,[\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\varphi] = \frac{g\sin.(\alpha-\varphi)}{\cos.\varphi} \quad . \quad . \quad (15)$$

et cette valeur mise à la place de $g\sin.\alpha$ dans les formules (2) à (5) ou intégrée directement ferait connaître toutes les circonstances du mouvement. On en déduirait, par exemple, V_0 étant la vitesse que le corps posséderait au moment où le temps commence,

$$V = V_0 + \frac{\sin.(\alpha-\varphi)}{\cos.\varphi}\,gt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$L = V_0 t + \frac{\sin.(\alpha-\varphi)}{\cos.\varphi}\,\frac{1}{2}\,gt^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Tant que l'angle α du plan sera plus grand que celui φ du frottement, le mouvement sera uniformément accéléré. Si ces angles sont égaux, le mouvement est uniforme et le corps conserve la vitesse initiale V_0 qu'il avait à l'origine du temps. Enfin, si α est $<\varphi$, les seconds termes des équations (16) et (17) devenant négatifs, le mouvement, d'abord uniformément retardé, devient enfin nul, et la vitesse V du mobile devient 0, au bout d'un temps T' égal à

$$T' = \frac{V_0\cos.\varphi}{g\sin.(\varphi-\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

le corps ayant alors parcouru sur le plan, depuis l'origine du temps T', une longueur L' égale à

$$L' = \frac{V_0^2}{2g\cos.\alpha\,[f - \text{tang.}\,\alpha]} = \frac{V_0^2\cos.\varphi}{2g\sin.(\varphi - \alpha)} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (19)$$

14. *Le corps remonte le plan* (*fig.* 5, *pl.* XCVII). Supposons maintenant que le corps remonte le plan ; ce qui ne peut évidemment avoir lieu sans qu'une force auxiliaire Q le tire ou le pousse en sens inverse de la pente. Appelons θ l'angle de la direction de la force Q avec la ligne de plus grande pente du plan ; négligeons encore comme ci-dessus tous les effets de rotation qui pourraient naître de la position des points d'application des forces, circonstance dont il est facile de tenir compte dans la pratique où l'on connaît toujours d'avance la forme du corps mobile qui reste ici à peu près indéterminée.

Cela posé, pour que le corps remonte la rampe, il faut évidemment que la composante $Q\cos.\theta$ du tirage parallèlement au plan soit en équilibre avec les forces suivantes : 1° la composante du poids du corps parallèle au plan ou $P\sin.\alpha$ qui tend à le faire descendre ; 2° l'énergie du frottement à la base du corps, énergie proportionnelle à la pression ($P\cos.\alpha - Q\sin.\theta$) normale au plan ; 3° enfin la résistance de la masse à l'accélération ou sa *force d'inertie*. Donc

$$Q\cos.\theta = P\sin.\alpha + f[P\cos.\alpha - Q\sin.\theta] + \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} \;.\;. \quad (20)$$

expression qui (p. 863) revient à celle-ci :

$$Q\,\frac{\cos.(\theta - \varphi)}{\cos.\varphi} = \frac{P\sin.(\alpha + \varphi)}{\cos.\varphi} + \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (21)$$

et d'où l'on tirera pour la valeur de l'accélération γ

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{P\cos.\varphi}\,[Q\cos.(\theta - \varphi) - P\sin.(\alpha + \varphi)] \;.\;. \quad (22)$$

ce qui conduira finalement à la valeur de la vitesse V et du chemin parcouru L en fonction du temps, puisque l'on a

$$V = \gamma t \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{2}\gamma t^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (23)$$

15. Cette accélération deviendrait évidemment nulle, et le mouvement acquis deviendrait uniforme si l'effort Q du tirage, d'abord plus grand au moment du départ, parvenait à une valeur constante telle qu'on eût

$$Q\cos.(\theta - \varphi) - P\sin.(\alpha + \varphi) = 0, \quad \text{ou} \quad Q = \frac{P\sin.(\alpha + \varphi)}{\cos.(\theta - \varphi)} \;.\;.\;. \quad (24)$$

et si l'on avait alors intérêt à diminuer l'effort du tirage Q, on

remarquerait que Q serait minimum, si le dénominateur cos.$(\theta - \varphi)$ était maximum. Or le plus grand des cosinus étant 1 et répondant à l'angle zéro, Q serait minimum si l'on avait $\theta - \varphi = 0$, c'est-à-dire si l'angle du tirage avec le plan était égal à l'angle du frottement.

16. *Si le plan était horizontal*, les formules 20 à 24 s'appliqueraient après y avoir fait $\alpha = 0$ et donné aux lignes trigonométriques les valeurs correspondantes à cette hypothèse; enfin,

17. *Si la rampe se changeait en pente* de même inclinaison α, la *figure* 5, *planche* XCVII, montre suffisamment que, sans autre modification, la verticale menée par le centre de gravité G passerait de l'autre côté de la normale GN au plan menée du même point G; de sorte que l'angle compris entre ces droites et que nous avons désigné par $(+\alpha)$ pour le cas de la rampe devient $(-\alpha)$ pour celui de la pente. Les formules 20 à 24 s'appliqueront donc au cas où une force Q agit dans le sens de la descente, en y changeant purement et simplement le signe de l'angle α, ce qui pourra modifier les signes des sinus, tangentes, etc.

18. Enfin, si le corps descendait de lui-même sur le plan, Q deviendrait zéro, et l'accélération (22) à cause de $-\sin.(\varphi - \alpha) = \sin.(\alpha - \varphi)$ se réduirait à

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g \sin.(\alpha - \varphi)}{\cos.\varphi}$$

comme en (15), ainsi que l'on devait s'y attendre, puisqu'on retombe ainsi sur le cas traité au § 13.

PLANS. Voyez, pour le *dessin*, la page 515, et, pour le *levé*, la page 1013.

PLANCHETTE. Voyez l'article *Instruments de l'ingénieur*, page 968, et l'article *Levés*, page 102.

PLANCHERS. Les pièces de bois qui entrent dans la composition de la charpente d'un plancher sont de deux espèces, les *solives* et les *poutres*. Les *solives*, ainsi nommées parce qu'elles constituent le *sol* de l'étage où elles sont placées, portent immédiatement l'aire supérieure du plancher ; leurs bouts sont soutenus dans les murs ou sur les *poutres*.

Les *poutres*, qui reçoivent les bouts des solives qui ne doivent pas porter dans les parois de la bâtisse, tirent leur nom du vieux mot *poultre* ou jument, équivalent de *bête de charge* ou de *somme*, parce que les juments ou poultres étaient employées, de préférence aux chevaux, pour porter des charges à dos. On les appelle aussi *sommiers*, c'est-à-dire porteurs de *sommes* ou *charges*.

Il y a une trentaine d'années que *Navier* a recueilli les règles

pratiques suivantes, que je transcris d'après lui-même et sans autre changement que la transformation en mesures métriques des formules de *Tredgold*, où l'équarrissage des pièces était exprimé en pouces anglais, et leur longueur en pieds.

D'après *Rondelet*, les solives d'un plancher étant espacées tant plein que vide, la hauteur des bois doit être le vingt-quatrième de la portée. Cette règle s'accorde sensiblement avec les indications données par d'autres architectes.

L'espacement ordinaire des poutres sur lesquelles portent les solives est de quatre mètres. Le côté de l'équarrissage de ces pièces doit être le dix-huitième de leur portée.

Tredgold distingue deux sortes de planchers : 1° les planchers simples formés par un rang de solives ; 2° les planchers assemblés formés par des poutres avec lesquelles on assemble transversalement des poutres plus petites qui supportent les solives. Ces petites poutres reçoivent en outre, par-dessous, d'autres solives d'un faible équarrissage sur lesquelles sont clouées les lattes du plafond.

Les solives sont généralement espacées à $0^m.30$ d'axe en axe. Dans les *planchers simples*, nommant a la largeur des pièces, b leur épaisseur verticale et c leur portée, les dimensions des solives, dont la largeur a ne doit jamais être inférieure à $0^m.05$, se règlent en faisant :

$$b = 0^m.03626 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le bois de sapin,}$$

$$b = 0^m.03790 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le bois de chêne.}$$

Dans les planchers assemblés. 1° Supposant les poutres espacées à trois mètres, distance qui ne devrait jamais être dépassée, on prendra pour ces pièces :

$$b = 0^m.0692 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le sapin,}$$

$$b = 0^m.0711 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le chêne.}$$

2° Pour les petites poutres transversales assemblées aux poutres principales, dont l'espacement doit être de $1^m.30$ à 2^m, on prendra

$$b = 0^m.0564 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le sapin,}$$

$$b = 0^m.0582 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le chêne.}$$

selon la science, ne contribue en rien à sa tenacité, puisque ce sous-carbonate ne se décompose pas à la cuisson.

On observe à ce sujet, mais avec une respectueuse réserve, que la non-décomposition du sous-carbonate pourrait ne rien prouver quant à son influence, car la craie complétement dépouillée d'acide carbonique ne fait pas prise sous l'eau, tandis qu'elle fait prise lorsqu'on lui laisse une *portion* de son acide carbonique.

La *pierre à plâtre* se rencontre ordinairement dans les parties supérieures des terrains secondaires et dans les terrains tertiaires, et on la trouve presque partout ou existent le sel et les sources salées. L'ongle la raie, le feu du chalumeau dirigé sur le tranchant de ses lames la réduit en émail blanc; dirigé sur ses faces planes, il les convertit en plâtre sans les fondre.

La *cuisson de la pierre à plâtre* n'a d'autre but, suivant la science, que de chasser l'eau de cristallisation, et MM. *Gay-Lussac* et *Payen* ont montré qu'il suffisait, pour l'atteindre, de soumettre la pierre réduite en petits fragments ou mieux en poudre à la température de 100 ou 115 degrés. La pratique ferait donc en général une dépense de chaleur inutile, peut-être nuisible à la qualité du plâtre? Y trouve-t-elle une compensation des frais de pulvérisation de la pierre *crue?* Je l'ignore, mais elle persiste dans ses procédés.

Consommation. Dix à vingt-quatre heures de feu sont nécessaires pour la cuisson complète de 10 à 20 mètres cubes de plâtre, et la dépense en combustible s'élève à 275 kil. de bois par mètre cube de plâtre brut. La pierre à plâtre perd à la cuisson en grand de 20 à 30 pour 100 de son poids. On peut compter que, pour revêtir un mètre carré de surface d'une couche de plâtre de $0^m.06$ d'épaisseur, il faut cuire 75 kil. de pierre.

Il convient toujours d'employer le plâtre le plus tôt possible après sa pulvérisation, et il ne peut être conservé cuit qu'à l'abri de l'humidité.

Emploi. Le plâtre s'emploie suivant les besoins gâché *serré* ou gâché *clair*. Il est gâché serré quand on le détrempe avec le moins d'eau possible, soit demi-litre d'eau par litre de plâtre; gâché clair quand on met litre pour litre. Plus le plâtre est gâché serré, plus il durcit rapidement, plus sa tenacité est grande; employé ainsi, son volume augmente assez en se solidifiant pour qu'il soit absolument indispensable d'en tenir compte. On laisse à Paris un jeu de $0^m.04$ à $0^m.05$ entre les maçonneries en élévation de moellons et plâtre et les chaînes verticales en pierres de taille qui les encadrent, afin d'éviter le déversement qui pourrait résulter de son expansion.

Le plâtre tombe en poussière lorsqu'il est employé dans les lieux humides.

La *résistance* du bon plâtre à l'écrasement, dans l'état où on l'emploie habituellement, est d'environ 500000 kil. par mètre carré,

sa résistance à l'extension de 40000 kil. seulement; son adhérence aux pierres et aux briques d'environ 30000 kil., lorsque la force est normale au plan de rupture, et de 14100 à 17800 kil., lorsque l'effort est parallèle à ce plan. Son adhérence au bois est très-faible; son adhérence au fer s'élève à 100000 kil. après neuf jours, à 170000 kil. après dix-sept jours; mais, en général, l'adhérence du plâtre diminue beaucoup avec le temps.

Essai du plâtre. Prenez-en une poignée, gâchez-la serrée. Dès que le plâtre commence à prendre de la consistance, formez-en un petit pain allongé; attendez sept à huit minutes. Si, après ce temps, le pain a peu de tenacité, s'il est friable comme de la terre ou du mortier récent, le plâtre ne vaut rien. S'il se casse, au contraire, avec quelque difficulté, il est bon, et d'autant meilleur que sa tenacité est plus grande.

Autre moyen. Prenez une poignée du plâtre à essayer; comprimez-la fortement dans la main. Si, en rouvrant celle-ci, il se déforme comme du sable, il ne vaut rien; si, au contraire, il conserve nettement l'empreinte des doigts et s'il exhale une forte et mauvaise odeur, il est de bonne qualité. Il faut être exercé pour faire cet essai, le premier est moins sujet à erreur.

Analyse des pierres à plâtre. Traiter la pierre par l'acide chlorhydrique étendu. Elle s'y dissoudra avec effervescence, à cause de l'acide du sous-carbonate qui se décompose. Evaporer jusqu'à siccité complète; — traiter le résidu par l'alcool, qui dissoudra le chlorure de calcium et le chlorure de fer, si la pierre contient de l'oxyde de ce métal. La portion du résidu qui ne se dissoudra pas dans l'alcool est le *sulfate de chaux*.

Précipitez le fer par l'ammoniaque; filtrez la liqueur, versez-y un léger excès de sous-carbonate de soude, qui précipitera la *chaux* à l'état de sous-carbonate. Recueillez le précipité sur le filtre. Desséché à 100 degrés, il donnera le poids du sous-carbonate de chaux que contenait la pierre (voyez *Analyse*).

PLOMB. Métal blanc bleuâtre qui était déjà connu au temps de Moïse; très-éclatant lorsque sa surface est fraîchement raclée; — jouissant d'une faible saveur et d'une odeur très-prononcée, assez mou pour être rayé par l'ongle; tachant en gris bleuâtre les corps sur lesquels il frotte; — se laissant laminer en feuilles très-minces.

Son poids spécifique, lorsqu'il est pur, varie de 11.445 à 11.38; celui du commerce ne pèse que 11.35. On prétend que ce poids spécifique diminue par l'écrouissage. — Je lui trouve autant de *points de fusion* qu'il y a d'auteurs qui en ont parlé : ils sont compris entre 312° et 334°. — La fusion commence avant qu'il ait atteint la chaleur rouge. — Au-dessus de cette température, il se volatilise en partie, et répand dans l'air des fumées visibles et dan-

gereuses. Il se ternit à l'air, où il se couvre d'une couche grise que l'on croit être un sous-oxyde. Si l'air est humide, il s'empare de son acide carbonique et se recouvre de carbonate de plomb. Il ne décompose l'eau ni à l'aide de la chaleur ni à l'aide des acides. Les plombs du commerce sont tous impurs; ils renferment du cuivre, souvent de l'antimoine, de l'arsenic, du zinc, du soufre, parfois des traces d'argent. D'après M. *Dumas*, le moyen le plus sûr de se procurer du plomb parfaitement pur consisterait à décomposer la céruse de Clichy par le charbon.

Résistance. Un fil de $0^m.002$ de diamètre rompt sous une tension de 9 kil. Un centimètre cube s'écrase, d'après *Rennie*, sous une charge de 136 kil. *Coriolis* a eu l'occasion de remarquer l'influence de la durée sur l'écrasement. Ainsi un lingot de plomb d'une hauteur de 680 n'avait plus que 317 après avoir été soumis pendant une minute à une charge de 1760 kil. Au bout d'une heure, cette hauteur était réduite à 245, et au bout de vingt-quatre heures, à 223. On ne donne ni la hauteur primitive du cylindre ni sa section.

Quant à la résistance à la rupture par extension, *Navier* a trouvé une moyenne de $1^k.35$ par millimètre carré de section transversale avec des extrêmes très-distants qui ont varié de 0.84 à $1^k.74$, ou $0^k.80$ pour le plomb fondu et $1^k.35$ pour le plomb laminé.

D'après une expérience de *Mariotte*, un vase de plomb en forme de baril, ayant $0^m.487$ longueur, $0^m.325$ diamètre au milieu, $0^m.217$ aux extrémités et $0^m.0056$ épaisseur, terminé par des bases planes faites avec le même plomb, a supporté, sans rompre, la pression d'une colonne d'eau de $32^m.48$. Les platines se courbèrent de plus de $0^m.04$.

Le plomb ayant été limé au milieu de la hauteur du baril, sur une étendue de $0^m.16$ en longueur et $0^m.11$ en largeur, et l'épaisseur réduite à un peu moins de $0^m.0022$ au milieu de ce qui était limé, le plomb céda et il s'y fit une fente.

D'après deux expériences de *Jardine*, d'Edinburgh, un tuyau de plomb de $0^m.038$ diamètre et $0^m.005$ épaisseur a supporté, sans altération apparente, la pression d'une colonne d'eau de 300 mèt. de hauteur, et s'est rompu sous celle d'une colonne d'eau de 360 mèt.

Un autre tuyau, de la même épaisseur et de $0^m.0508$ diamètre, a supporté, sans altération apparente, la pression d'une colonne d'eau de 240 mèt. Il a rompu sous celle d'une colonne d'eau de 300 mèt.

Action des réactifs. L'acide carbonique, même faible, attaque le plomb.—L'acide nitrique l'attaque avec énergie, le convertit en protoxyde et le dissout, même à froid. L'acide sulfurique étendu ne l'attaque pas; concentré et bouillant, il le convertit en sulfate de

protoxyde. L'acide hydrochlorique ne l'attaque pas sensiblement, mais l'eau régale le dissout, ainsi que l'acide acétique, aidé toutefois du contact de l'air. Le nitre l'attaque promptement à l'aide d'une chaleur peu élevée.

Oxydes. On lui connaît deux oxydes principaux : le *protoxyde*, ou *massicot*, qui forme la principale partie des litharges du commerce ; — le *peroxyde*, dit *oxyde puce ;* — enfin plusieurs oxydes intermédiaires, confondus sous le nom de *minium*.

Le protoxyde, jaune sale, d'une teinte rougeâtre lorsqu'il est en poudre, facilement fusible, un peu soluble dans l'eau, soluble dans les acides nitrique et acétique, est formé de plomb 92.83 + oxygène 7.17 ; il forme avec l'eau un hydrate blanc.

Le peroxyde ou oxyde puce se décompose très-facilement par la chaleur qui le ramène à l'état de protoxyde. Les acides forts l'attaquent à froid ; bouillants, ils le décomposent avec dégagement d'oxygène, et il se forme des sels de protoxyde. L'acide hydrochlorique, même à froid, l'attaque facilement et le convertit en protochlorure. — Il est formé de plomb 86.62 + oxygène 13.38.

Le *minium* est considéré comme probablement composé de peroxyde et de protoxyde ; soit : plomb 89.62 + oxygène 10.38. Il est d'un rouge éclatant, un peu orangé.

Combinaisons principales. Le plomb se combine avec le chlore, le sélénium, le phosphore, l'arsenic, l'iode, le soufre, etc. On prétend même qu'il se combine en petite quantité avec le fer, à une très-haute température.

Son protoxyde forme un grand nombre de sels. Ceux d'entre eux qui sont solubles sont très-vénéneux et d'une saveur sucrée et astringente ; ils se reconnaissent facilement à ce qu'une baguette de zinc en précipite le plomb à l'état métallique.

L'hydrogène sulfuré en précipite du protosulfure de plomb d'un brun noir ; l'acide sulfurique et les sulfates solubles en précipitent du sulfate de plomb parfaitement blanc formé de protoxyde de plomb 73.56 + acide sulfurique 26.44, et que l'on distingue des autres sulfates en ce qu'il se dissout dans une dissolution de potasse et surtout en ce qu'il noircit instantanément lorsqu'on l'humecte avec de l'hydrosulfate d'ammoniaque.

Minerais. Le plomb se rencontre en assez grande quantité dans la nature, et particulièrement à l'état de *galène*, ou protosulfure de plomb ; lorsque ce sulfure est parfaitement pur, il est formé de plomb 86.55 + soufre 13.45.

Analyse. Pour analyser la *galène*, on la traite par l'acide nitrique étendu à une chaleur très-modérée, afin d'éviter la formation d'un sulfate ; le soufre se sépare en nature ; on lave et l'on dessèche le résidu ; on fait brûler le soufre, et il reste un peu de sulfate de plomb. — On précipite le plomb de la dissolution nitrique par l'acide sul-

furique ou par un sulfate. On recueille le sulfate de plomb; on le lave avec très-peu d'eau, parce qu'il n'est pas absolument insoluble; on le fait sécher et rougir légèrement, puis on le pèse. 100 de sulfate correspondent à 68.39 de plomb.

On peut voir, à l'article *Alliage*, comment on sépare le plomb de l'étain, de l'antimoine, du bismuth, de l'argent, du cuivre, etc.

PLUIE. La quantité de pluie se mesure par la hauteur à laquelle elle s'élèverait si elle était retenue sur la surface où elle tombe. En général, cette quantité moyenne annuelle augmente à mesure que la latitude diminue, de sorte qu'elle croît avec la température des zones.

Le nombre moyen des jours pluvieux suit une marche inverse, en sorte qu'il pleut *plus*, mais *moins souvent*, à mesure que l'on avance vers l'équateur. Ainsi, entre le 12me et le 43me degré de latitude nord, le nombre moyen annuel de jours pluvieux est de 78; il s'élève à 105 du 43me au 46me; il est de 134 à la latitude de Paris, et de 161 du 51me au 60me degré nord.

La quantité de pluie qui tombe en un même lieu est plus grande en été qu'en hiver, bien qu'il pleuve plus souvent dans cette dernière saison; et, dans nos climats, la pluie qui tombe en juin, juillet et août, équivaut à celle que fournissent les neuf autres mois de l'année.

La pluie tombe en plus grande abondance le jour que la nuit; et dans un même lieu la quantité de pluie que l'on recueille est d'autant moindre que la jauge est plus élevée au-dessus du sol: ce qui semble indiquer que les gouttes augmentent de volume en traversant les couches inférieures de l'air où elles condensent de nouvelles vapeurs. Cependant on croit qu'il tombe plus de pluie dans les pays montagneux que dans les plaines.

Quantités moyennes de pluie recueillies en différents points du globe.

	mèt.		mèt.
Cap français (St-Domingue). .	3.08	Douvres	0.95
La Grenade (Antilles).	2.84	Parties élevées des Alpes (à l'état de pluie, neige et grêle).	0.94
Tivoli (Saint-Domingue). . . .	2.73	Viviers.	0.92
Carfaguana.	2.49	Rome	0.91
Bombay.	2.08	Lyon.	0.89
Calcutta.	2.05	Liverpool	0.86
Kendal	1.56	Manchester	0.84
Hospice du Saint-Bernard. . .	1.50	Venise	0.81
Gênes	1.40	Genève.	0.80
Charlestown.	1.30	Lille.	0.76
Joyeuse.	1.24	Utrecht	0.73
Pise.	1.24	La Rochelle.	0.66
Milan	0.96		
Naples.	0.95		

	mèt.		mèt.
Paris (dans la cour de l'Observatoire). . . . . (*)	0.56	Le bassin de la Seine . . . (**)	0.53
		Marseille.	0.47
Paris (sur la terrasse de l'Observatoire) . . . . (*)	0.53	Pétersbourg.	0.46
		Upsal.	0.43

Il n'est nullement démontré que les défrichements, la destruction des forêts, diminuent la quantité de pluie qui tombe annuellement. Ainsi M. *Flaugergues* a trouvé que la quantité de pluie avait augmenté à Viviers depuis 1778, quoique l'on ait détruit la plus grande partie des forêts qui couvraient l'Ardèche. Cependant M. *Boussingault* remarque qu'à partir de *Panama*, en se dirigeant vers le sud, on rencontre un pays couvert de forêts épaisses où les pluies sont presque continuelles, tandis qu'au delà de *Tumbez*, vers *Payta*, où les forêts ont disparu, la pluie est presque inconnue, à ce point, dit-il, que, se trouvant à Payta, les habitants affirmaient qu'il n'y avait pas plu depuis dix-sept ans.

Pénétration. D'après *Mariotte*, les *terres labourées* ne se laissent pénétrer par les fortes pluies d'été que de 0m.16 ; et, suivant *Lahire*, dans la *terre* recouverte de quelques herbes, la pénétration n'a jamais lieu jusqu'à 0m.65.

D'après le même, une masse de *terre nue* de 2m.60 d'épaisseur, après quinze années d'exposition à toutes les intempéries, n'avait pas laissé pénétrer une seule goutte d'eau jusqu'à la plaque de plomb qui la supportait.

Buffon ayant examiné, dans un jardin, un tas de *terre* de 3 mètres de haut qui était resté intact depuis plusieurs années, reconnut que la pluie n'avait jamais pénétré au delà de 1m.30, chiffre bien distant de celui de *Mariotte*.

Il en est tout autrement du sable et des terrains où les roches se montrent à nu. Suivant M. *Arago*, le sable se laisse traverser comme un crible; et quant aux roches, tous les mineurs savent que l'eau augmente dans les galeries les plus profondes quelque temps après qu'il a commencé à pleuvoir à la surface. Enfin, d'après M. *Arago*, les sources qui, sur nos côtes maritimes, jaillissent à toutes les hauteurs des falaises verticales du calcaire crayeux, augmentent beaucoup immédiatemement après la pluie.

Dalton évalue au $\frac{7}{12}$ de leur poids la quantité de pluie des terres de jardin qui en sont saturées.

POIDS ET MESURES. Je classe sous ce titre les tables de conversion des mesures anciennes en mesures métriques, et je m'abs-

(*) Cet excès a été observé *annuellement* depuis 13 années.

(**) On compte qu'un tiers seulement de la quantité de pluie qui tombe dans le bassin de la Seine s'écoule par le fleuve ; le reste s'évapore, entretient la végétation ou s'écoule dans la mer par des voies souterraines (M. *Dausse*).

tiens de reproduire les tables de conversion inverse, que l'on peut considérer aujourd'hui comme à peu près inutiles, la pratique des ingénieurs ne les conduisant que bien rarement à transformer des mètres en pieds, pouces, lignes, ou des kilogrammes en livres. Je me dispense également, et sans plus de scrupule, de présenter le tableau des mesures légales que tous connaissent. J'y trouve d'ailleurs cet avantage, que je suis en même temps dispensé de définir scientifiquement le *mètre*, cet archétype passé à l'état de Protée, depuis que la géodésie lui donne autant de valeurs différentes qu'elle mesure de méridiens différents. Le rapport du mètre à la longueur du pendule à secondes a été, il est vrai, déterminé par Borda avec une exactitude qui suffirait toujours pour retrouver le premier (p. 1258), si jamais, « *par l'effet des révolutions dont l'his-* « *toire offre tant d'exemples, ce prototype venait à s'altérer ou à se* « *perdre;* » mais la science repousse cette assimilation, objectant que « *la gravité n'exercera peut-être pas toujours la même puissance* « *dans les siècles futurs!* »

S'il en est ainsi, il ne nous reste plus à transmettre à la postérité que cette définition aussi exacte qu'elle est vulgaire : *Le mètre est la longueur d'une règle en platine, déposée aux Archives, aujourd'hui rue du Chaume, presque en face de la rue de Rambuteau.*

Si l'on pouvait supposer que notre monnaie parvînt jusqu'à eux, à travers les révolutions et les changements dans l'intensité de l'attraction terrestre, nos descendants retrouveraient encore le mètre avec beaucoup d'approximation, en alignant suivant leurs diamètres

19 pièces de 5 francs + 11 pièces de 2 francs,

opération plus facile que celle qui consisterait à mesurer la distance du pôle à l'équateur.

La combinaison suivante donne encore la longueur du mètre avec une moindre somme :

20 pièces de 1 franc + 20 pièces de 2 francs.

Conversion des toises, pieds, pouces *et* lignes *en* mètres.

	TOISES en mètres.	PIEDS en mètres.	POUCES en mètres.	LIGNES en mètres.
	m	m	m	m
1	1.94904	0.32484	0,027070	0.002256
2	3.89807	0.64968	0.054140	0.004512
3	5.84711	0.97452	0.081210	0.006768
4	7.79615	1.29936	0.108280	0.009024
5	9.74519	1.62420	0.135350	0.011280
6	11.69422	1.94904	0.162419	0.013536
7	13.64326	2.27388	0.189489	0.015792
8	15.59230	2.59872	0.216559	0.018048
9	17.54133	2.92356	0.243629	0.020304
10	19.49037	3.24840	0.270699	0.022560

Autres mesures linéaires *exprimées en mètres.*

Aune de Paris. . . . . . . 1^{m}.18845
16 aunes font à peu près. 19^{m}
Brasse des marins. . . . . 1^{m}.624
Mille marin. — Il correspond à 1 minute de degré ou . . . . 1851^{m}.85
Lieue marine de 20 au degré 5555^{m}.5
Mille romain, cité dans Pline. . . . . 1476^{m}.4
Mille romain moderne. . 1489^{m}.1
Mille de Strabon, suivant Cassini.. . . . . 1493^{m}
Stade des anciens Romains 184^{m}.6
Lieue commune en France de 25 au degré . . . . . 4444^{m}.45
Lieue de poste. . . . . . 3898^{m}.1
On la compte souvent pour 4000^{m}.
Lieue d'une heure de chemin . . . . 4872^{m}.5
Mille arabique au temps des Croisades . . . . . 2214^{m}.5
Stade égyptien, d'après *Freret et Leroy* . . . . 222^{m}.2
Stade d'après l'astronome *Nouet* . . . . 230^{m}.7
Stade de Ptolémée.. . . . 158^{m}.7

Nœud. Les nœuds ou divisions de la ligne de Loch ont 15^{m}.4321, et comme le sablier qui mesure le temps marche 30 secondes, chaque nœud correspond à 0^{m}.5144 par seconde ou à un mille marin par heure (p. 1210).

Mesures carrées *anciennes en mètres carrés.*

	TOISES CARRÉES en mètres carrés.	PIEDS CARRÉS en mètres carrés.	POUCES CARRÉS en mètres carrés.	LIGNES CARRÉES en mètres carrés.
	mm.	mm.	mm.	mm.
1	3. 79 87 44	0. 10 55 21	0. 00 07 32 78	0. 00 00 05 08 9
2	7. 59 74 87	0. 21 10 41	0. 00 14 65 56	0. 00 00 10 17 8
3	11. 39 62 31	0. 31 65 62	0. 00 21 98 34	0. 00 00 15 26 7
4	15. 19 49 75	0. 42 20 83	0. 00 29 31 12	0. 00 00 20 35 6
5	18. 99 37 18	0. 52 76 04	0. 00 36 63 90	0. 00 00 25 44 5
6	22. 79 24 62	0. 63 31 24	0. 00 43 96 68	0. 00 00 30 53 4
7	26. 59 12 05	0. 73 86 45	0. 00 51 29 46	0. 00 00 35 62 3
8	30. 38 99 49	0. 84 41 66	0. 00 58 62 24	0. 00 00 40 71 2
9	34. 18 86 93	0. 94 96 86	0. 00 65 95 02	0. 00 00 45 80 1
10	37. 98 74 36	1. 05 52 07	0. 00 73 27 80	0. 00 00 50 89 0

Autres mesures de superficie en mètres carrés.

Arpent des eaux et forêts 5107^{mm}.2
Lieue carrée de 25 au degré. . . . . 19752591^{mm}.4
Aune de Paris carrée. 1^{mm}.412
Arpent de Paris.. . . . . 3418^{mm}87
Perche carrée des eaux et forêts, ... 51^{mm}.072
Perche carrée de Paris. . 34^{mm}.189

Conversion des mesures cubiques *anciennes en mètres cubes.*

	TOISES CUBES en mètres cubes.	PIEDS CUBES en mètres cubes.	POUCES CUBES en mètres cubes.	LIGNES CUBES en mètres cubes.
	mmm.	mmm.	mmm.	mmm.
1	7. 403 89	0. 034 277 3	0. 000 019 836	0. 000 000 011 48
2	14. 807 78	0. 068 554 5	0. 000 039 673	0. 000 000 022 96
3	22. 211 67	0. 102 831 8	0. 000 059 509	0. 000 000 034 44
4	29. 615 56	0. 137 109 0	0. 000 079 346	0. 000 000 045 92
5	37. 019 45	0. 171 386 3	0. 000 098 182	0. 000 000 057 40
6	44. 423 34	0. 205 663 6	0. 000 119 018	0. 000 000 068 88
7	51. 827 23	0. 239 940 8	0. 000 138 855	0. 000 000 080 36
8	59. 231 12	0. 274 218 1	0. 000 158 691	0. 000 000 091 84
9	66. 635 01	0. 308 495 3	0. 000 178 528	0. 000 000 103 32
10	74. 038 90	0. 342 772 6	0. 000 198 364	0. 000 000 114 80

Autres mesures cubiques *anciennes en mètres cubes.*

	mmm.		mmm.
La corde de bois des eaux et forêts.	3.8391	La solive de charpente. .	0.10283
Le muids de vin de Paris	0.2682144	Le muid de blé de Paris	1.872
Le boisseau de Paris . .	0.013008	Le septier de blé de Paris.	0.15610
La pinte de Paris	0.0009313	Le litron de Paris	0.0008125

Conversion des poids *anciens en kilogrammes.*

	LIVRES en kilogrammes.	ONCES en kilogrammes.	GROS en kilogrammes.	GRAINS en kilogrammes.
	k.	k.	k.	k.
1	0.48951	0.03059	0.003824	0.0000531
2	0.97901	0.06119	0.007648	0.0001062
3	1.46852	0.09178	0.011472	0.0001593
4	1.95802	0.12238	0.015296	0.0002124
5	2.44753	0.15297	0.019120	0.0002655
6	2.93704	0.18356	0.022944	0.0003186
7	3.42654	0.21416	0.026768	0.0003717
8	3.91605	0.24475	0.030592	0.0004248
9	4.40555	0.27535	0.034416	0.0004779
10	4.89506	0.30594	0.038240	0.0005310

L'ancien *quintal* équivaut à 48k.95058
L'ancien *tonneau* de mer à 979k.01
Le *marc* 8 onces = ... 0k.244753
Le *grain* des essayeurs n'était que de. . . . 0k.000003472

Températures.

Une température *t* étant exprimée en degrés *Réaumur*, on la convertira en degrés centigrades en la multipliant par $\frac{5}{4}$ = 1.25 ou en lui ajoutant son quart. 24 degrés de Réaumur font 30 degrés centigrades.

Une température θ étant exprimée en degrés de *Farenheit*, on la convertira en degrés centigrades en en retranchant 32 et multipliant le reste par $\frac{5}{9}$.

Ainsi + 14 Farenheit équivalent à (—10) centigrades.

Mesures anglaises.

Une loi du 17 juin 1824 a établi l'uniformité des poids et mesures dans toute l'étendue de la Grande-Bretagne.

A l'exception des mesures de capacité qui ont toutes été remplacées par d'autres, on n'a fait qu'étendre aux Trois-Royaumes l'usage des mesures de Londres.

Les nouvelles mesures sont qualifiées d'*impériales* pour les distinguer des anciennes; et la base de toutes ces mesures, le module dont elles dérivent toutes, est l'*yard impérial*.

Ce *yard impérial* est la distance entre deux points marqués sur deux clous en or fixés à une règle de cuivre servant d'étalon, à la température de 62 degrés de *Farenheit*.

La longueur de cette règle, à la température de 62° Farenheit, est à celle du pendule simple qui bat la seconde sexagésimale de temps moyen, à la latitude de Londres, dans le vide, et au niveau des mers comme 360000 est à 391393.

La 36me partie de la longueur de cette règle est le *pouce* (Inch) : d'où résulte qu'en divisant la longueur du pendule en 391393 parties, 10000 de ces parties formeront l'*Inch*.

Mesures linéaires *anglaisès en mètres.*

	m		m
Pouce ou Inch	0.02539954	Pole ou perch.	5.02911
Pied ou foot.	0.30479449	Furlong.	201.16437
Yard impérial	0.91438348	Mile	1609.3149
Fathom.	1.82876696		

Mesures de superficie *anglaises en mètres carrés.*

	mm		mm
Pouce carré	0.0006451366	Rod ou perch carré. .	25.291939
Pied carré.	0.0929006	Rood.	1011.6775
Yard carré.	0.8360970	Acre	4046.71

Mesures de capacité *anglaises en mètres cubes.*

	mmm		mmm
Pouce cube.	0.00001638648	Peck.	0.0090869159
Pied cube.	0.02831573	Bushel	0.036347664
Pint	0.0005679318	Sack.	0.109043
Quart.	0.001135864	Quarter.	0.2907813
Gallon impérial. . .	0.00454345797	Chaldron.	1.308516

Poids anglais en kilogrammes.

L'unité de poids est la livre dite *troy;* mais le commerce et l'industrie emploient pour les pesées habituelles une autre unité dite *livre avoir du poids.*

Troy.	k	*Avoir du poids.*	k
Grain	0.000064798	Dram	0.001772
Penny-weight.	0.00155516	. . . .	
Once troy.	0.031103191	Once avoir du poids. .	0.028349
Livre troy impérial . .	0.373238296	Livre avoir du poids. .	0.453558
		Quintal (112 livres) . .	50.798496
		Ton (20 quintaux) . .	1015.969920

Une pression de *une livre* (avoir du poids) par *pouce carré* anglais équivaut à une pression par mètre carré de 703k.04 ; soit : 0k.070304 par centimètre carré, ou 0k.00070304 par millimètre carré.

Une pression de un *ton* par pouce carré anglais équivaut à une pression par mètre carré de 1574813k.92 ; soit, par millimètre carré, 1k.57481392.

POIDS SPÉCIFIQUES et POIDS DU MÈTRE CUBE. Bien qu'il soit évi-

dent que l'on passera en général du premier poids au second, en reculant le point de trois rangs vers la droite, j'ai cru devoir distinguer le poids spécifique du poids du mètre cube. Le *poids spécifique*, déterminé par des expériences plus délicates, suppose des matières pures, et n'ayant d'autres vides que ceux que comporte la nature de ces matériaux. Le *poids du mètre* cube a été habituellement obtenu par la pesée de mesures de capacité remplies plus ou moins exactement, ou par celle de corps dont le volume a été approximativement évalué. On ne doit donc pas s'étonner de trouver parfois des poids spécifiques qui ne concordent pas avec ceux du mètre cube. Au reste, une grande incertitude plane sur tous ces chiffres; dans toutes les circonstances importantes, l'ingénieur devra donc directement constater les poids des matériaux qu'il met en œuvre, ne pas perdre de vue qu'il y a fonte et fonte, fer et fer, chêne et chêne, etc., et que prendre dans les tables le poids de ces matériaux, c'est le plus souvent s'exposer à des erreurs très-graves.

	POIDS spécifique.	Poids du mètre cube.	OBSERVATIONS.
		k	
Acier non écroui	7.810	......	Assez variable.
Acide acétique	1.079	......	Au maximum.
— carbonique	0.0019765		
— nitrique fumant	1.451		
— nitrique du commerce	1.22		
— sulfurique	1.841	......	Au maximum.
Air atmosphérique	0.0012927		
Albâtre	2.7	2205	
Alcool absolu	0.792		
— au maximum de densité	0.927		
Antimoine	6.720		
Ardoises	2.81 à 2.85	......	410 k. le 1000.
Argent fondu	10.47		
Argile	....	1650 à 1900	
Avoine	....	470 à 500	
Azote	0.0012565		
Basalte	2.45 à 2.85		
Beurre	0.942		
Bière	0.990		
Bismuth	9.822		
Blé	....	750 à 800	A cause des vides; car le froment est plus lourd que l'eau.
Bois de buis de Hollande	1.32		
— de buis de France	0.91		
— de cèdre	0.561		
— de chêne (le cœur), 60 ans	1.17		
— Chênes de	....	616	
à	....	1231	
— Chêne vert ou yeuse de Corse	....	1260	6 mois de coupe.
— Charpente de chêne de	....	930	
à	....	943	

	POIDS spécifique.	Poids du mètre cube.	OBSERVATIONS.
		k	
Bois de chauffage dur . . . . de.		400	Le stère cordé plus ou moins honnêtement.
à		500	
— de chauffage blanc . . . de.		250	
à		262	
— de chauffage mêlé		378	
— de cyprès	0.598		
— Erable		800	Un peu frais.
— Frêne	0.845		
— Frêne . . . . de.		690	Le mètre cube plein ainsi que pour les bois vants.
à		811	
— Gaïac, ébène	1.33		
— Hêtre	0.852		
— Hêtre . . . . de.		696	
à		800	
— If	0.807		
— Noyer		920	
— Olivier	0.92		
— Orme	0.800	553 à 905	
— Peuplier ordinaire	0.383	374 à 510	
— Peuplier blanc d'Espagne	0.529		
— Pin (30 variétés)		622 à 679	
— Pin maritime		396 à 630	
— Platane		628 à 648	
— Sapin jaune	0.657		
— Sapin (20 variétés)		464 à 753	
— Saule		405	
— Tilleul	0.604		
Voyez encore, pour les bois cordés, les pages 365 et 366.			
Briques de Bourgogne		1550	2500 k, le mill e.
— de pays		1460	2000 id.
Briques (maçonnerie de) fraîches		1870	
Bronze des canons	8.46		
— des statues	8.95		
Carbone (diamant)	3.50 à 3.53		
— (graphite)	2.50		
Charbon (le morceau)			
— de bouleau	0.364		
— de châtaignier	0.421		
— de charme	0.455		
— de chêne blanc	0.421		
— de hêtre	0.518		
— de peuplier d'Italie	0.245		
— de pin jaune	0.333		
Voyez, pour les poids du mètre cube de charbon, les pages 368 et 369		130 à 250	
Chaux pure	3.15		
— vive		850	
— éteinte		1020	
— (pierre à)		2260	
Cidre		920	

	POIDS spécifique.	Poids du mètre cube.	OBSERVATIONS.
Cire blanche	0.941		
Craie	2.25 à 2.30		
Cuivre fondu	8.85		
— laminé ou forgé	8.95		
Eau distillée à 4°	1.000		
— de pluie	1.007		
— de source	1.001		
— de rivière	1.009		
— de mer. de.	1.026		
à	1.050		
Eau-de-vie		950	
Etain	7.291	7320	
Ether	0.715		
— acétique	0.868		
— hydrochlorique	0.874		
Farine de froment		500	160 k. le sac.
Fer pur	7.788		
Fers. de.		7600	Très-variable.
à au moins.		7800	
Fonte	7.200		
Fontes. de.		6790	Très-variable.
à au moins.		7800	
Fonte grise de Geislautern		7056	
— blanche à grain fin		7840	
Fèves		640 à 795	
Foin en bottes		116	4 k. la botte.
— bien tassé		125	
— en magasin		232	
Froment		750	
Glace (eau congelée)	0.865		
Glaise		1900	
Granits	2.65 à 2.75		
Grès des paveurs. de.		2110	
à		2560	
Grès durs		2600	
Houille compacte	1.33		
Houille en morceaux		700 à 900	
Huiles d'olive	0.915		
— de lin	0.940		
— de navette	0.916		
— de naphte	0.847		
Hydrogène	0.00008933		
— carboné des marais	0.00071745		
Lait	1.03		
Laiton	8.30		
Lard		947	
Lave		2850	
Lentilles		796	
Liége	0.240		
Maçonnerie de moellons fraîche		2240	Très-variable.
— de briques fraîche		1870	

	POIDS spécifique.	Poids du mètre cube.	OBSERVATIONS.
		k	
Maçonnerie de moellons en pierres calcaires et siliceuses, depuis. . .	. . . .	1700	
jusqu'à. . .	. . . .	2300	
Maçonnerie de moellons en granit. .	. . . .	2300	. . . . .
— de moellons en basalte.	. . . .	2500	
Maïs.	. . . .	600	
Maillechort	7.18		
Manganèse pur	8.010		
Marbres ordinaires.	2.65 à 2.75		
Marbre noir.	. . . .	2823	
Marnes . . . . de. . .	. . . .	1570	
à . . .	. . . .	1650	
Mercure à zéro	13.596		
— à zéro	13.598		
Mortier de chaux et sable.	. . . .	1700	
Nickel fondu.	8.279		
— forgé.	8.666		
Or fondu.	19.26		
— forgé.	19.36		
Orge.	. . . .	600 à 640	
Oxyde de carbone.	0.0012371		
Oxygène.	0.0014297		
Paille un peu tassée.	. . . .	90	2k.5 la botte.
Pavés de grès	. . . .	. . . . . .	3000 le cent.
Pierres à bâtir grossières	1.7 à 1.9		
— à plâtre.	2.2	2260	
— à fusil blonde.	2.59		
— — noire.	2.58		
— ponce.	0.914		
— de Volvic.	2.32		
— de liais.	2.25 à 2.45	2430	
— de Saillancourt.	. . . .	2400	
— de roche de Passy.	. . . .	2330	
— de Vaugirard et Montrouge.	. . . .	2300	
— de Tonnerre.	. . . .	2000	
— lambourde	. . . .	1800	
— vergelée.	. . . .	1700	
— de Saint-Leu	. . . .	1620	
— marneuse	. . . .	1600 à 1660	
— crayeuse.	. . . .	1500	
— à ardoise	. . . .	2500	
— meulière.	. . . .	2330	
Planches de chêne.	. . . .	614	Le stère.
— de sapin.	. . . .	470	Le stère.
Platine.	21.53		
— laminé.	22.06		
Plâtre sec	. . . .	1230	
— gâché.	. . . .	1500	
Plomb fondu.	11.35	11330	
Pois gris.	. . . .	773	
— verts.	. . . .	869	
Pommes de terre.	. . . .	650 à 800	

	POIDS spécifique.	Poids du mètre cube.	OBSERVATIONS.
		k	
Porphyre . . . . de. .	2.67	2850	
à . .	2.75	2900	
Poudre de mine	. . . . . .	910	
Riz.	. . . .	805	
Sable pur	. . . .	1900	
— terreux.	. . . .	1700	
Sable de rivière. . . . . de. .	. . . .	1770 à 2630	
— de galets	. . . .	2500	
— de terrain	. . . .	2700	Humide.
Sarrasin, blé.	. . . .	650	
Schistes argileux	. . . .	2760	
Seigle	. . . .	650 à 700	
Serpentine.	. . . .	2260	
Son	. . . .	450	
Soufre.	2.086		
Suif	0.941		
Térébenthine (essence de).	0.869		
Terre végétale.	. . . .	1400	
— dite franche.	. . . .	1500	
— argileuse.	. . . .	1600	
Tuiles	. . . .	1560	
— le mille du grand moule . . .	. . . .	. . . . . .	1300 k.
— le mille du petit moule	. . . .	. . . . . .	800 k.
Vase.	. . . .	1650	
Vapeur d'eau	0.000806	. . . . . .	Ramenées par le calcul à 0 et 0m.760.
— d'alcool.	0.002085	. . . . . .	
— d'éther	0.003343	. . . . . .	
— de mercure.	0.009018	. . . . . .	
Vin de Bordeaux.	0.994		
— de Bourgogne.	0.991		
Vinaigre.	. . . .	930	
Zinc.	7.19		

Enfin, si on préfère prendre pour unité le poids du mètre cube d'air qui est à Paris à la température zéro, sous la pression 0m.760, et à 60 mètres au-dessus du niveau des mers = 1k.293187 ou seulement 1k.292748 au niveau des mers, sous le parallèle de 45° à la température 0 et sous la pression 0.760, on a, pour les gaz et vapeurs compris déjà dans la table précédente, où le poids du mètre cube d'eau à 4° a été pris pour unité,

Gaz et vapeurs.

Air à 0 et 0m.760.	1.000	Oxygène.	1.106
Ammoniac (Gaz)	0.596	Oxyde de carbone.	0.957
Azote	0.972	Acide carbonique.	1.529
Cyanogène	1.806	Vapeur d'eau.	0.6235
Hydrogène	0.0691	— d'alcool	1.613
Hydrogène carboné des marais.	0.555	— d'éther.	2.586
		— de mercure	6.976

Le poids de l'air atmosphérique sec, à la température de la glace fondante et sous la pression $0^m.76$, est à volume égal $\frac{100}{77328}$ celui de l'eau distillée et le rapport du poids de l'air celui du mercure est :: 1.0 : 10513.5. Au niveau de la mer, à la latitude de 45°; ce rapport devient

:: 1.0 : 10517.3

POLYGONE FUNICULAIRE. 1. On désigne ainsi (*pl.* CI, *fig.* 1) un assemblage de cordes ou de barres $N_0N_1N_2 \ldots N_n$ tiré à ses sommets par des forces quelconques $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$, dirigées elles-mêmes d'une manière quelconque. Cependant, nous ne considérons ici cet assemblage qu'au point de vue des applications; de sorte que nous supposerons toujours dans ce qui va suivre : 1° que le polygone et toutes les forces qui agissent sur lui sont dans un seul et même plan, et 2° qu'il y a équilibre dans le système sous l'action de toutes les forces auxquelles il est soumis. C'est donc supposer que ce système a pris la forme invariable que l'état d'équilibre exige.

Or, $N_1N_2N_3\ldots$ étant des nœuds supposés fixes par rapport à la corde, on sait, d'après ce que l'on a vu au mot *Cordes* (p. 417), que les deux tensions et la force appliquées à chaque nœud ne sont en équilibre que lorsque chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres. On a donc, en partant du point fixe N_0 soumis à l'effort T_0, $t_1, t_2, t_3 \ldots T_n$ étant les tensions des côtés successifs du polygone, et $P_1 P_2 P_3 \ldots$ les forces appliquées à chaque nœud,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{T_0}{\sin.b_1}=\dfrac{P_1}{\sin.c_1}=\dfrac{t_1}{\sin.a_1} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} T_0 : P_1 :: \sin.b_1 : \sin.c_1 \\ P_1 : t_1 :: \sin.c_1 : \sin.a_1 \end{array}\right. \\ \dfrac{t_1}{\sin.b_2}=\dfrac{P_2}{\sin.c_2}=\dfrac{t_2}{\sin.a_2} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} t_1 : P_2 :: \sin.b_2 : \sin.c_2 \\ P_2 : t_2 :: \sin.c_2 : \sin.a_2 \\ t_2 : P_3 :: \sin.b_3 : \sin.c_3 \end{array}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (1)$$

et ainsi de suite.

Ces proportions multipliées par ordre feront connaître le rapport d'une tension quelconque à une autre. Ainsi le rapport des tensions T_0 à t_2 serait donné par

$$\frac{T_0 \times P_1 \times t_1 \times P_2}{P_1 \times t_1 \times P_2 \times t_2}=\frac{\sin.b_1 \sin.c_1 \sin.b_2 \sin.c_2}{\sin.c_1 \sin.a_1 \sin.c_2 \sin.a_2}$$

soit

$$\frac{T_0}{t_2}=\frac{\sin.b_1 \sin.b_2}{\sin.a_1 \sin.a_2}$$

et l'on aura en général entre deux tensions consécutives :

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{\sin. b_{n+1}}{\sin. a_{n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Les mêmes proportions donneraient le rapport des puissances, et l'on aurait entre deux puissances consécutives :

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{\sin. c_n \sin. b_{n+1}}{\sin. c_{n+1} \sin. a_n} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2. Remarquons en outre que l'invariabilité de la forme du système étant une conséquence de l'équilibre de toutes les forces qui lui sont appliquées, l'une quelconque de ces forces T_0, P_1, P_2, P_3... T_x est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres ; et comme elles n'agissent l'une sur l'autre que par l'intermédiaire des cordons, il s'ensuit que *chaque cordon est tendu et chaque point tiré comme il le serait par toutes les forces du système transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point*. Donc, pour trouver à la fois la direction de l'un des cordons et la tension qu'il subit, il suffira de transporter parallèlement toutes les forces qui agissent depuis une extrémité du polygone jusqu'à l'un des nœuds terminant ce cordon et de chercher la résultante de ces forces.

3. Et, pour obtenir les deux tensions extrêmes, il suffira de transporter à leur point de concours O la résultante OR de toutes les forces P_1 P_2 P_3 P_4 appliquées aux angles du polygone et de l'y décomposer suivant les directions des tensions T_0 et T_x.

4. On trouverait encore de même les tensions de deux cordons quelconques, en prenant la résultante des forces appliquées aux nœuds intermédiaires et la décomposant au point de concours de ces cordons suivant les directions de chacun d'eux.

5. Si les directions des forces P_1 P_2 P_3... divisaient chacun des angles intérieurs du polygone c_1 c_2 c_3... en deux parties égales, les sinus des deux autres angles a b autour de chaque nœud deviendraient égaux, et les rapports ci-dessus (1) montrent qu'alors toutes les tensions deviendraient égales entre elles et à l'une des forces extrêmes T_0

$$t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = T_0$$

mais, en même temps, les rapports des forces P_1 P_2 P_3... deviendraient eux-mêmes

$$P_1 : P_2 : P_3 \ldots :: \cos. \tfrac{1}{2} c_1 : \cos. \tfrac{1}{2} c_2 : \cos. \tfrac{1}{2} c_3 \ldots \quad (2)$$

puisque l'on a autour de chaque nœud, $\sin. a = \sin. \frac{1}{2} c$, et en général $\sin. A = 2 \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A$; c'est-à-dire que *les forces appliquées*

aux angles du polygone sont alors entre elles comme les cosinus des moitiés de ces angles.

6. Donc, si ces forces étaient les réactions de points fixes $N_1 N_2 N_3$... (*fig.* 2, *pl.* CI) que la corde envelopperait, ces réactions (p. 417) seraient entre elles comme les cosinus des moitiés des angles dont elles forment les sommets. Il faut bien remarquer toutefois que l'égalité des tensions extrêmes n'aurait lieu qu'à la condition de faire abstraction de tout frottement sur les points fixes (voyez p. 422).

7. Supposons de plus, enfin, que tous les côtés du polygone funiculaire soient égaux à l, élevez sur le milieu de chacun d'eux des perpendiculaires (*fig.* 2, *pl.* CI). En se rencontrant deux à deux, elles détermineront les centres de cercles qui passeront par trois sommets consécutifs; et comme on aura en général $\frac{1}{2}\,l = r \cos.\frac{1}{2}\,c$, la relation (2) deviendra, $r_1\, r_2\, r_3$... étant les rayons successifs

$$P_1 : P_2 : P_3 \ldots :: \frac{l}{2r_1} : \frac{l}{2r_2} : \frac{l}{2r_3} \ldots :: \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3} \ldots\ldots \quad (3)$$

de sorte que les réactions $P_1\, P_2\, P_3$... des points fixes seront entre elles en raison inverse des rayons de courbure de leurs points d'application, et la corde sera partout également tendue, abstraction faite du frottement.

8. Quant à la valeur absolue de la pression P en chaque point, puisqu'elle est dans ce cas la résultante des deux tensions égales t, t, on a en général

$$P = 2t \cos.\frac{1}{2}\,c = \frac{t}{r}\,l \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

de sorte que si les points fixes forment un polygone régulier, la réaction de ses sommets aura partout une même valeur $\frac{t}{r}\,l$.

Et le polygone devenant un cercle de rayon r, la réaction sur un arc de ce cercle d'une longueur S serait évidemment

$$P = \frac{t}{r}\,S \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

en sorte que S étant pris égal à 1 mètre, *l'intensité de la réaction par mètre de corde est égale au quotient de la tension par le rayon du cylindre,* ainsi qu'on l'a démontré par une voie un peu différente (p. 423).

9. Supposons maintenant (*fig.* 3, *pl.* CI) que toutes les forces $P_1\, P_2\, P_3$... appliquées aux angles du polygone soient verticales, les proportions (1) auront toujours lieu; mais comme alors

$\sin.b_n = \sin.a_{n+1}$, elles donnent, entre toutes les tensions, les relations

$$T_0 \sin.a_1 = t_1 \sin.b_1 = t_2 \sin.b_2 = t_3 \sin.b_3 \ldots = t_n \sin.b_n . \quad (6)$$

et si i $i_1 i_2 i_3$ sont les inclinaisons sur l'horizon des cordons soumis aux tensions T_0 t_1 $t_2 \ldots$, la relation prend la forme

$$T_0 \cos.i = t_1 \cos.i_1 = t_2 \cos.i_2 \ldots = t_n \cos.i_n \ldots . \quad (7)$$

ou

$$\frac{T_0}{\text{séc}.i} = \frac{t_1}{\text{séc}.i_1} = \frac{t_2}{\text{séc}.i_2} \ldots = \frac{t_n}{\text{séc}.i_n} \ldots \ldots \quad (8)$$

de sorte que, *dans l'équilibre d'un polygone funiculaire tiré par des forces verticales, les tensions des côtés sont entre elles comme les sécantes de l'inclinaison de ces côtés sur l'horizon* (8) ; *en d'autres termes, les composantes horizontales de toutes les tensions sont égales entre elles* (7). Ainsi les points d'attache du système sont tirés *horizontalement* par des efforts égaux.

$$T_0 \cos.i = T_z \cos.i_z \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

10. Quant aux tractions T_0 T_z qu'ils éprouvent suivant les directions des cordons extrêmes, on les obtiendrait par la décomposition indiquée plus haut (§ 3) ; mais il est peut-être aussi simple de remarquer que les composantes verticales $T_0 \sin.i$, $T_z \sin.i_z$ devant nécessairement détruire à elles seules le poids total de tout le système, si l'on désigne ce poids total par R, résultante ou somme des poids $P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n$, on a

$$R = T_0 \sin.i + T_z \sin.i_z \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Combinant cette équation avec la précédente, il vient

$$T_0 = \frac{R \cos.i_z}{\sin.(i + i_z)} \quad \text{et} \quad T_z = \frac{R \cos.i}{\sin.(i + i_z)} \ldots . \quad (11)$$

ce qui montre que ces tensions T_0, T_z, ne seront égales que lorsque $\cos.i_z$ sera $= \cos.i$, c'est-à-dire lorsque les cordons auront une même inclinaison sur l'horizon.

11. On aurait des relations analogues entre les tensions de deux cordons quelconques du polygone : il suffirait de substituer dans les formules ci-dessus, à la place de R, la somme des poids appliqués à tous les nœuds intermédiaires à ces cordons et d'introduire les inclinaisons qui leur conviennent.

12. Puisqu'il y a nécessairement équilibre à chaque nœud entre le poids P qui y est appliqué et les deux tensions adjacentes, les rapports de ces trois forces (p. 696) pourraient être représentés par ceux des côtés d'un triangle dont les côtés seraient parallèles aux

directions de ces forces; mais, en menant (*fig.* 4) des perpendiculaires à ces directions, on formerait un triangle semblable. Donc (*fig.* 4), *si l'on prend sur une horizontale une suite de divisions* $P_1\ P_2\ P_n$... *proportionnelles aux poids qui agissent sur un polygone funiculaire en équilibre, et si, par chaque point de division, on mène des perpendiculaires aux directions des côtés du polygone, ces perpendiculaires concourront toutes en un même point* S, *et leurs grandeurs comprises entre ce point et l'horizontale qui représente le poids total du système sont proportionnelles aux tensions* T_0, t_1, t_2, t_n, T_1 *des côtés auxquels ces lignes convergentes sont perpendiculaires.*

13. Lorsque les côtés d'un polygone funiculaire deviennent infiniment petits et ne sont d'ailleurs soumis qu'à leur propre poids, le polygone se transforme en une courbe nommée *chaînette*, pour laquelle je renvoie à la page 263.

14. Le problème suivant, qui trouve des applications dans le *levage* des pièces de charpente, pourra servir d'exercice sur les théories qui précèdent. J'en emprunte la solution à la mécanique de *Whewell*.

Problème. Soit (*fig.* 5, *pl.* CI) PQ une pièce quelconque dont le poids est W, suspendue par les cordes AP, BQ, supposées d'abord attachées par leurs extrémités aux points fixes A, B, et dont les longueurs respectives sont p et q.

Soient encore G le centre de gravité de la pièce ; a, b, les distances de ce centre à ses extrémités P, Q ; $c = \text{AB}$ la distance des points fixes A et B ; $i = \text{DEG}$ l'angle d'inclinaison de AB sur la verticale OGE ; P la tension de la corde AP ; Q celle de la corde BQ ; δ l'angle BDQ de c avec la direction de la pièce ou poutre PQ, β l'angle EBQ compris entre c et la corde BQ ; α l'angle EAP compris entre c et la corde AP.

Les conditions de forme et d'équilibre du système sont toutes données par les équations suivantes :

$$P = \frac{Wb}{(a+b)} \cdot \frac{\sin.(\delta+i)}{\sin.(\alpha-\delta)} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$Q = \frac{Wa}{(a+b)} \cdot \frac{\sin.(\delta+i)}{\sin.(\beta+\delta)} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{b\sin.(\beta+\delta)}{a\sin.(\alpha-\delta)} = \frac{\sin.(i-\beta)}{\sin.(i+\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$c\sin.\beta - p\sin.(\alpha+\beta) = (a+b)\sin.(\beta+\delta) \quad \ldots \quad (4)$$

$$c\sin.\alpha - q\sin.(\alpha+\beta) = (a+b)\sin.(\alpha-\delta) \quad \ldots \quad (5)$$

Si la pièce a son centre de gravité au milieu de sa longueur, on a $a=b$ et

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sin.(\beta+\delta)}{\sin.(\alpha-\delta)}=\frac{\sin.BQP}{\sin.APQ}$$

les tensions sont réciproquement comme les sinus des angles en P et Q.

Si A et B sont sur la même horizontale $i=90°$, l'équation (3) devient

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin.(\beta+\delta)}{\sin.(\alpha-\delta)}=\frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}$$

Enfin, si les points fixes A et B sont remplacés par des poulies fixes sur lesquelles s'enroulent les cordes QBW_2 et PAW_1 à l'extrémité desquelles pendent librement des poids déterminés W_2 et W_1, la position d'équilibre du système est donnée par

$$\frac{W_1}{W}=\frac{b}{(a+b)}\cdot\frac{\sin.(\delta+i)}{\sin.(\alpha-\delta)}$$

$$\frac{W_2}{W}=\frac{a}{(a+b)}\cdot\frac{\sin.(\delta+i)}{\sin.(\beta+\delta)}$$

et l'équation (3) doit être satisfaite, soit :

$$\frac{b\sin.(\beta+\delta)}{a\sin.(\alpha-\delta)}=\frac{\sin.(i-\beta)}{\sin.(i+\alpha)}$$

POMPES. Je me conformerai à l'usage, en confondant sous cette dénomination plusieurs machines hydrauliques ayant pour but commun d'élever les eaux au-dessus de leur niveau naturel, mais qui fonctionnent cependant en vertu de principes assez différents.

1. *Pompe aspirante* (*fig.* 1, *pl.* CII). La pompe la plus anciennement connue est, je crois, la pompe aspirante; *Vitruve* du moins en fait remonter l'invention à *Ctesibes*, ou *Ctesibius* d'Alexandrie, contemporain de *Héron*, et qui vivait dès lors, 100 ans environ avant Jésus-Christ. On éprouvera peut-être quelque peine à admettre qu'une notion plus ou moins exacte de la pression exercée par l'atmosphère ait été refusée à l'inventeur d'une machine dont les effets et le jeu sont entièrement fondés sur la *pesanteur de l'air*, déjà soupçonnée d'ailleurs par *Aristote*. Quoi qu'il en soit, on enseigne que ce jeu et ces effets restèrent, pendant environ dix-sept siècles, sans autre explication que l'*horreur du vide*, théorie que Galilée ébranla d'abord, et que renversèrent bientôt *Torricelli* et *Pascal*, par l'invention du *baromètre*.

2. *Description*. La pompe aspirante se compose essentiellement

d'un *corps de pompe* CF, — d'un *tuyau d'aspiration* EN', dont l'extrémité plonge au-dessous du niveau NN' de l'eau à élever, — d'un *piston* CD, percé en son milieu d'un trou muni d'une soupape S, — enfin d'une soupape dite *dormante* T, placée au haut du tuyau d'aspiration. Ces deux soupapes s'ouvrent de bas en haut, et le piston est mu alternativement de haut en bas et de bas en haut par une tige mise en communication plus ou moins directe avec la force mouvante.

3. *Jeu de la machine*. Supposons d'abord le piston à la limite supérieure CD de sa course, et tout le système intérieur CN' rempli d'air atmosphérique à la pression barométrique moyenne b de la localité, et soit $H = 13.6\, b$ la hauteur de la colonne d'eau qui, dans le lieu où la pompe est établie, fera équilibre à la colonne mercurielle du baromètre.

Abaissons le piston CD jusqu'à la limite inférieure de sa course, qui devra toujours se confondre autant que possible avec le plan supérieur EF du siége de la soupape dormante T. Dans son mouvement de descente, et la soupape T étant fermée par son propre poids, le piston tendra à comprimer l'air contenu dans le corps de pompe. L'excès de tension que l'air acquerra ainsi soulèvera la soupape S, et lorsque le piston arrivera au bas de sa course, la soupape S se refermera par son propre poids.

Ramenons le piston à la limite supérieure CD de sa course $c = CE$, un vide tendra à se former au-dessus de la soupape dormante T; mais l'air à la tension H contenu dans le tuyau d'aspiration soulèvera cette soupape T, en vertu de l'excès de tension H, et occupera ainsi un plus grand espace.

Sa force élastique diminuera donc; la pression atmosphérique H qui agit sur la surface du réservoir NN' poussera de bas en haut dans le tuyau d'aspiration une certaine quantité d'eau, et la soupape dormante se refermera alors par son propre poids.

4. Soit x_1 la hauteur N'n' de la colonne d'eau qui se sera ainsi introduite à la fin de la première levée du piston, et y_1 la hauteur de la colonne d'eau, capable de faire alors équilibre à la tension de l'air intérieur. Il est clair que l'on doit avoir

$$x_1 + y_1 = H \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (1)$$

Désignons par L et r la longueur et le rayon du tuyau d'aspiration, et par R le rayon du piston, $\pi R^2 c = Q$ sera le volume engendré par le mouvement du piston, et $\pi r^2 L = Q'$ celui du tuyau d'aspiration. On aurait donc, en vertu de la loi de *Mariotte* ou de *Boyle*,

$$y_1 = H \left(\frac{Q'}{Q + Q' - \pi r^2 x_1} \right) = \frac{H L r^2}{R^2 c + r^2 L - r^2 x_1} \, . \, . \, . \qquad (2)$$

pourvu que l'on fasse abstraction de la notable quantité d'air que l'eau contient toujours, et qui se sera dégagée du niveau nn' ; posant pour abréger :

$$\frac{R^2}{r^2}=m \quad \text{et} \quad H+L+mc=p \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\; (3)$$

on déduira des équations (1) et (2) pour la fin de la première levée du piston

$$x_1=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4mcH} \quad \text{et} \quad y_1=H-x_1 \;.\;.\;\; (4)$$

Abaissons le piston de nouveau, puis soulevons-le une seconde fois jusqu'à la limite supérieure de sa course, des effets absolument analogues à ceux que nous avons décrits se produiront encore, et en vertu des mêmes raisonnements, on aura à la fin de cette seconde levée, abstraction faite de l'air qui se dégagera de l'eau introduite,

$$x_2=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4mcH-4x_1(H+L-x_1)}$$

$$\text{et} \quad y_2=H-x_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\; (5)$$

Enfin, en imitant toujours les mêmes raisonnements, on obtiendrait à la fin de la n[ième] levée :

$$x_n=\frac{1}{2}\left\{p-\sqrt{p^2-4mcH-4(H+L-x_{n-1})\,x_{n-1}}\right\} \;.\;.\;\; (6)$$

$$y_n=\frac{1}{2}\left\{2H-p+\sqrt{p^2-4mcH-4(H+L-x_{n-1})x_{n-1}}\right\} \quad (7)$$

5. Ces équations permettront de calculer avec approximation l'élévation de l'eau et la tension de l'air dans le tuyau d'ascension, après un nombre déterminé n de levées, ainsi que leurs différences entre deux levées consécutives.

Si l'on néglige l'effort nécessaire pour soulever la soupape dormante, on trouve ainsi que l'eau ne cessera de monter dans le tuyau d'ascension que lorsque la différence x_n-x_{n-1} sera zéro, c'est-à-dire lorsque l'on aura $x_n=x_{n-1}$, ce qui donne, en mettant x_{n-1} à la place de x_n dans l'équation (6), la condition $x_{n-1}=H$, qui resta, dit-on, inconnue jusqu'au temps de *Torricelli*. Ainsi, l'eau montera dans le tuyau d'ascension, abstraction faite des résistances que nous avons négligées, tant que sa longueur L ne dépassera pas la hauteur H de la colonne d'eau qui fait équilibre au poids de l'atmosphère ; et si L est $<$H, le liquide entrera enfin dans le corps de pompe.

Afin de tenir compte des variations assez étendues du baromètre,

la pratique réduit H à la valeur $H = 12b$, et pour éviter les *arrêts* qui pourraient naître du cantonnement de l'air dégagé du liquide au-dessous du piston, elle fait $L + c < 12b$ ou au plus $= 12b = 8$ à 9 mètres au maximum, et, ainsi que nous l'avons dit plus haut, elle abaisse le piston aussi près que possible de la soupape dormante. Ce qui nous permet de considérer comme nul l'*espace nuisible* laissé entre cette soupape et la limite inférieure de la course, et fait que nous nous dispensons d'en étudier l'influence.

6. *Travail de la pompe aspirante.* L'eau étant parvenue jusqu'à l'intérieur du corps de pompe et remplissant toute sa capacité, la soupape dormante T se referme par son propre poids, le piston s'abaisse; la pression qu'il exerce sur le liquide se transmet de bas en haut à la soupape S, la soulève, et lorsque ce piston est parvenu au bas de sa course, tout le liquide du corps de pompe a passé au-dessus de lui, et la soupape S s'est refermée par son poids.

Une nouvelle ascension du piston soulève à la fois l'eau qui a passé au-dessus de lui, tend à faire le vide en dessous, soulève ainsi la soupape dormante, qui laisse entrer alors dans le corps de pompe une nouvelle quantité d'eau, et bientôt, par la même manœuvre, celle-ci s'élève au-dessus du piston, au niveau constant AB, et s'échappe par le dégorgeoir K. La pompe commence alors à travailler utilement.

Dans son mouvement de descente, le piston frotte sur le corps de pompe et consomme un faible travail que l'on pourra calculer d'après les résultats approximatifs de la page 822. Une autre quantité de travail est absorbée par le passage de l'eau à travers l'orifice S, où une contraction a lieu; on pourrait la calculer approximativement par les formules de l'article *Ecoulement* (p. 572), si le coefficient de la contraction pour un tel orifice n'était pas inconnu.

7. Pendant la levée, et à un instant quelconque, le piston, dont l'aire $= \pi R^2$, est pressé en dessus par une colonne d'eau dont la hauteur est $(H + h^1)$, en appelant h^1 la hauteur du niveau AB au-dessus de sa face supérieure. Il est poussé de bas en haut par le poids d'une colonne d'eau, ayant πR^2 pour base et $(H - h_1)$ pour hauteur, en appelant h_1 la distance de sa face inférieure au niveau du réservoir NN^1. Π étant le poids du mètre cube d'eau, la charge du piston est donc, à chaque instant de sa levée,

$$\Pi \pi R^2 [(H + h^1) - (H - h_1)] = \Pi \pi R^2 (h^1 + h_1)$$

de sorte qu'en négligeant l'épaisseur du piston et faisant $(h^1 + h_1) = h =$ hauteur du niveau AB au-dessus du réservoir inférieur NN^1, on peut dire que, *pendant sa levée, le piston porte toujours le poids d'une colonne d'eau dont il forme la base* πR^2 *et dont la hauteur*

$h = (h' + h_1)$ *est la différence des niveaux inférieur et supérieur* AB *en* NN^1.

Donc, à chaque levée, le travail T_o du piston est

$$T_o = \Pi \pi R^2 h c = \Pi Q h$$

c'est-à-dire *le produit du poids de l'eau élevée par la hauteur à laquelle la machine l'élève,* résultat que l'on aurait pu écrire immédiatement en partant de la théorie générale des machines (p. 1081).

8. A ce travail utile il faudrait encore ajouter le travail du frottement pendant la montée (p. 822), la perte de force vive qui a lieu au passage de la soupape dormante (p. 573), le travail exigé pour soulever cette soupape, celui dû au frottement de l'eau dans les tuyaux (p. 574); et si le piston se mouvait un peu vite ou d'un mouvement varié, il y aurait lieu de tenir compte encore du travail de l'inertie du liquide et des parties mobiles. Enfin, le volume engendré par le mouvement du piston est toujours plus grand que celui qui s'écoule par le dégorgeoir, les soupapes et les garnitures, après quelque temps de service, laissant redescendre une partie de l'eau qui a passé au-dessus d'elles. Prenant en bloc toutes ces pertes de travail, désignant par T_m le travail moteur appliqué à la tige du piston et par T_u le produit du poids de l'eau réellement élevée par la hauteur de l'élévation, on aurait, en discutant quelques observations de *d'Aubuisson* sur les pompes d'épuisement de la mine de Poullaouen

$$T_m = 1.28\, T_u \text{ au plus.}$$

Cependant, on lit partout que les meilleures pompes n'utilisent guère que les 0.66 du travail dépensé sur la tige du piston, et, après quelque temps de service, les 0.50 seulement, ce qui fournit les relations

$$T_m = 1.5\, T_u \quad \text{et} \quad T_m = 2 T_u$$

qui diffèrent notablement de la première. Je ne sais d'où sortent ces derniers résultats, et j'ai fait jusqu'ici de vains efforts pour découvrir, en dehors des observations de *d'Aubuisson,* une seule mesure *directe* du travail consommé sur une machine aussi universellement répandue et dont l'invention date de vingt siècles.

9. *Conditions d'établissement : d'Aubuisson* recommande, dans l'établissement des pompes, de limiter la vitesse du piston entre $0^m.16$ et $0^m.24$; — d'augmenter, lorsqu'on le peut, la longueur de la course plutôt que d'accroître cette vitesse ; dans les grandes pompes, cette longueur de course est comprise entre $1^m.20$ et $1^m.50$; — de réduire l'*espace nuisible* à $0^m.05$, sans l'anéantir complétement, afin que, par suite du jeu que prennent toujours les pièces du mécanisme qui meut le piston, il n'aille pas frapper sur la soupape dormante T.

Il est clair, d'ailleurs, que les soupapes devront être d'autant plus grandes qu'elles fermeront mieux. — Quant au frottement du piston, le travail qu'il consomme est toujours très-faible, ce qui explique pourquoi la pratique n'a jamais fait usage des nombreux pistons *sans frottement* décrits dans nos collections académiques et autres. Enfin, pour utiliser plus uniformément le travail moteur, on accouple quelquefois deux pompes à l'aide d'un balancier, de manière qu'un piston monte pendant que l'autre descend, ainsi qu'on le voit dans la pompe à incendie (*fig.* 5). — Le travail est alors constamment égal à celui qui est nécessaire pour soulever un piston augmenté de celui que sa descente exige.

Après cette étude de la pompe aspirante, je crois pouvoir me borner à indiquer sommairement le jeu et les effets des machines du même genre.

10. *Pompe économique.* — La *fig.* 2, *pl.* CII, donnera une idée suffisamment exacte d'une pompe de facile, prompte et économique construction, capable toutefois de rendre quelques services dans l'épuisement de fondations, et lorsque les eaux ne devront être élevées qu'à une faible hauteur. Elle se compose d'un coffre en bois de forme quelconque ABCD, avec une division en EF portant une soupape dormante T, en bois et cuir, plus ou moins grossière. Sur le diaphragme EF, on dispose un cuir mou, et on cloue solidement sur ce cuir et sur le diaphragme la partie inférieure d'une espèce de sac G en grosse toile double, en toile à voile, ou en cuir. Ce sac doit avoir une longueur ST égale à trois fois environ la course. Quelques cercles *fff*, en fil de fer ou en osier le tiennent béant, et avant de les introduire dans le sac, on les relie les uns aux autres par quatre ficelles; enfin, si le sac est en toile, on renforce ses plis par des bandes de basane. A sa partie supérieure est une rondelle de bois portant une soupape S, et enfin la fourchette du manche de la pompe.

11. *Gregory*, qui a fait fonctionner cette grossière machine, affirme qu'un sac en toile à voile n° 3, de 0m.15 diamètre, renforcé de basane aux plis est sensiblement imperméable sous une charge d'eau de cinq mètres, et qu'il a résisté pendant un mois à un travail d'épuisement de six heures par jour. On peut remarquer dans ce système un exemple de *piston sans frottement.*

12. *Pompe foulante.* L'une des formes de la pompe foulante est indiquée *fig.* 3; le piston CD foule de bas en haut à l'aide d'un étrier en fer qui n'est point indiqué et qui met sa tige P en communication avec une autre tige conduite par le moteur. Cette pompe est noyée dans l'eau du réservoir inférieur NN'. Quand le piston CD descend, la soupape dormante T est fermée, et sa soupape S ouverte laisse passer au-dessus d'elle l'eau du réservoir, sans qu'aucune action *pneumatique* soit mise en jeu. Lorsque le

piston remonte, sa soupape S se referme et il refoule l'eau par-dessus la soupape dormante T qui, se refermant ensuite, l'empêche de rétrograder. Il est évident que, pendant sa montée, la charge du piston est égale au poids d'une colonne d'eau dont la base est celle πR^2 du piston, et la hauteur h égale à la différence des niveaux entre le dégorgeoir supérieur et la surface NN′ du réservoir.

On prétend qu'il est plus avantageux de fouler de bas en haut que de haut en bas. Les pompes noyées ont l'inconvénient grave de rendre les réparations difficiles.

13. La *fig.* 4 indique un autre système de pompe foulant de haut en bas; elle est également noyée. Quand le piston monte, l'eau s'introduit donc par la soupape T; quand il descend, T se referme, la pression qu'il exerce sur le liquide soulève la soupape *de retenue* T′ et refoule l'eau dans le tuyau montant. La charge du piston est ici celle d'une colonne d'eau dont le piston est la base et dont la hauteur est la distance verticale de sa face inférieure au dégorgeoir.

On rend souvent le jet de sortie un peu plus continu en adaptant un réservoir d'air R au tuyau montant et dont l'action régulatrice se conçoit facilement.

14. *Pompe aspirante et foulante.* Imaginez que, dans la *fig.* 4, on ait prolongé inférieurement le tuyau au-dessous de la soupape dormante T, et que, en même temps, le niveau NN′ du réservoir soit abaissé comme dans la *fig.* 1, de manière que le prolongement L y plonge cependant suffisamment, et vous aurez une idée d'une pompe à la fois *aspirante et foulante*, soumise dès lors aux conditions de l'une et de l'autre. Ainsi : 1° le prolongement ou tuyau d'aspiration doit avoir une longueur $< 12\ b$ (§ 5); 2° lorsque le piston monte, la hauteur de la colonne qui le charge est la distance de sa face inférieure au niveau du réservoir inférieur NN′; 3° quand il descend, la charge a pour hauteur la différence de niveau de sa face inférieure au dégorgeoir.

15. *La pompe à incendie*, représentée en principe *fig.* 5, offre un autre exemple de pompe aspirante et foulante à double effet, avec réservoir d'air dont l'examen de la figure fera suffisamment comprendre le jeu. Les corps de pompe QQ′, en bronze, ont environ $0^m.12$ diamètre et $0^m.60$ hauteur; le réservoir d'air a hauteur $0^m.25$ et diamètre $0^m.55$. On voit à sa partie inférieure une ouverture circulaire à laquelle est soudé un tuyau en cuivre sur lequel se visse l'extrémité du long tuyau de cuir qui porte l'ajutage ou *lance* dont l'orifice a environ $0^m.016$ diamètre.

16. D'après *d'Aubuisson*, huit pompiers bien exercés donnent 60 coups de balancier par minute, la course des pistons étant $0^m.12$; et ils portent le jet à 20 mètres de hauteur verticale. — Abstraction faite de tout déchet, c'est, dit-il, 27 kilogrammètres d'effet utile

par homme et par seconde, mais ce dernier chiffre ne résulte pas des données qui le précèdent.

17. Quant à la portée *horizontale*, voici le résultat de quelques observations de M. le capitaine du génie, *Belmas* :

Une pompe à incendie, manœuvrée par dix hommes, telle que celle en usage pour la ville de Paris, donne au jet une amplitude horizontale maximum de 26 mètres sous un angle de 45° avec une lance conique et un ajutage de même forme, percé d'un orifice de $0^m.0135$. Le débit, calculé d'après plusieurs expériences, a été un peu inférieur à quatre litres par seconde, la pression dans le réservoir d'air, observée avec le manomètre, variant de 5 à 6 atmosphères. En calculant la vitesse au sortir de l'ajutage pour fournir au débit indiqué, on trouve qu'elle est d'environ 27 mètres. Il en résulte que le travail utile par seconde et par homme dépasse à peine la moitié de celui que j'ai indiqué ci-dessus d'après *d'Aubuisson*. Mais, fait remarquable, c'est que, en appliquant quatorze hommes à la même pompe, l'amplitude est restée toujours la même, bien que la pression dans le réservoir fût devenue tellement grande que le manomètre se brisa. M. *Belmas* pense que ces résultats sont dus à ce que, avec une plus grande vitesse initiale, la résistance de l'air divise la masse d'eau lancée, augmente ainsi la surface choquée et, par suite, cette résistance elle-même qui croît à peu près comme cette surface et comme le carré de la vitesse. Un effet analogue a lieu, dit-il, lorsqu'on décharge à bout portant un fusil dans la terre : la balle s'aplatit par la résistance et pénètre moins avant que si le fusil eût été tiré de plus loin, parce qu'alors la balle a une vitesse moins grande au moment de son entrée dans la terre, ce qui diminue sa résistance.

18. *Invention.* Les premières pompes à incendie dont on ait fait usage à Paris y ont été importées de Hollande, par *Dumouriez-Duperrier*, en 1699. *Louis XIV* acheta douze de ces pompes à l'importateur et les donna à la ville.

19. On a combiné de cent et une manières les pompes types que nous venons de passer en revue, et l'on est ainsi parvenu à créer une famille extrêmement nombreuse et qui augmente de jour en jour. Le Conservatoire des arts et métiers regorge de modèles de pompes; et un grand nombre d'entre elles, réinventées et brevetées (S. G. D. G.) depuis un demi-siècle, sont décrites dans l'ouvrage de *Ramelli*, intitulé *Delle artificiose Machine*, publié en France, en 1585. Je signalerai entre autres un grand nombre de pompes circulaires, celles dites à soufflet ou pompes des prêtres, la pompe à piston-pendule, etc., etc.

Je donnerai encore une idée de la *pompe centrifuge* et de la pompe *spirale*, qui ont l'une et l'autre un caractère assez marqué d'originalité.

20. *Pompe centrifuge.* Réduite à son principe, la pompe centrifuge (*fig.* 6, *pl.* CII) peut être considérée comme un tube KMI courbé à angle droit en M et tournant horizontalement d'un mouvement suffisamment rapide, que nous supposons être uniforme, autour d'un axe vertical GK. Une soupape K se levant de bas en haut est placée un peu au-dessous du niveau NN′ du réservoir inférieur. Un orifice *o*, habituellement, mais non pas nécessairement, percé de manière que l'eau sorte dans une direction contraire au mouvement de rotation, projette l'eau élevée dans une auge circulaire A destinée à la recevoir. Le tube ayant été *amorcé*, c'est-à-dire rempli d'eau une fois pour toutes, la rotation du système développe une force centrifuge, qui produit à l'orifice *o* la pression à laquelle est dû l'écoulement; et, celui-ci tendant à former un vide dans le tube vertical L, l'eau du réservoir NN′ s'élève dans ce tube à la suite de celle qui sort en *o*, effet que le calcul éclairera d'ailleurs.

Soient Π le poids du mètre cube d'eau, a la section du tube horizontal et celle de l'orifice en o, r la distance d'une tranche liquide de ce tube à l'axe vertical de rotation, et t la durée en secondes d'une révolution du système :

$\frac{\Pi a\,dr}{g}$ sera la masse de la tranche en question et $\frac{2\pi r}{t}$ sa vitesse circulaire uniforme.

$\frac{\Pi a\,dr}{gr}\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 = \frac{\Pi a\,.\,4\pi^2}{gt^2}\,r\,dr =$ force centrifuge qui agit sur cette tranche. Intégrant depuis $r=o$ jusqu'à $r=\mathrm{R}=\mathrm{G}o$, on a, pour la pression centrifuge exercée sur l'orifice o,

$$\frac{\Pi a}{g}\cdot\frac{2\pi^2\mathrm{R}^2}{t^2}=\frac{\Pi a}{g}\cdot\frac{\mathrm{V}^2}{4}$$

en appelant V la vitesse circulaire de l'orifice. La hauteur h du même liquide qui produirait à l'orifice une même pression serait évidemment donnée en égalant $\Pi a h$ à la valeur précédente, d'où

$$h=\frac{2\pi^2\mathrm{R}^2}{gt^2}=\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Ainsi (p. 809) *la pression exercée sur l'orifice par la seule force centrifuge est celle d'une colonne d'eau de la hauteur due à la vitesse circulaire de cet orifice.*

Appelant H la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre au poids de l'atmosphère et faisant $\mathrm{MN}=\mathrm{L}$, on aura donc pour la hauteur totale de la colonne qui produit l'émission

$$\mathrm{H}+h-\mathrm{H}-\mathrm{L}=h-\mathrm{L}$$

Ainsi, il n'y aurait pas émission si L était > ou seulement = h, et comme il est évident que L ne peut atteindre H sans que la colonne soit rompue, quel que soit h, cette machine ne peut élever l'eau à une hauteur plus grande que les pompes aspirantes.

Tant que L sera plus petit que h, on aura donc pour la vitesse théorique d'émission que nous désignons par v,

$$v = \sqrt{2g(h-L)} = \sqrt{V^2 - 2gL} = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{2\pi^2 R^2}{gt^2} - L}$$

Pour que cette vitesse ne soit pas négative ou pour qu'il y ait émission, il faut donc que l'on ait toujours

$$\frac{2\pi^2 R^2}{gt^2} > L$$

ce qui exige que la durée t de la révolution du système soit

$$t < \pi R \sqrt{\frac{2}{gL}}$$

Mais, dans les théories que l'on a données de cette machine, on n'a pas remarqué que cette durée t avait en outre une limite supérieure. Il est clair pourtant que la colonne se romprait au point M, et qu'un vide, qui ne pourrait être rempli que par un mouvement rétrograde de o vers M, se formerait si la vitesse v' due à la hauteur H — L devenait un moment plus petite que la vitesse v d'émission. Prenant toujours les valeurs théoriques que l'on modifierait facilement à l'aide des coefficients convenables, il faut donc que l'on ait encore

$$\sqrt{2g\left[\frac{2\pi^2 R^2}{gt^2} - L\right]} < \sqrt{2g(H-L)}$$

de sorte que la durée t d'une révolution est définitivement comprise entre les limites suivantes

$$t < \pi R \sqrt{\frac{2}{gL}} \quad \text{et} \quad > \pi R \sqrt{\frac{2}{gH}}$$

En d'autres termes, la vitesse circulaire V de l'orifice o doit être elle-même comprise entre les limites

$$V > \sqrt{2gL} \quad \text{et} \quad < \sqrt{2gH}$$

En dehors de ces limites, l'émission d'une part ou l'aspiration de l'autre seraient impossibles; et si on fait $H = 10^{m}.32$, on voit que la vitesse circulaire V de l'orifice ne doit jamais atteindre $14^{m}.2$.

21. *Effet utile.* Quant à l'effet utile de la machine, il est évidemment $\Pi a v L$; or il faut que le moteur effectue ce travail, augmenté

de celui qui est nécessaire pour imprimer à la masse qui sort de l'orifice o la vitesse absolue $(V-v)$. On a donc pour le rapport du travail utile au travail dépensé

$$\frac{gL}{gL+\frac{1}{2}(V-v)^2}=\frac{gL}{gL+\frac{1}{2}\left[V-\sqrt{V^2-2gL}\right]^2}$$

Ce rapport serait l'unité si l'on pouvait rendre la parenthèse nulle ; mais cette condition est impossible, car nous avons vu que la moindre valeur possible de V^2 était tout au moins $=2gL$; donc à cette limite extrême le rapport de l'effet utile au travail minimum du moteur serait au plus

$$\frac{gL}{gL+\frac{1}{2}V^2}=\frac{gL}{gL+gL}=\frac{1}{2}$$

résultat bien différent de celui que *Navier* indique dans ses leçons et qui explique assez pourquoi cette machine a été abandonnée.

22. *Invention.* L'idée de cet appareil a été présentée, en France, à l'Académie des sciences, par *Le Demours*, dans l'année 1732. On l'attribue en Angleterre à *Erskine*, et la pompe y porte son nom ; mais je n'ai pas su découvrir à quelle époque vivait l'inventeur anglais.

23. *Pompe spirale* (*fig.* 7, *pl.* CII). On prendra une première idée des effets de cette curieuse machine en jetant un coup d'œil sur la *figure* 8. $h_1 a_1 h_2 a_2 h$ est un tube vertical plusieurs fois courbé en U et terminé par une partie rectiligne h. Si, par un moyen quelconque, on introduit dans ce tube des colonnes successives d'air et d'eau, on parviendra évidemment à obtenir entre les niveaux A et B une dénivellation qui croîtra avec le nombre des branches coudées qui précèdent le tube montant h. En effet, le poids de la colonne d'eau h_1 se transmet tout entier, à l'aide de la colonne d'air a_1, au sommet de la colonne d'eau h_2. En ajoutant à ce poids h_1 le poids propre de la colonne h_2, on aura la pression h_1+h_2 transmise par l'intermédiaire de a_2 à la partie inférieure de la colonne d'eau h, colonne dont la hauteur pourra dès lors, dans le cas de l'équilibre, être égale à $h_1+h_2=h$. En général, cette colonne h sera égale à la somme des colonnes d'eau qui la précèdent. Or ce que le système de la *figure* 8 indique au point de vue de l'équilibre, la pompe spirale le réalise au point de vue dynamique, ainsi qu'il suit (*fig.* 7) :

24. T est un tambour creux, tantôt cylindrique, tantôt conique, plongeant dans l'eau du réservoir inférieur jusqu'à la hauteur de son axe. Sur ce tambour est enroulé en hélice ou en spirale un tube métallique rond ou carré, formant un nombre de révolutions $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots S_n$ d'autant plus grand que l'eau doit être élevée à une plus grande hauteur. La dernière spire se raccorde avec l'axe t du

tambour, creux à l'arrière, et qui est comme le prolongement de celle-ci. En E est un emmanchement, d'une exécution assez difficile, qui doit réunir, par un joint imperméable à l'eau et à l'air comprimé, le tuyau d'ascension H, nécessairement fixe, et l'axe creux *t* qui doit tourner librement dans cette capacité E.

25. J'ai vu, en 1850, fonctionner, au Conservatoire, un grand modèle de cette machine dont le tambour était cylindrique; et voici à peu près ce qui s'y passe : lorsqu'on tourne *dextrorsum* la manivelle M, la première spire S_1 prend d'abord à chaque tour une demi-spire d'air, puis une demi-spire d'eau. Après un nombre de tours qui dépend du nombre S_n de spires enroulées ou de la hauteur du tuyau montant H, tout le système est rempli de colonnes successives d'eau et d'air, et l'eau jaillit par *bouffées* intermittentes au sommet du tuyau montant. Il ne m'a pas paru qu'il y ait mélange sensible de l'eau et de l'air dans ce tuyau, comme quelques auteurs l'ont supposé. La machine commençant alors à travailler utilement, la première spire cesse de prendre régulièrement à chaque révolution des volumes égaux d'eau et d'air, ce que la théorie suppose encore. Cependant, elle aurait pu remarquer que les fluides intérieurs étant à cette période du travail parvenus à leur maximum de tension, l'eau s'élève nécessairement, à gauche, dans la première spire, au-dessus du niveau NN′ du réservoir, et souvent assez haut pour que les volumes successifs d'air et d'eau introduits soient dans le rapport de 1 à 2. Cet état du système semble se renouveler périodiquement à courts intervalles, et il était presque toujours suivi à la révolution suivante d'un vomissement à l'orifice O, qui disparaissait pour reparaître ensuite. Ces phénomènes assez compliqués m'ont paru devoir rendre la théorie de cette machine extrêmement difficile, et, après quelques essais infructueux, j'ai renoncé à l'établir. On pourra consulter celle que, d'après *Bernouilli*, je crois, *Navier* a consignée dans ses leçons. Je l'ai jugée trop peu d'accord avec les faits pour la reproduire ici.

26. *Effet utile*. A défaut de théorie, les observations faites sur la pompe *héliçoïdale* du Conservatoire, à l'aide de la manivelle dynamométrique, ont montré que lorsque la hauteur du tuyau montant H est un peu moindre que la somme des diamètres de toutes les spires, l'effet utile de la machine atteint à peu près les 0.60 du travail moteur. La pompe d'expérience portait six spires à section carrée de $(0^m.06)^2$ environ, roulées sur un cylindre de près de 1 mètre de diamètre; elle élevait l'eau à 5 mètres environ.

27. *Invention*. Cette ingénieuse machine a été longtemps attribuée à *André Würtz*, ferblantier de *Zurich*, et les mémoires de la Société de cette ville ont décrit celle qu'il avait établie en 1766; mais la pompe spirale avait été présentée à l'Académie des sciences par le Hollandais *Vettman*, dès 1756. *Daniel Bernouilli* s'en est

occupé, en 1772, dans les mémoires de Pétersbourg, ainsi que le père *Ximenès* dans le tome 12 de la *Raccolta* des auteurs italiens sur l'hydraulique.

POTASSE. Alcali très-caustique, dont l'analyse par la voie sèche ou par la voie humide fait un fréquent emploi; à cet état, on doit le considérer comme un hydrate formé de deutoxyde de potassium 0.84 + eau 0.16 ; et le deutoxyde de potassium, qui en forme la base, contient lui-même sur 100 parties, savoir : potassium 83.05 + oxygène 16.95.

L'hydrate de potasse est solide, blanc un peu opalin; l'eau le dissout très-aisément avec dégagement de chaleur, et la dissolution a l'odeur caractéristique de la lessive; elle ramène vivement au bleu le papier de tournesol rougi. Chauffé dans un vase d'argent, l'hydrate solide entre en fusion au-dessous de la chaleur rouge. Si la température s'élève, il se convertit en peroxyde et abandonne de l'eau. A la température ordinaire, il est très-déliquescent, et au contact de l'air, dont il absorbe l'acide carbonique, il se convertit peu à peu en carbonate, et même à la longue en bicarbonate de potasse. Il est soluble dans l'alcool lorsqu'il est exempt d'acide carbonique, et il dissout lui-même plusieurs oxydes, l'alumine, par exemple.

On reconnaît la présence de la potasse dans les dissolutions qui ne contiennent pas d'ammoniaque en y versant une solution alcoolique de chlorure de platine, qui y détermine un précipité jaune clair. L'acide tartrique produit aussi dans les dissolutions concentrées de potasse un précipité cristallin de tartrate potassique.

On prépare la potasse en décomposant son carbonate par la chaux, et le carbonate de potasse s'obtient en lessivant les cendres végétales.

POUCE D'EAU. Unité de jaugeage employée par les anciens hydrauliciens français. C'était le produit, en 24 heures, de l'écoulement par un orifice circulaire d'un *pouce* de diamètre, ayant une *ligne* de charge sur le sommet de l'orifice. Il paraît que tantôt on employait un ajutage et que tantôt l'orifice était percé en mince paroi. Il en est résulté que la valeur du pouce d'eau a été assez diversement évaluée.

D'après les expériences de *Mariotte*, le pouce d'eau équivaudrait à une dépense en 24 heures de $19^{mmm}.7437$; on l'évalue cependant à 19.19527, quoique *Couplet* l'ait trouvé équivalent à 18.2804, et *Bossut* à 17.9388.

Prony a proposé de lui substituer une unité qu'il nomme module et dont la valeur serait de 20^{mmm} en 24 heures ; soit 0.00023148 par seconde. Cette quantité d'eau s'écoulerait par un ajutage cylin-

drique ayant longueur $0^m.017$, diamètre 0.02, charge d'eau sur le *centre* 0.05.

POUDRE. Mélange intime de *soufre* purifié, de *charbon* de bois provenant de menues branches écorcées et carbonisées dans des fosses revêtues en briques, et enfin de *salpêtre* ou nitrate de potasse raffiné. Les proportions de ces trois substances ont été longtemps très-diverses; le Gouvernement qui, en France, s'est réservé le droit de fabriquer et de vendre les poudres, emploie aujourd'hui les dosages suivants :

	Poudre de mine	— chasse	— guerre.
Salpêtre.	65	78	75
Charbon.	15	12	12.5
Soufre.	20	10	12.5
	100	100	100

Un simple mélange de ces éléments constituants, séparément triturés d'abord, a presque autant de force que la poudre de fabrication ordinaire. A la rigueur même, le soufre n'est pas indispensable et l'on obtient encore des effets très-énergiques d'un mélange de 32 salpêtre avec 7 de charbon.

La poudre est sans force dès qu'elle a absorbé 0.14 d'humidité. Lorsqu'elle est bien sèche, elle brûle d'autant plus vite qu'elle est en plus grande masse, et la vitesse de combustion est plus grande dans un canal fermé qu'à l'air libre. Le rapport de son volume primitif à celui du gaz qu'elle développe par sa combustion et la tension de ce gaz en atmosphère, ont été très-diversement évalués par *Newton*, *Papin*, *Lemery*, *Wolf*, *Boyle*, *Hales*, *Hauksbee*, *Belidor*, *Lahire*, *Valence*, *Morogues*, *les Bernouilli*, *Muschenbroek*, *Stahl*, *Baumé*, *Macquer*, *Robins*, *Euler*, *Lombard*, *Rumford*, *Antoni*, *Proust*, *Lamartellière*, *Gay-Lussac*, etc. Les limites extrêmes de ces évaluations sont celles de l'ingénieur *Robins* et du général d'artillerie *Lamartellière*. Le premier estime la tension des gaz de la poudre à 1000 atmosphères, et le second à 43600. L'*Aide-Mémoire d'artillerie* de 1836 laisse entièrement de côté cette épineuse question; plus hardi, celui du *génie* de 1837 enregistre le résultat suivant, sans en indiquer la source :

Le rapport du volume de la poudre à celui des gaz produits au moment de sa combustion est ∷ 1 ∶ 4156, sous la pression atmosphérique. Lorsque les gaz sont refroidis à la température de 0°, ce rapport n'est plus que ∷ 1 ∶ 450 sous la même pression. — La force développée par la combustion de la poudre est au moins 4000 atmosphères. Cependant je trouve dans l'ouvrage de *Gassendi* l'observation suivante : « Si dans une pièce de 24 dont l'âme a à peu près en nombre rond 3000 pouces cubes de capacité, on met 3 pouces cubes de poudre, un plateau de fer pesant 1 livre placé

exactement sur la bouche sera à peine déplacé » ; « donc, ajoute *Gassendi, Robins* aurait raison malgré beaucoup de savants. »

Effets utiles de la poudre. Un kilogramme de poudre de mine dont le prix d'achat est 2 fr. 10 suffit, — à Montmartre, pour arracher 16 mètres cubes de *pierres à plâtre ;* — dans le travail des petites galeries pour détacher $0^{mmm}.400$ de *roche quartzeuse;* — à Ronchamp, pour abattre 32 mètres cubes de *houille,* après havage préalable; — pour faire sauter environ 2 mètres cubes de *castine* ou de *pierre calcaire ;* — lorsqu'on travaille en galeries de mine de dimensions habituelles pour détacher savoir : $0^{mmm}.6$ dans un *granit* de résistance moyenne ; — $0^{mmm}.533$ dans un *grès houiller* très-dur rempli de fragments de quartz ; — $0^{mmm}.192$ dans un autre *grès houiller* extrêmement dur ; — $0^{mmm}.250$ dans le *grès rouge,* — $0^{mmm}.900$ dans un *schiste* entremêlé de grès ; — $1^{mmm}.650$ dans un *schiste talqueux* assez dur.

Quant à l'emploi de la poudre à la guerre, *ce tesmoignage de nostre imbécillité*, dit *Montaigne,* je n'y entends rien, Dieu merci, et je fais des vœux sincères pour que les événements me permettent de rester dans cet heureux état d'ignorance. « *Comme de vray, la* « *science de nous entredesfaire et entretuer, de ruyner et perdre nostre* « *propre espèce, il semble qu'elle n'a beaucoup de quoy se faire désirer* « *aux bestes qui ne l'ont pas.* » (Liv. II, chap. XII, *des Essais.*)

Invention. La poudre paraît avoir été connue des Chinois dès le commencement de notre ère; on en attribue la réinvention au moine anglais *Roger Bacon* vers 1314, voir son traité *de Nullitate magiæ,* — les Maures l'ont employée contre le roi Alphonse en 1343, et *Bertolo Schwartz,* cordelier, fit connaître aux Vénitiens la manière de l'employer à la guerre, en 1380. — Il paraît qu'elle n'a été introduite dans l'exploitation des mines que vers l'année 1613.

POULIES. 1. Lorsqu'on fait abstraction de toutes les résistances passives, la théorie des poulies est l'une des plus simples de la mécanique; et, par exemple (*fig.* 2, *pl.* CIII), les bras de levier de la puissance P et de la résistance Q étant tous deux égaux au rayon r de la poulie fixe, quel que soit l'angle $2i$ formé par les directions des forces, l'équation des moments fournit immédiatement la relation

$$Pr = Qr \quad \text{et} \quad P = Q. \ldots\ldots \quad (1)$$

La tension de la corde est donc la même en tous ses points, la résultante R des forces P et Q divise l'angle $2i$ en deux parties égales, passe par le centre de la poulie, et l'on a

$$R = 2P\cos.i. \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Le chemin S parcouru par la puissance P dans sa direction propre

étant évidemment égal d'ailleurs à celui S' parcouru par la résistance Q, on a, en multipliant $S=S'$ par l'équation (1), et appelant $T_m=PS$ le travail moteur et $T_u=QS'$ le travail utile,

$$PS=QS' \quad \text{ou} \quad T_m=T_u \ldots\ldots \quad (3)$$

de sorte que, abstraction faite des résistances nuisibles, la poulie fixe a pour seul effet de changer la direction du mouvement.

2. Mais l'influence du frottement sur l'axe, celle de la *roideur de la corde* ou de la résistance qu'elle oppose à son point d'enroulement (p. 421), sont telles qu'il est impossible de les négliger dans la pratique.

J'introduirai donc ces deux genres de résistance dans les formules; mais, sous peine de les compliquer excessivement, je me bornerai à l'étude des systèmes où *les cordons sont parallèles* ou peuvent être considérés comme tels, et les *poulies égales* entre elles, ce qui est, au reste, le cas le plus ordinaire dans toutes les applications.

3. Soient donc (*fig.* 3, *pl.* CIII) deux poulies fixes de rayon r sur lesquelles agissent la puissance P et la résistance Q, à l'aide de cordes dont les deux brins sont parallèles; W est le poids de la poulie, ρ le rayon de son axe, φ l'angle du frottement de celui-ci, la roideur de la corde est exprimée, comme on sait (p. 421), par

$$\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bQ)=\text{roideur} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

de sorte qu'elle a pour effet d'élever la résistance au point d'enroulement à la valeur

$$Q+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bQ)=\left[1+\frac{d^{\mu}b}{2r}\right]Q+\frac{d^{\mu}a}{2r} \ldots\ldots \quad (5)$$

Remarquant, en vue d'abréger, que les deux systèmes de la *figure* 3 sont, en fait, des *treuils* sur lesquels la puissance P et la résistance utile Q agissent verticalement à l'aide de cordes, il nous suffira de faire $R=r$ dans les formules de l'article *treuil*, pour obtenir la relation suivante entre les forces

$$P=Q\left[1+\frac{d^{\mu}b}{2r}\right]\left\{\frac{1+\frac{\rho}{r}\sin.\varphi}{1-\frac{\rho}{r}\sin.\varphi}\right\}+\frac{\frac{d^{\mu}a}{2}+\left(\frac{d^{\mu}a}{2r}\pm W\right)\rho\sin.\varphi}{r-\rho\sin.\varphi} \quad (6)$$

le signe supérieur correspondant au cas où les forces verticales P, Q, agissent de haut en bas, et le signe inférieur lorsqu'elles agissent verticalement de bas en haut.

Supposant le mouvement du système uniforme, appelant S et S'

les chemins simultanément décrits dans un temps quelconque par P et Q dans leurs directions propres, enfin faisant $PS = T_m =$ travail moteur et $QS' = T_u =$ travail utile, on aura entre ces travaux, d'après l'article *treuil*, le rapport

$$T^m = T_u\left[1 + \frac{d^{\mu}b}{2r}\right]\left\{\frac{1 + \frac{\rho}{r}\sin.\varphi}{1 - \frac{\rho}{r}\sin.\varphi}\right\} + S\left[\frac{\frac{d^{\mu}a}{2} + \left(\frac{d^{\mu}a}{2r} \pm W\right)\rho\sin.\varphi}{r - \rho\sin.\varphi}\right] \quad (7)$$

4. *Système d'une poulie fixe et d'une poulie mobile.* Pour appliquer les valeurs précédentes au système de la *fig.* 4, *pl.* CIII, on égalera à A le coefficient de Q dans l'équation (6), à B la valeur que prend le dernier terme de cette même équation, lorsque les forces P et Q agissent dans le même sens que le poids W de la poulie, et à B' la valeur de ce terme, lorsque P et Q agissent en sens inverse du poids W. Désignant par T et t les tensions respectives des cordes parallèles qui enveloppent la poulie mobile, on aura, en vertu de l'équation (6),

$$P = AT + B. \;.\;.\; (8) \qquad \text{et} \qquad T = At + B'. \;.\;.\; (9)$$

Or, les tensions $T + t$ étant égales au poids W de la poulie mobile M augmenté de la charge Q, on a encore

$$T + t = Q + W. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

Ajoutant AT des deux côtés de l'équation (9), puis multipliant par A, il vient

$$AT[1 + A] = A^2(T + t) + AB' = A^2[Q + W] + AB'$$

enfin, multipliant l'équation (8) par $(1 + A)$, on obtient la relation des forces

$$P = Q\left[\frac{A^2}{1 + A}\right] + \frac{A^2W + (1 + A)B + AB'}{1 + A}. \;.\;.\;.\;.\; (11)$$

Or, il est évident que, dans ce système, les chemins S, S', respectivement parcourus dans un même temps quelconque par les points d'application de la puissance P et de la résistance utile Q, ont entre eux le rapport $S = 2S'$. Quant au chemin s parcouru par le frottement autour des axes dans le même temps, il est $s = \frac{S\rho}{r}$, d'où

$$S = 2S' = \frac{r}{\rho}s. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (12)$$

Multipliant l'équation des efforts (11) par (12), faisant le produit $PS = T_m =$ travail moteur et celui $QS' = T_u =$ travail utile, on

obtient l'équation suivante des travaux, pour le cas où la puissance parcourt son chemin S d'un mouvement uniforme

$$T_m = T_u\left[\frac{2A^2}{1+A}\right] + S\left\{\frac{A^2W+(1+A)B+AB'}{1+A}\right\} \quad . . . (13)$$

5. Dans le système représenté (*fig.* 5, *pl.* CIII), on aurait de même

$$P = At + B. \quad . . . (14) \qquad T = AQ + B. \quad . . . (15)$$

$$\text{et} \quad P + t + W = T \quad . . . . (16)$$

Multipliant par A l'équation (16) et ajoutant ensuite l'équation (14), on a pour celle des efforts

$$P = Q\left[\frac{A^2}{1+A}\right] + B - \frac{AW}{1+A} \quad . . . . (17)$$

et pour celle des travaux, en raisonnant comme pour le cas ci-dessus,

$$T_m = T_u\left[\frac{2A^2}{1+A}\right] + S\left\{B - \frac{AW}{1+A}\right\} \quad . . . . . . (18)$$

A et B étant des quantités essentiellement positives, le dernier terme de (18) est toujours plus petit que celui de l'équation (13), et la disposition indiquée *figure* 5 est préférable dès lors à celle de la *figure* 4, circonstance qui n'est pas due seulement à ce que le poids W de la poulie mobile agit ici dans le même sens que la puissance.

6. L'assemblage de la *figure* 6 peut être considéré comme un multiple de celui de la *figure* 4; ainsi on a d'abord

$$T_1 = At_1 + B'. \quad . . (19) \qquad \text{et} \quad T_2 + W = T_1 + t_1. \quad . . (20)$$

ce qui donne par élimination

$$T_1 = \left[\frac{A}{1+A}\right]T_2 + \frac{AW+B'}{1+A} \quad . . . . (21)$$

Faisant pour abréger

$$\frac{A}{1+A} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{AW+B'}{1+A} = \beta$$

l'équation (21) prend la forme

$$T_1 = \alpha T_2 + \beta$$

et on obtient de même les suivantes, savoir :

$$\begin{aligned} T_2 &= \alpha T_3 + \beta \\ T_3 &= \alpha T_4 + \beta \\ &. . . . . \\ T_{n-1} &= \alpha T_n + \beta \\ T_n &= \alpha Q + \beta \end{aligned} \qquad (22)$$

Multipliant la première de celles-ci par α, la seconde par α^2, la troisième par α^3, et ainsi de suite, et faisant la somme totale, il vient (*progressions*) :

$$T_1 = \alpha^n Q + \beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta \ldots + \alpha^{n-1}\beta = \alpha^n Q + \beta \left[\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right] \quad (23)$$

ou, en remettant pour α et β leurs valeurs,

$$T_1 = \left[\frac{A}{1+A}\right]^n Q + (AW + B')\left[1 - \left(\frac{A}{1+A}\right)^n\right] \ldots (24)$$

et comme on a d'ailleurs

$$P = AT_1 + B$$

il vient pour l'équation des efforts

$$P = A\left[\frac{A}{1+A}\right]^n Q + A(AW + B')\left[1 - \left(\frac{A}{1+A}\right)^n\right] + B \quad (25)$$

Mais si l'on désigne par S et S′ les chemins simultanément parcourus par les points d'application de la puissance P et de la résistance utile Q, et par S_2, S_3, $S_4 \ldots S_n$ ceux que décrivent dans le même temps les points d'application des tensions T_2, T_3, $T_4 \ldots T_n$, on a évidemment

$$S = 2S_2;\ S_2 = 2S_3;\ S_3 = 2S_4 \ldots S_{n-1} = 2S_n;\ S_n = 2S'$$

d'où $\quad S = (2 \times 2 \times 2 \times 2. \ldots) S' = 2^n S'. \ldots (26)$

et enfin pour l'équation du travail, tant que le mouvement est uniforme, $PS = T_m$ désignant toujours le travail moteur et $QS' = T_u$ le travail utile ou celui qui correspond à l'élévation du fardeau Q

$$T_m = A\left[\frac{2A}{1+A}\right]^n T_u + S\left\{A(AW + B')\left[1 - \left(\frac{A}{1+A}\right)^n\right] + B\right\} \quad (27)$$

équation déjà fort complexe, et dans laquelle il faudrait introduire les valeurs de A, B et B′, savoir :

$$A = \left(1 + \frac{d^u b}{2r}\right)\left\{\frac{1 + \frac{\rho}{r}\sin.\varphi}{1 - \frac{\rho}{r}\sin.\varphi}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$B = \frac{\frac{d^u a}{2} + \left(\frac{d^u a}{2r} + W\right)\rho \sin.\varphi}{r - \rho \sin.\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$B' = \frac{\frac{d^u a}{2} + \left(\frac{d^u a}{2r} - W\right)\rho \sin.\varphi}{r - \rho \sin.\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

7. La *figure* 7, *planche* CIII, indique, en principe, la forme la plus usuelle des palans ou moufles, plus exactement reproduite d'ailleurs *fig*. 8 et 9. Considérant les cordes comme parallèles, ce qui permet de supposer que la somme de leurs tensions est égale à la charge Q; négligeant l'influence du poids de la moufle mobile sur le frottement; supposant n cordons aboutissant de la moufle fixe à la moufle mobile, on a facilement, après ce qu'on a déjà vu et en conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} P &= AT_1 + B \\ T_1 &= AT_2 + B \\ T_2 &= AT_3 + B \\ &\ldots\ldots \\ T_{n-1} &= AT_n + B \end{aligned} \qquad (31)$$

Multipliant respectivement ces équations (31), à partir de la seconde, par A, A^2, A^3... A^{n-1}, faisant la somme de ces produits, et sommant la progression, on obtient

$$P = A^n T_n + B\left[\frac{A^n - 1}{A - 1}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

équation analogue à celle (23). Ajoutant les équations (31), observant que

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 \ldots + T_n \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

d'où $P + Q - T_n = P + T_1 + T_2 + T_3 \ldots + T_{n-1} = AQ + nB$ (34)

Eliminant T_n entre (34) et (32), on obtient enfin l'équation des efforts

$$P = \frac{A^n (A - 1)}{A^n - 1} Q + \frac{A^n B_n}{A^n - 1} - \frac{B}{A - 1} \ldots\ldots (35)$$

8. Si l'on supposait le frottement nul et nulle aussi la roideur de la corde, la valeur (28) de A deviendrait $= 1$, et B serait zéro. Divisant le numérateur et le dénominateur du coefficient de Q dans l'équation (35) par $(A - 1)$, ce coefficient deviendrait lui-même

$$\frac{A^n}{A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3} \ldots\ldots + 1} = \frac{1}{n}$$

lorsque $A = 1$, et l'on retomberait sur l'équation très-incomplète $\frac{P}{Q} = \frac{1}{n}$ démontrée dans les statiques, et d'où l'on conclut que, *dans les moufles, la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à la moufle mobile.*

9. Pour passer de l'équation (35) des efforts à celle des travaux,

on peut remarquer que, lorsque la charge Q est soulevée d'une hauteur S', chacun des n cordons aboutissant à la moufle mobile est nécessairement raccourci de la même quantité S', ce qui fait un raccourcissement total $= nS'$ entre les moufles; mais cette quantité nS' est nécessairement aussi la longueur S de corde qui a passé pendant le mouvement sur la première poulie fixe, ou encore le chemin parcouru par le point d'application de P; donc enfin

$$S = nS' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Multipliant (35) par (36), faisant $PS = T_m =$ travail moteur, $QS' = T_u$ travail utile, on a, abstraction faite du travail presque toujours négligeable dû au soulèvement des cordes,

$$T_m = \frac{nA^n(A-1)}{A^n-1} T_u + S\left\{\frac{nA^nB}{A^n-1} - \frac{B}{A-1}\right\} \ldots \quad (37)$$

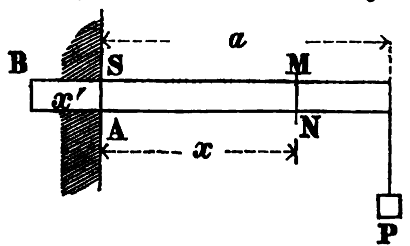
Je renvoie, pour les autres systèmes aux *Mechanical Principles*, de M. *Moseley*, qui m'ont servi de guide dans ce résumé.

10. *Résultats pratiques.* On peut admettre comme une moyenne que le frottement et la roideur des cordes dans le système précédent obligent à élever T_m à la valeur $T_m = 1.666\ T_u$; — et dans un travail journalier, on ne doit pas compter qu'un manœuvre exerce sur le chef des garants un effort P supérieur à 20^k, lorsqu'il tire de bas en haut avec ses mains. — La tension d'aucun brin ne doit atteindre 3 000 000 d^2 kil., d étant le diamètre de la corde en mètres. — Lors de l'érection de l'obélisque de Luxor, par M. *Lebas*, la tension des cordes n'a jamais atteint la moitié de celle qui aurait pu les rompre. — On peut évaluer au quart de la résistance utile l'effort P à exercer sur le chef d'un palan à six brins, effort qui ne serait que le sixième de cette résistance utile, si l'on faisait abstraction du frottement et de la roideur des cordes. — La tension P du *chef* est, dans ces circonstances, plus que double de celle T_6 du *dormant*. — Le diamètre des poulies est à leur épaisseur le plus habituellement :: 5 : 1 ; — le diamètre de leur axe ou boulon est le douzième de celui de la poulie; — la longueur de ce boulon est les sept sixièmes de l'épaisseur de la poulie. — Dans la marine, on donne au boulon des poulies un diamètre égal aux deux tiers de celui de la corde ou du câble.

POUSSÉES ET DISTRIBUTION DES CHARGES DANS LES CHARPENTES. *Question :* Etant données la forme et la position d'un système de charpente, ainsi que l'intensité et la direction des efforts auxquels il est directement soumis, trouver l'intensité et la direction des forces qui tendent à déplacer ou à rompre certaines parties déterminées de ce système. Tel est l'énoncé commun des divers problèmes réunis dans cet article. On s'est attaché aux cas

les plus habituels de la pratique, et l'on a surtout évité de confondre en une seule et même question la recherche de la distribution des efforts avec celle des dimensions que les pièces de charpente doivent recevoir pour résister à ces efforts d'une manière permanente, et qui formait autrefois l'objet spécial d'une théorie dont l'expérience a successivement renversé toutes les hypothèses (Voyez l'article *Résistance des matériaux*).

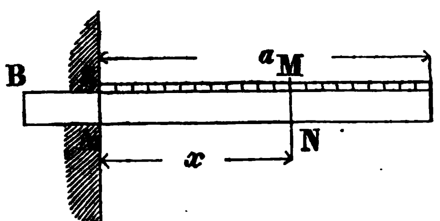
1. *Pièce assemblée horizontalement par une extrémité et chargée à l'autre extrémité d'un poids* P.



a étant la longueur de la pièce, x la distance d'une section quelconque MN à partir de l'assemblage, $P(a-x)$ est le moment de rupture par rapport à la section MN. Ce moment est le plus grand possible et $=Pa$ par rapport à la face d'assemblage AS. Regardant comme nulle la flexion de la pièce sous la faible charge P, et le point B de l'assemblage étant supposé capable de résister à l'écrasement, l'arête A subira un effort

$$P\left(1+\frac{a}{x'}\right).$$

2. *Même pièce uniformément chargée de* p *kilog. par mètre sur sa longueur.*



Une section verticale quelconque MN d'une longueur très-petite dx se trouve directement chargée d'un poids $p\,dx$. Le moment de cette charge par rapport à la face d'assemblage AS est donc $px\,dx$. La somme de tous les moments semblables prise depuis $x=o$ jusqu'à $x=a$ devient

$$\text{moment total} = \frac{pa^2}{2} = \frac{pa}{2}\cdot a$$

c'est le moment de rupture par rapport à la face d'assemblage que fournirait la moitié $\frac{pa}{2}$ de la charge totale agissant à l'extrémité de la pièce.

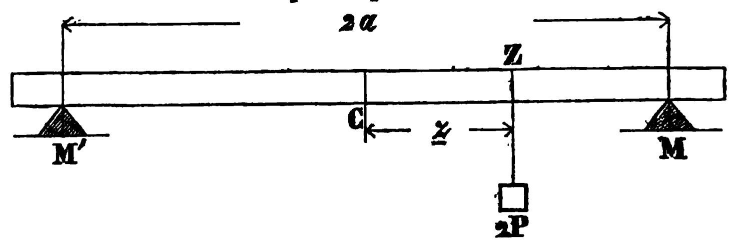
3. *Si la pièce était uniformément chargée de* p *kil. par mètre cou-*

rant, plus d'un poids P *à son extrémité*, le moment de rupture deviendrait évidemment

$$\left(P+\frac{pa}{2}\right)a$$

on néglige encore ici comme dans tout ce qui va suivre la flexion, et par conséquent la courbure de la pièce, parce que les pièces employées dans les constructions doivent recevoir toujours des dimensions assez grandes pour n'être pas sensiblement déformées.

4. *Pièce reposant horizontalement sur deux appuis* M′, M, *distants de* 2*a*, *et chargée d'un poids* 2 P *agissant en un point* Z *de sa longueur situé à une distance quelconque z de son milieu* C.



La pièce étant supposée assez forte pour n'être pas fléchie, les réactions m', m des appuis M′, M seront verticales, et l'égalité des moments donnera pour les charges sur les appuis

$$m=\frac{2P(a+z)}{2a} \qquad \text{et} \qquad m'=\frac{P(a-z)}{a}$$

les moments de ces efforts par rapport au point z de rupture sont l'un et l'autre

$$\text{moment de rupture}=\frac{P}{a}(a^2-z^2)$$

5. *Si le poids* 2P *agit au milieu de la pièce*, z *devient nul*, on a

$$m=m'=P \quad \text{et le moment de rupture} = Pa;$$

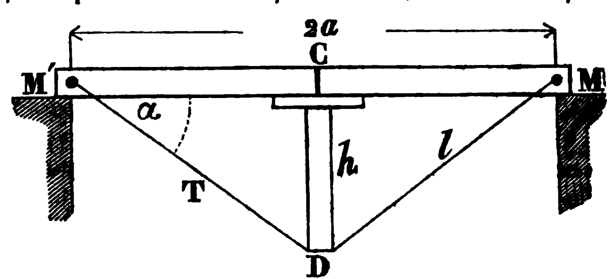
il est toujours plus grand que dans le cas précédent.

6. *La même pièce étant uniformément chargée de* p *kil. par mètre courant*, chaque appui porte évidemment la moitié pa de la charge totale $2pa$, mais le moment pa^2 de la réaction de l'appui par rapport au milieu C de la pièce est diminué (2) du moment $\frac{pa^2}{2}$ qui tend à faire tourner en sens contraire; ce qui réduit le moment de rupture à $\frac{pa^2}{2}$.

7. *La pièce étant uniformément chargée de* p *kil. par mètre de*

longueur et portant en outre un poids 2 P *en son milieu*, la charge sur chaque appui devient $(P + pa)$ et le moment de rupture par rapport au milieu de la pièce $= \left(P + \frac{pa}{2}\right) a$.

8. *Pièce renforcée par un chevalet inférieur et deux tirants en fer.* On oppose quelquefois à la flexion de la pièce un poinçon ou chevalet CD maintenu par deux tirants en fer. Il faut alors



faire en sorte que la résultante R des deux tensions égales T, T des tirants DM', DM égale l'effort des charges en C. Or le poids 2 P étant supposé agir au milieu même de la portée, le point C est soumis en outre aux composantes verticales $\frac{pa}{2} + \frac{pa}{2}$ d'une charge qu'on suppose uniformément répartie.

On a d'ailleurs $R = 2\,T \sin.\, \alpha$

donc

$$2\,T \sin.\, \alpha = 2\,P + pa \quad \text{ou} \quad T = \frac{P + \frac{1}{2} pa}{\sin.\, \alpha} = \left(P + \frac{pa}{2}\right) \frac{l}{h}$$

h étant la hauteur du poinçon et l la longueur d'un tirant. l étant toujours plus grand que h, la tension de chaque tirant est toujours plus grande que la moitié des charges totales,

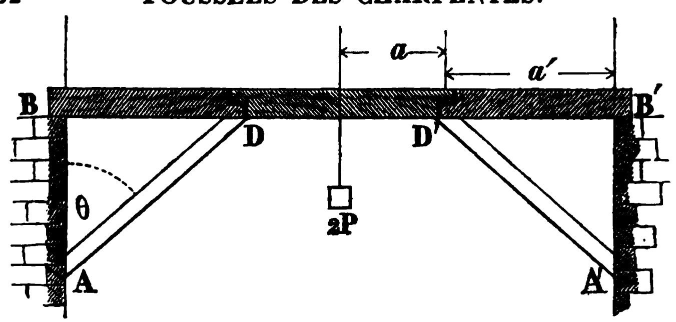
L'emploi de contrefiches A D A' D' doit être préféré, lorsque la portée est un peu grande, la répartition des pressions s'établit alors comme suit (figure suivante).

9. *Pièce horizontale reposant sur deux appuis, chargée d'un poids* 2 P *en son milieu, plus d'une charge uniforme de* p *kil. par mètre, et soutenue par deux contrefiches.* On exagèrera la charge sur la tête des contrefiches en supposant une disjonction aux points D et D'. Dans cette hypothèse, on obtient facilement, savoir :

$$\text{charge verticale en D} = P + p\left(a + \frac{a'}{2}\right) = V$$

l'effort Z dans le sens DA de la contrefiche a V pour composante verticale, d'où

$$V = Z \cos.\, \theta \quad \text{et} \quad Z = \frac{P + p\,(a + \frac{1}{2} a')}{\cos.\, \theta} = Z'$$



la composante horizontale H de V dirigée de D vers D' est donnée elle-même par la relation

$$H = V \text{ tang. } \theta = [P + p(a + \tfrac{1}{2} a')] \text{ tang. } \theta = H'$$

H et son égale H' dirigée de D' vers D compriment la pièce intermédiaire DD'.

Ces valeurs de $H = H'$ expriment aussi les *poussées* horizontales exercées contre les culées aux extrémités A A' des contrefiches, les charges verticales en ces points sont évidemment égales à V, V'.

10. *Remarque.* Si la charge 2P que nous avons supposée appliquée au milieu de BB' devenait une charge mobile, il se produirait au moment où elle passe en D une charge verticale,

$$2P + p(a + \tfrac{1}{2} a') \quad \text{d'où naîtrait un effort} \quad \frac{2P + p(a + \frac{1}{2} a')}{\cos. \theta}$$

dans le sens DA de la contrefiche, et une pression horizontale dans le sens D D' égale à

$$[2P + p(a + \tfrac{1}{2} a')] \text{ tang. } \theta = p(a + \tfrac{1}{2} a') \text{ tang. } \theta + 2P \text{ tang. } \theta$$

or à ce même instant, le point homologue D' n'est poussé dans le sens D'D que par l'effort horizontal $p(a + \frac{1}{2} a')$ tang. θ : donc la pièce D'B' tendrait à être déplacée dans le sens D'B' par un effort $= 2P$ tang. θ, et se déplacerait en effet si le point B' n'était pas maintenu. Des *moises* (pag. 67) pourraient s'opposer à la fois à ce déplacement et à la flexion des contrefiches.

11. *Si l'on remplaçait les culées du système précédent par deux poteaux verticaux,* les charges verticales

$$V = V' = P + p\left(a + \frac{a'}{2}\right)$$

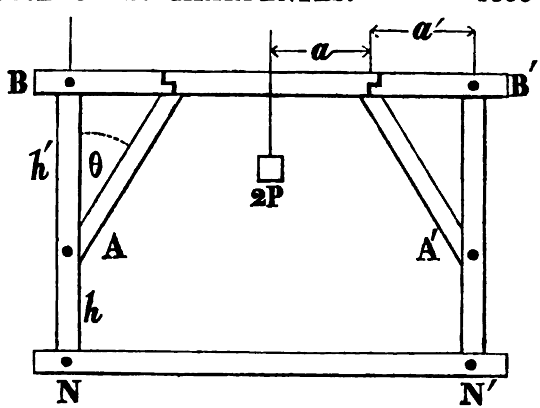
appliquées aux points D, D' donneraient dans le sens des contrefiches les mêmes efforts $z\, z'$ que ci-dessus ou

$$z = z' = \frac{V}{\cos. \theta}$$

lesquels décomposés en A et A′ fourniraient les composantes horizontales

$$H = H' = V \text{ tang.} \theta$$

qui tendraient à écarter les points A A′. Si les pieds N N′ des poteaux posaient librement sur le sol, ils glisseraient donc si le moment



$$[P + p(a + a')]\, f(h + h')$$

du frottement par rapport à l'assemblage B, dont on néglige la résistance, était plus petit que H h', f étant le coefficient du frottement et h', h les distances B A, A N.

12. *Si l'on suppose au contraire que les pieds* N N′ *des poteaux sont reliés par une semelle* N N′ (même figure), chacune des poussées H se décomposera en deux autres appliquées horizontalement aux points N et B, et telles que si on les désigne respectivement par n et b, on aura

$$n = \left(\frac{h'}{h + h'}\right) H = \left(\frac{h'}{h + h'}\right) V \text{ tang. } \theta$$

$$b = \left(\frac{h}{h' + h}\right) H = \left(\frac{h}{h' + h}\right) V \text{ tang. } \theta$$

n est la *tension* de la semelle N N′, et b un effort qui tirerait dans le sens D B et tendrait à augmenter la disjonction en D, s'il n'y était pourvu.

Si l'immobilité du point B a été assurée, les deux efforts ci-dessus ont des moments égaux par rapport au point A ; ce moment

$$nh = bh' = \frac{hh'}{h + h'} V \text{ tang. } \theta$$

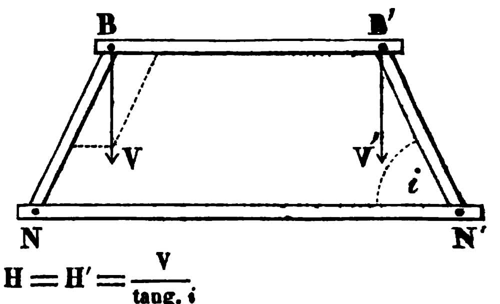
est celui qui tend à fléchir le poteau ou à le rompre en A.

13. *Système trapézoïdal* (fig. suiv.). Soit, pour abréger, V V′ les composantes verticales égales appliquées en B et B′ des charges symétriquement distribuées sur la pièce horizontale B B′ ; on ob-

tiendra facilement pour les efforts $z = z'$ dans les sens B N, B′ N′

$$z = z' = \frac{V}{\sin. i}$$

et pour la tension H = H′ de la semelle N N′



$$H = H' = \frac{V}{\text{tang.}\ i}$$

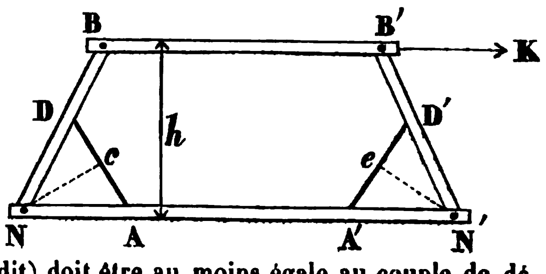
H et H′ sont donc aussi les poussées égales et contraires suivant BB′ et B′B.

Négligeant, comme il convient toujours de le faire, la résistance des assemblages, on voit que si quelque cause accidentelle rendait $H > H'$, le système tournerait autour de ses quatre angles N, N′, B, B′.

14. *On pourrait opposer à la rotation du système* des liens comprimés A D ou étendus A′ D′ qui roidiraient les angles. Soit alors K l'excès de H sur H′, et h la hauteur du trapèze à un instant donné, Kh sera le moment qui tend à faire tourner le point B autour de N, si c est l'effort de compression du lien A D que nous supposons d'abord agir seul et N C la perpendiculaire abaissée de N sur sa direction, la stabilité exigera que l'on ait $c \times NC > Kh$ ou tout au moins

$$c \times NC = Kh \qquad c = \frac{Kh}{NC}$$

et l'on voit facilement, quel que soit le nombre des liens, que la somme des moments de leur résistance (moment pris pour chacun par rapport au sommet de l'angle qu'il roidit) doit être au moins égale au couple de déformation Kh.

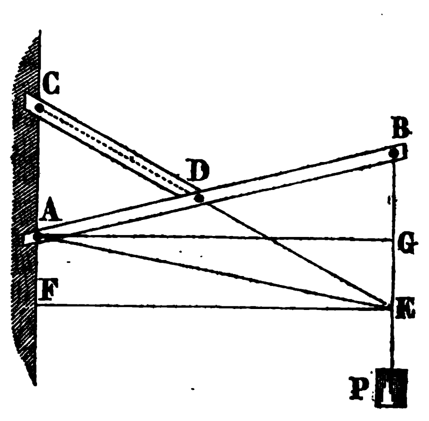


15. *Systèmes triangulaires ; éléments des fermes.* Les systèmes triangulaires ont sur tous les autres, et sur le système précédent en particulier, un avantage qui les recommande exclusivement et qui consiste en ce que, dans ces figures, l'invariabilité de la longueur des côtés assure complétement l'invariabilité des angles. Aussi entrent-ils avec raison dans la plupart des constructions en char-

pente, et surtout dans les formes (pag. 729). Nous étudierons ici les principaux d'entre eux, et nous ferons quelquefois usage du théorème suivant qui permet d'introduire facilement dans les équations les lignes de l'épure elle-même, et dont *Whewell* a le premier, je crois, songé à tirer parti dans ce genre de recherches.

Théorème. Lorsque trois forces non parallèles maintiennent un système rigide en équilibre, la direction de l'une d'entre elles passe nécessairement par le point de concours des deux autres; elle est égale et opposée à la résultante de celles-ci.

16. Soit donc un système triangulaire CAD, chargé en B d'un poids P, et dont les points fixes C, A sont essentiellement des chevilles situées sur une même verticale. Prolongez la droite CD jusqu'à ce qu'elle rencontre la verticale de la charge P. La réaction des chevilles C, D, agissant suivant CE, il résulte du principe précédent que la réaction de la cheville A s'exerce nécessairement dans la direction AE.



Désignant par C, A, D, l'intensité des efforts aux chevilles marquées par les mêmes lettres C, A, D; prenant la parallèle CA à la direction de P pour représenter cette force, le triangle CAE aura ses côtés proportionnels aux forces C, A, P du système en équilibre, et parallèles à leurs directions; d'où

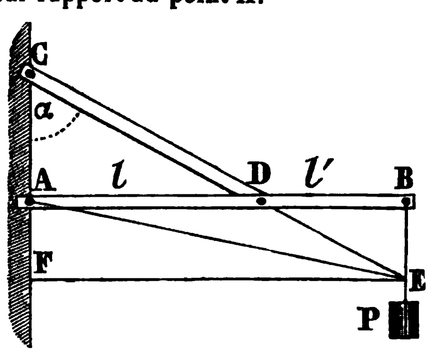
$$\frac{C}{P}=\frac{CE}{CA} \qquad \frac{A}{P}=\frac{AE}{CA}$$

$$C=P.\frac{CE}{CA}=D \qquad A=P.\frac{AE}{CA}$$

Tirons les horizontales AG EF par les points A et E, et nous verrons facilement d'une part que la force C peut maintenant se décomposer en une force verticale CF, plus une force horizontale FE; et de l'autre que la force A peut se décomposer en une force verticale FA et une force horizontale EF. Ainsi, les forces verticales qui agissent en C et A sont entre elles comme les lignes CF et AF, les forces horizontales comme FE et EF; et si le point F tombe en dehors de la distance CA, les efforts exercés en C et A se réduisent verticalement à CF — FA = CA = P et

horizontalement à un couple $CA \times EF = P \times AG$, c'est-à-dire au moment de la charge P par rapport au point A.

17. *Si* AB *est horizontal* il vient en faisant $l = AD$, $l' = DB$ et $\alpha = ACD$

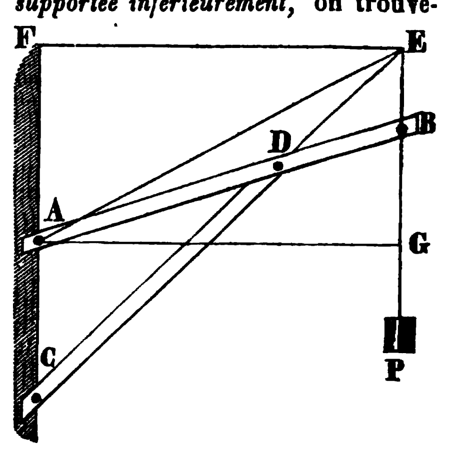


$$C = P \times \frac{CE}{CA} = P \times \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{CA}$$

$$= P \frac{AB \times CD}{AD \times CA} = \frac{P(l+l')}{l \cos.\alpha}$$

$$A = P . \frac{AE}{CA}$$

18. *La pièce* AB *étant supportée inférieurement*, on trouverait, en partant du même principe, que les trois forces qui tiennent la charge en équilibre à l'aide des chevilles A, C, D, sont entre elles comme les lignes CE, EA, AC. Donc, si l'on prend la parallèle CA à la direction de P pour représenter cette force, CE et EA représenteront les efforts C, A exercés *par* les points ou chevilles C, A et EC, AE les efforts exercés *sur* ces chevilles. On aura donc



$$A = P \times \frac{AE}{AC} \quad \text{et} \quad C = P \times \frac{EC}{AC}$$

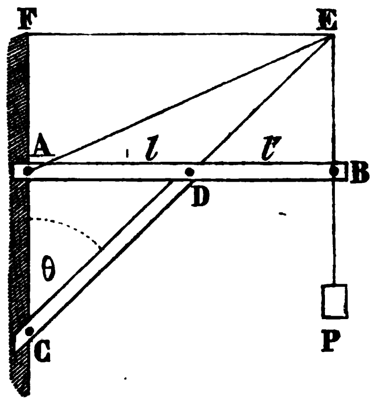
ces forces équivalent à deux forces verticales agissant, suivant AC, en sens contraire et dont la résultante $CA = P$, plus à un couple $P \times AG$ qui est le moment de la charge P par rapport à A ; et l'effort qui tend à refouler l'aisselier CD dans la direction de sa longueur égale l'effort C ou D.

19. AB *étant supposée horizontale*, il vient, dans la direction de la contrefiche CD

$$C = P \times \frac{CE}{AC} = P \times \frac{CE \times CD}{CD \times AC} = P \times \frac{AB \times CD}{AD \times AC} = \frac{P(l+l')}{l \cos.\theta}$$

$$A = P . \frac{AE}{AC}$$

Cet effort A donnerait une composante verticale A_v qu'on trouverait plus facilement en prenant les moments par rapport à la cheville D, d'où



$$A_v = \frac{P l'}{l} = P \times \frac{DB}{AD}$$

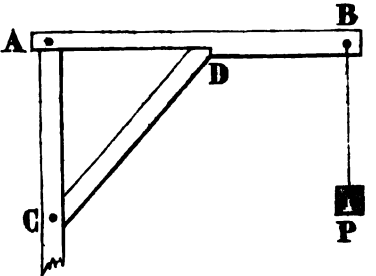
La cheville D est d'ailleurs chargée de cet effort vertical A_v, plus du poids P, d'où effort vertical sur D

$$= D_v = A_v + P = \frac{P(l'+l)}{l} = P \times \frac{AB}{AD}$$

Ce dernier effort D_v, décomposé dans la direction de la contrefiche, donnerait la valeur de C déjà connue, et de plus dans la direction horizontale DB une autre composante A_h ou D_h

$$A_h = D_h = C \sin.\theta = \frac{P(l+l')}{l} \text{tang.}\theta = P \times \frac{AB}{AC}$$

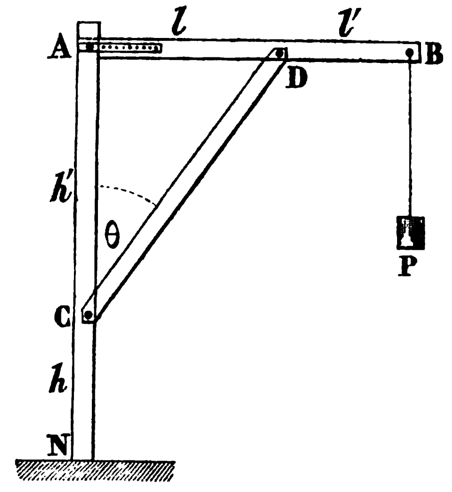
Cet effort horizontal D_h tend la partie AD qui est d'ailleurs sollicitée à rompre en D par le moment Pl'. D_h serait donc aussi l'effort exercé contre l'épaulement D dans le cas où les pièces AB DC seraient réunies comme l'indique la figure ci-contre



20. *Observation.* Il ne faut pas confondre les efforts exercés sur les chevilles avec ceux qui auraient lieu sur les *abouts* des pièces, si elles étaient assemblées à tenon et mortaise, par exemple. Les réactions de ces abouts, en effet, sont nécessairement normales à leurs faces d'assemblages (pag. 60), et l'on ne peut plus dire alors (figure suivante) que la réaction de la face d'assemblage en C, par exemple, agit suivant CD, puisqu'elle est horizontale. Toutefois, on passe facilement des efforts calculés dans l'hypothèse de la réunion des pièces à l'aide de chevilles seules aux efforts subis par les faces d'assemblage, ainsi que nous allons l'indiquer.

21. *Les pièces* AB, AC, CD, *étant supposées assemblées à tenon et à mortaise,* et le poteau vertical étant supposé, lui, complète-

ment inébranlable à son pied N, on a comme ci-dessus, en désignant par h, h' les hauteurs partielles NC, CA et remarquant que $l = h'$ tang. θ, savoir :



$$A_v = \frac{Pl'}{l};$$

$$D_v = A_v + P = \frac{P(l'+l)}{l};$$

$$D_h = A_h = \frac{P(l'+l)}{h'}$$

$$= P \times \frac{AB}{AC}$$

A_v tend à rompre le tenon A et D_h à le déboiter; s'il résiste à ce déboitement, D_h devient l'effort qui tend à raser horizontalement le tenon D. S'il résiste à cet *arasement*, D_h se transmet à l'assemblage C et appuie horizontalement la face verticale de cet assemblage contre le poteau. D_v presse verticalement l'about D, et tend à raser le tenon C. S'il résiste, cette pression verticale se transmet au poteau qui se trouve ainsi tendu entre C et A, par l'effort A_v dirigé de bas en haut, comprimé de C en N par $D_v - A_v = P$. Enfin l'effort qui tend à refouler DC suivant son axe est toujours

$$C = \frac{P(l+l')}{l \cos. \theta}$$

et le poteau est sollicité à rompre par une force $= D_h = \frac{P(l'+l)}{h'}$

dont le moment est $\frac{P(l'+l)h'}{h'} = P(l'+l)$

22. J'examinerai encore, avec *Navier*, le cas où, au lieu d'être encastrée en N à son extrémité inférieure, le poteau vertical NA serait consolidé par une pièce inclinée NF.

Tout ce qu'on a dit ci-dessus s'appliquerait à la partie du système qui est supérieure au point N. Quant à la partie NMF inférieure à ce point, supposons d'abord F situé au delà de la verticale du poids P, et faisons $MN = a$ et l'angle $MNF = \alpha$; le poids P tend à faire tourner le système autour de M avec un moment $P(l'+l)$. Pour que ce mouvement n'ait pas lieu, il faut que la

pièce FN oppose dans le sens FN une résistance N telle qu'on ait

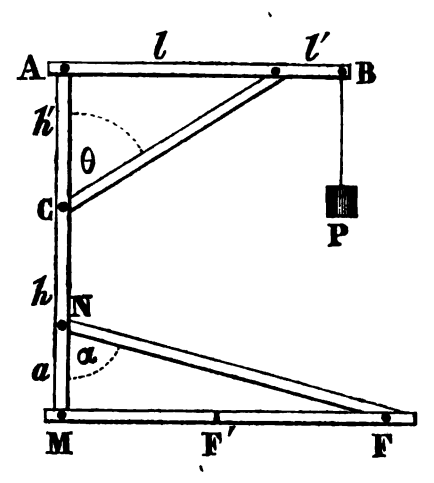
$$N = \frac{P(l'+l)}{a \sin. \alpha}$$

laquelle se décompose au point N en une force horizontale

$$N_h = \frac{P(l'+l)}{a}$$

et en une force verticale N_v dirigée de bas en haut

$$N_v = \frac{P(l'+l)}{a \operatorname{tang.} \alpha}$$



qui tend à raser le tenon N. La partie MN n'est donc comprimée dans le sens de sa longueur que par la différence des efforts

$$P - \frac{P(l'+l)}{a \operatorname{tang.} \alpha} = P\left(1 - \frac{l+l'}{a \operatorname{tang.} \alpha}\right)$$

mais comme l'effort horizontal N_h exercé au point N par la pièce FN doit être détruit par un effort égal exercé en sens contraire au point d'appui M, l'effort qui tendrait à raser horizontalement le tenon F ou celui M, ou à étendre la semelle MF, est toujours

$$N_h = \frac{P(l+l')}{a}$$

Si le point F était placé en F′ en dedans de la verticale du poids P, l'appareil tendrait à tourner sur ce point F′, l'effort suivant N′F′ aurait la même expression générale que pour NF, savoir :

$$N' = \frac{P(l'+l)}{a \sin. \alpha'}$$

mais la partie MN′ serait tendue, suivant sa longueur, par

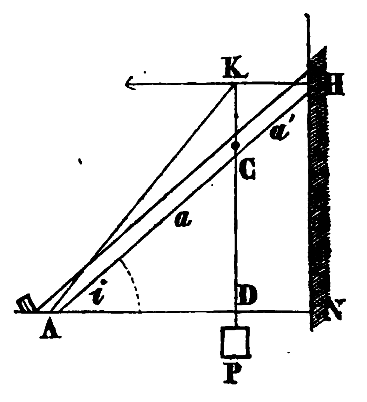
$$P\left(\frac{l+l'}{a \operatorname{tang.} \alpha'} - 1\right)$$

et il serait nécessaire que cette partie fût retenue en M pour n'être pas déboitée.

23. *Pièce inclinée portant une charge* P, dont la verticale passe par un point quelconque C de sa longueur. HN étant supposé vertical, réagit dès lors horizontalement suivant HK, et K étant

le point de concours des directions de la charge P et de la réaction de H, la direction de l'effort en A passera nécessairement par ce point K.

Prenant la verticale $KD = HN$ pour représenter la charge P, et désignant par H et A les efforts en ces mêmes points, on a



$$H = P \times \frac{DA}{KD} = \frac{P.\,a\cos.\,i}{(a+a')\sin.\,i}$$

$$= \frac{P\,a}{(a+a')\,\text{tang.}\,i}$$

c'est la pression qui se transmet horizontalement en A ; ce serait encore la tension de la semelle AN, s'il existait une telle pièce. Si la charge P passe par le milieu de l'étrésillon AH, $a = a'$ donne

$$H = \frac{P}{2\,\text{tang.}\,i}$$

Dans l'un et l'autre cas, le point A subit un effort vertical $= P$.

24. *Ferme sans tirant.* Appelons :

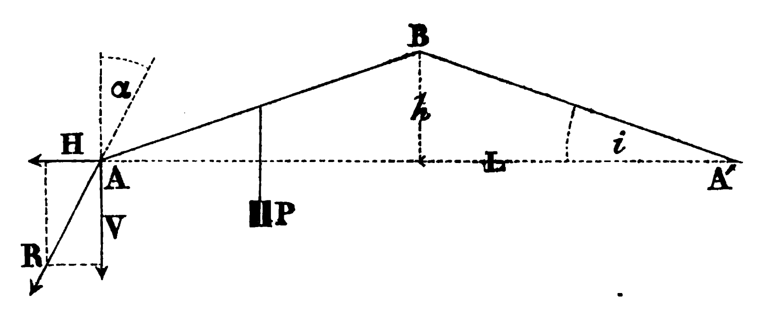
p le poids moyen du mètre de toiture, y compris la couverture (p. 464), les pannes, les chevrons, les arbalétriers (p. 728);
L la demi-portée de la ferme;
i l'inclinaison des arbalétriers sur l'horizon;
d la distance d'une ferme à la suivante;
R la résultante des efforts qui agissent au pied A de l'arbalétrier;
α l'inclinaison de cette résultante sur la verticale;
a la longueur de l'arbalétrier $= \frac{L}{\cos.\,i}$;
h la montée de la ferme $= L\,\text{tang.}\,i$;

$\frac{p\,d\,L}{\cos.\,i}$ sera la charge portée par chaque arbalétrier; faisons pour abréger

$$\frac{p\,d\,L}{\cos.\,i} = P$$

et décomposons cet effort vertical P appliqué au milieu de chacun des arbalétriers en composantes parallèles appliquées à leurs extrémités A, B, A'. Nous aurons ainsi trois forces verticales, savoir :

$$\frac{1}{2}P \text{ en } A;\quad \frac{1}{2}P \text{ en } A' \quad\text{et}\quad 2\left(\frac{P}{2}\right) = P \text{ en } B$$



Décomposant de nouveau cette dernière force P en deux autres z, z' dans le sens des arbalétriers, on aura

$$z = z' = \frac{P}{2 \sin. i}$$

pour la moitié des efforts exercés aux points A, A' dans la direction des arbalétriers.

Transportant z en A et l'y décomposant horizontalement et verticalement, on a pour la composante horizontale H

$$H = H' = z \cos. i = \frac{P}{2 \operatorname{tang.} i} = \frac{PL}{2h}$$

et pour la composante verticale

$$z \sin. i = \frac{P}{2}$$

Ajoutant la composante verticale $\frac{1}{2}$ P qui agit déjà en A, on a pour l'effort vertical V total qui agit au pied de l'arbalétrier

$$V = P.$$

Ainsi la résultante R de tous les efforts qui poussent le mur sur lequel pose la sablière a pour intensité

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = P \sqrt{1 + \frac{1}{4 \operatorname{tang.}^2 i}} = H \sqrt{1 + 4 \operatorname{tang.}^2 i}$$

Quant à sa direction, elle est déterminée par

$$H = V \operatorname{tang.} \alpha, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang.} \alpha = \frac{1}{2 \operatorname{tang.} i} = \frac{L}{2h}$$

Ainsi la tangente de l'inclinaison İ de la résultante par rapport *à l'horizon* est double de la tangente de l'inclinaison i du toit

$$\operatorname{tang.} \dot{I} = 2 \operatorname{tang.} i = \frac{2h}{L}$$

La demi-portée L restant la même, la valeur de i qui rendra *minimum* (pag. 1133) l'effort R sur le mur est donnée par

$$\text{tang.}\, i = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad h = 0.707\,L \quad \text{ou} \quad i = 35^\circ\,16'$$

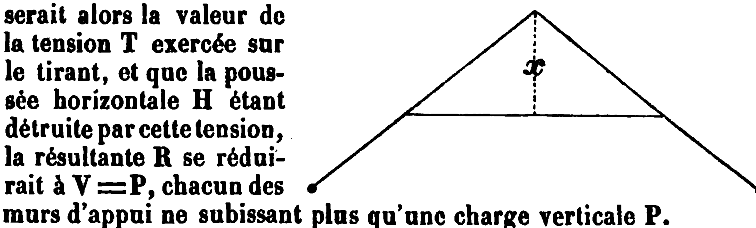
la poussée *horizontale* H devient dans ce dernier cas

$$H = P\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707\,P$$

On pourra suivre les effets de la résultante R sur les murs qui portent la ferme, pag. 1188.

25. *Ferme avec tirant.* On opérerait pour ce cas comme pour le cas précédent, et l'on parviendrait aux mêmes résultats, à cela près que

$$H = \frac{P}{2\,\text{tang.}\, i} = \frac{PL}{2h} = -T$$



serait alors la valeur de la tension T exercée sur le tirant, et que la poussée horizontale H étant détruite par cette tension, la résultante R se réduirait à $V = P$, chacun des murs d'appui ne subissant plus qu'une charge verticale P.

Si l'entrait était situé à une distance verticale x en contre-bas du faîte, on aurait pour sa tension T'

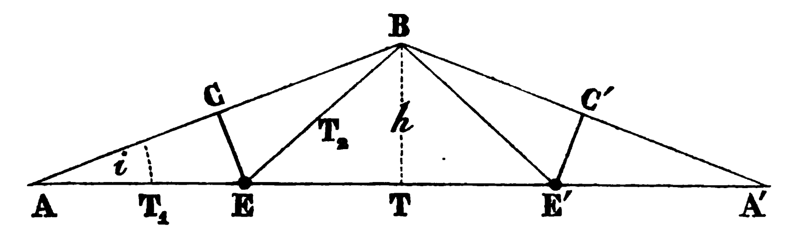
$$T'x = Hh = \frac{PL}{2} \quad \text{ou} \quad T' = \frac{PL}{2x}$$

26. *Fermes à grande portée avec tirants horizontaux et inclinés, en fer et contrefiches ou chevalets.* AB, A'B sont deux arbalétriers en fer ou en bois réunis par un tirant horizontal AA' en fer. Le milieu C, C' de chacun d'eux repose sur une contrefiche ou un chevalet CE perpendiculaire à l'arbalétrier, et qui s'oppose à la flexion en C, en vertu des efforts que lui transmettent les tensions des tirants en fer AE, EB. Ces deux derniers tirants ont des longueurs égales, et les triangles AEB, A'E'B sont dès lors isocèles.

Donnant à P la signification qu'on lui a attribuée (24), on obtient par les mêmes raisonnements, pour la tension T du tirant intermédiaire EE'

$$T = \frac{P}{2\,\text{tang.}\, i} = \frac{PL}{2h}$$

h étant toujours la montée de la ferme, et L sa demi-portée.



Mais, outre la tension générale T que subit tout le système des tirants horizontaux $AE + EE' + E'A'$, les parties AE, $A'E'$, reçoivent un excédant de tension t dû à l'effort des contrefiches ou chevalets CE, $C'E'$; effort qui produit aussi la tension propre T_2 des tirants inclinés BE, BE'.

On règlera ces tensions en remarquant qu'elles ne doivent pas dépasser celles qui seraient strictement suffisantes pour empêcher l'arbalétrier de fléchir au point C. Il suffit donc que leur résultante R, dirigée suivant EC, fasse strictement équilibre à la composante suivant CE de l'effort qui tend à abaisser le point C. Or les points A et B étant devenus fixes en vertu de la tension T, la charge verticale en C se réduit, comme au n° 24, à $\frac{1}{2}P$ et sa composante R suivant CE devient

$$R = \frac{1}{2} P \cos. i$$

Les triangles ACE, BCE étant égaux, on a facilement pour les composantes t, T_2 de R suivant AE, EB

$$t = T_2 = \frac{R}{2 \sin. i} = \frac{P}{4 \operatorname{tang.} i} .$$

de sorte que cette tension t s'ajoutant à celle T que subissent déjà les tirants horizontaux AA^1 par le seul effet de la poussée de la ferme, il arrive définitivement que T_1 désignant la tension totale sur les tirants extrêmes AE $A'E'$, on a entre toutes les tensions t, T, T_1, T_2 du système les relations

$$t = T_2 = \frac{1}{2} T, \qquad T_1 = \frac{3}{2} T \qquad \text{et} \qquad T_1 = 3\,T_2,$$

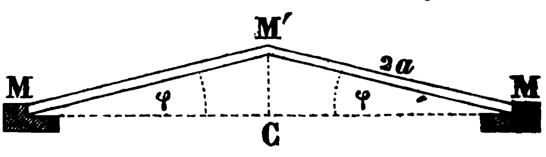
ou

$$T = 0.5 \times \frac{PL}{h}; \quad T_2 = t = 0.25 \times \frac{PL}{h} \quad \text{et} \quad T_1 = 0.75 \frac{PL}{h}$$

Ces fermes sont fort à la mode aujourd'hui où la légèreté est

plus appréciée que la véritable économie (pag. 557); à ce titre, on pourrait parfois y remplacer le fer par des cordages en chanvre.

27. *Action de l'eau sur deux traverses horizontales.* p étant la pression par mètre courant de traverse dans le sens horizontal, $2a$ la longueur de l'une d'entre elles, φ l'angle du *busc* CMM', $p \times 2a$ sera la pression totale perpendiculaire à MM'. Cette pression se décomposera en deux forces, chacune $= pa$, appliquées en M et M'. La pression H parallèle à CM, que les traverses exercent l'une contre l'autre en M', a donc pa pour composante perpendiculaire à MM', d'où



$$pa = \text{H} \sin.\varphi\,; \quad \text{H} = \frac{pa}{\sin.\varphi}$$

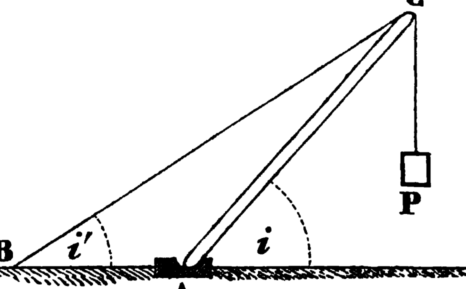
et sa composante Z dirigée suivant M'M est telle que l'on a

$$\text{Z} = \text{H} \cos.\varphi = \frac{pa}{\text{tang}.\varphi}$$

28. *Appareils divers.* Dans l'appareil ci-joint, l'effort R qui comprime la pièce CA est la résultante des tensions P et T des cordes CP, CB; on a donc

$$\text{R} = \frac{\text{P} \cos.i'}{\sin.(i - i')}$$

et $\text{T} = \dfrac{\text{P} \cos.i}{\sin.(i - i')}$



la pièce AC tend à faire glisser son support, et l'effort horizontal H qu'il faudrait opposer à ce glissement est, abstraction faite du frottement,

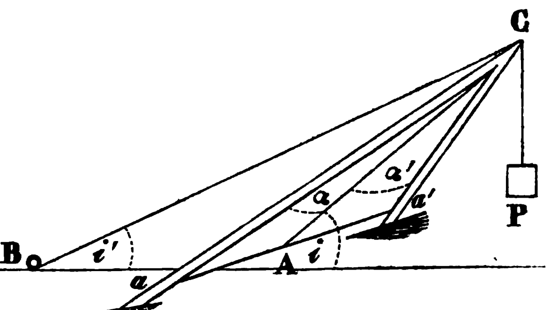
$$\text{H} = \text{R} \cos.i = \frac{\text{P} \cos.i' \cos.i}{\sin.(i - i')}$$

29. Le système suivant, qui revient en principe à la *chèvre* des architectes, jouit d'une stabilité que n'offre pas le système précédent.

AC est l'intersection du plan vertical qui contient les cordes

BC, CP avec le plan aCa' perpendiculaire au premier.

La pression transmise au plan $aAa'C$ est celle R qui avait lieu sur la pièce unique AC et la tension T du cordage BC reste aussi la même



$$R = \frac{P \cos. i'}{\sin. (i - i')} \qquad T = \frac{P \cos. i}{\sin. (i - i')}$$

décomposant R en deux composantes $z\ z'$ suivant Ca et Ca', on a, à cause de $\alpha = \alpha'$

$$Z = Z' = \frac{R}{2 \cos. \alpha} = \frac{P \cos. i'}{2 \cos. \alpha \sin. (i - i')}$$

la tension H' du lien aAa' est évidemment la composante horizontale de Z ou $Z \sin. \alpha$, ainsi

$$H' = \frac{P \cos. i' \operatorname{tang}. \alpha}{2 \sin. (i - i')}$$

quant à l'effort H qui tend à faire glisser les poids aa' de l'appareil parallèlement au plan ACB, il est comme ci-dessus

$$H = \frac{P \cos. i' \cos. i}{\sin. (i - i')}$$

30. *Observation.* Si, dans ces appareils, le poids P, au lieu d'être simplement suspendu au point C, était soulevé au moyen d'une corde passant dans une ou plusieurs poulies fixées à ce point, il faudrait pour déterminer les efforts dans la direction des pièces AC considérer au lieu du poids P la résultante de ce poids et de la tension de la corde à laquelle la force serait appliquée (Voy. l'ouvrage de *Navier* sur la résistance des matériaux, auquel j'ai emprunté plusieurs exemples importants).

POUSSÉE DES TERRES. (Voyez *Murs*, pag. 1194.)

PRÉCESSION. Il résulte du défaut de sphéricité des couches terrestres que les attractions du soleil, de la lune et des planètes sur le sphéroïde terrestre, ont des résultantes qui ne passent pas constamment par son centre de gravité. De là naissent de très-légères perturbations du mouvement de rotation connues sous les noms de *précession des équinoxes* et de *nutation* de l'axe de la terre.

En vertu de la précession, la droite d'intersection du plan de l'équateur avec celui de l'écliptique rétrograde, sur l'écliptique fixe de l'année 1800, de secondes 50''.36 par an.

Par conséquent, le point équinoxial ou du *bélier*, qui forme l'une des extrémités de cette droite, rétrograde de la même quantité ou de un degré en soixante et onze ans environ, et l'équinoxe avance de l'orient vers l'occident contre l'ordre des signes à travers les constellations *bélier*, *poissons*, *verseau*, etc. Ainsi le point équinoxial ou du *bélier* ne correspond plus à la constellation de même dénomination ; il est aujourd'hui très-voisin du *verseau*.

PRIMATICE (Il), l'un des rénovateurs de l'architecture en France, où il fut appelé par François Ier. Né à Bologne en 1490, il est mort en 1570, après avoir travaillé au château de Fontainebleau.

PRIX MOYENS. Ces prix, assez variables avec les localités, ne sauraient être appliqués aux travaux dans les grandes villes.

Journées.

	fr. c.		fr. c.
Manœuvre	1 10	Charron. — Scieur de long.	2 50
Idem travaillant dans l'eau.	1 50	Menuisier	2 50
Terrassier	1 50	Forgeron	3 00
Femme	0 65	Charretier	2 00
Maître maçon	3 00	Batelier	3 00
Maçon	2 00	3 mulets harnachés et leur conducteur	10 00
Tailleur de pierres	2 00	Tombereau à un cheval avec son charretier	5 00
Couvreur	2 50	Peintre	2 25
Maître charpentier	3 50		
Charpentier	2 50		

Matériaux.

	fr. c.		fr. c.
Un mètre cube de		Un mètre cube de	
Sable fin	4 00	Bois de hêtre équarri à vive arête, sans aubier.	70 00
Plâtre	50 00	— de sapin *id.*	50 00
Chaux vive	12 00	Cent kilog. de fer en barres fortes	60 00
Mortier	12 00	— de fonte grossièrement moulée	35 00
Moellons durs	4 00	Mille briques	20 00
Pierre de taille dure.	30 00		
Bois de chêne équarri à vive arête, sans aubier.	100 00		

Ouvrages faits.

	fr. c.		fr. c.
Un mètre cube de		Un mètre cube de terre transporté à un relai à la brouette (p. 169)	0 12
Maçonnerie de moellons et mortier ordinaire.	12 00	*Id.* de roc	0 20
Id. id. pour voûtes	14 00	Un mètre carré de couvertures d'ardoises	4 00
Pierres de taille et mortier ordinaire	40 00	De tuiles plates	2 00
Id. id. pour voûtes.	45 00	De pavé de briques à plat.	4 00
Briques et mortier ordinaire	18 00	De planches de chêne à	

Ouvrages faits (suite).

	fr. c.
rainures et languettes de $0^{m}.027$ épaisseur. .	5 00
Un mètre carré de portes pleines et volets, épaisseur $0^{m}.027$.	7 00
Id. id. épaisseur $0^{m}.04$.	9 00
Un mètre cube de déblai de terre à un homme à la fouille	0 12
Id. chaque demi-homme en sus.	0 06
De démolition de maçonnerie bien conservée.	1 60
Id. de mauvaise qualité.	0 70
De charpente en bois de chêne à vive arête et sans aubier, avec assemblages, pose comprise.	125 00
Un mètre carré de parement vu de maçonnerie de moellons bruts ou de briques. .	0 40
De pierres de taille. . .	6 00
Id. pour voûtes.	12 00
De peinture à l'huile sur deux couches.	0 80
De blanchissage au lait de chaux sur deux couches, sans grattage. .	0 06

PROBABILITÉS. La *probabilité* d'un événement est la raison que nous avons de croire qu'il aura ou qu'il a eu lieu.

Cette probabilité dépendant des connaissances que nous avons sur un événement, elle peut être inégale pour un même événement et pour diverses personnes. On voit que le mot *probabilité* diffère du mot *chance* en ce que celui-ci se rapporte aux événements en eux-mêmes et indépendamment de la connaissance que nous en avons.

Mesure de la probabilité. La mesure de la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas favorables et contraires, tous également possibles ou ayant tous une même chance. Dès lors, quand ce rapport est égal pour deux événements, nous avons la même raison de croire à l'un et à l'autre, et, quand il est différent, nous avons plus de raison de croire à l'arrivée de l'événement pour lequel il est le plus grand.

En général, si E est un événement d'une espèce quelconque, a le nombre des cas favorables, b celui des cas contraires, p la probabilité de E, la mesure de cette probabilité sera

$$p = \frac{a}{a+b} .$$

En même temps, si F est l'événement contraire à E, de sorte cependant que de ces deux événements un seul doive nécessairement arriver, comme, par exemple, *pile ou face*, au jeu qui porte ce nom; si l'on désigne par q la probabilité de F, on aura aussi

$$q = \frac{b}{a+b}$$

Il en résulte $$p + q = 1$$

car *la somme des probabilités de deux événements contraires, tels qu'on vient de les définir, est nécessairement égale à l'unité.*

Si nous n'avons pas plus de raison de croire à l'arrivée de E qu'à celle de F, leurs probabilités sont égales, et l'on a conséquemment

$$p = q = \tfrac{1}{2}$$

Ce cas est celui où notre esprit se trouve dans une parfaite *perplexité;* si l'événement E, dont la probabilité est mesurée en général par $\frac{a}{a+b}$, n'avait aucune chance contraire, on aurait $p = \frac{a}{a} = 1$; il y aurait alors *certitude* de son arrivée ; on voit que, dans la théorie des chances, la *certitude* est un cas particulier de la *probabilité*, et qu'elle est représentée dans le calcul par l'unité ; si toutes les chances étaient contraires, on aurait $p = \frac{o}{a+b} = o$: c'est le symbole de l'*impossibilité;* la probabilité proprement dite est entre ces deux limites, et par conséquent elle est toujours exprimée par une fraction moindre que 1 et > 0.

Objet du calcul des probabilités. Déterminer dans chaque question d'éventualité ou de doute le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée d'un événement où à la vérité d'une chose, au nombre de tous les cas possibles, de sorte que nous puissions connaître d'une manière précise d'après la grandeur de cette fraction plus ou moins voisine de l'unité la raison que nous avons de croire que cette chose soit vraie ou que cet événement a eu lieu ou aura lieu, et que nous puissions aussi, sans aucune illusion, comparer cette raison de croire dans deux questions de nature toute différente ; tel est l'objet du calcul des probabilités.

Probabilité composée ou de concours. On appelle ainsi la probabilité du concours de deux événements E, E′ *indépendants* l'un de l'autre.

Par exemple, une urne A contient c boules, savoir, a blanches, $c - a$ noires.

Une autre urne B contient c' boules, savoir a' blanches, $c' - a'$ noires : la probabilité de tirer à la fois une boule blanche de chaque urne est une probabilité composée.

Sa mesure. La probabilité composée s'obtient en faisant le produit des probabilités simples, de sorte que, si, en général, p, p', p''... sont les probabilités propres d'un nombre quelconque d'événements E, E′, E″... *indépendants* les uns des autres, la probabilité

de leur concours, ou celle d'un événement composé de tous ceux-là, sera le produit $p \times p' \times p'' \times \ldots$ des probabilités propres.

Je dois me borner à ces définitions générales et renvoyer aux ouvrages des *Bernouilli*, *Condorcet*, *Laplace*, *Lacroix*, et surtout à celui de *Poisson*, intitulé *Recherches sur les probabilités des jugements*, in-4°, 1837.

PROGRESSIONS. Séries dont trois termes consécutifs quelconques donnent deux *différences* égales ou deux *quotients* égaux.

Dans le premier cas, la progression est dite *arithmétique* ou progression par *différences*; dans le second cas, elle est dite *géométrique* ou progression par *quotients*.

La progression est *croissante* lorsque les termes augmentent en allant de gauche à droite; — *décroissante*, lorsqu'ils diminuent en marchant dans le même sens.

$$\div\ 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\,.\,.\,.$$

est une progression arithmétique croissante dont l'équidifférence est 2;

$$\div\!\div\ 4 : 2 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \ldots.$$

est une progression géométrique décroissante dont le quotient constant est $\frac{1}{2}$.

Progressions arithmétiques ou par équidifférences. a est le premier terme, b celui qui le suit immédiatement, d leur différence $= (b - a)$, n le nombre des termes de la progression, u son dernier terme, s la somme faite de tous ses termes depuis a jusqu'à u inclusivement.

La progression étant supposée croissante, on voit 1° que m termes fourniront $(m - 1)$ différences; 2° que un terme quelconque, dont le rang est m, égale $(m - 1)$ fois la différence constante d, plus le premier terme. Ainsi :

$$\text{le } m^{\text{ième}} \text{ terme} = (m - 1)\,d + a$$

$$\text{et le dernier terme } \quad u = (n - 1)\,d + a$$

La valeur moyenne des termes de la série de a en u est évidemment $\frac{a + u}{2}$: donc, en multipliant cette valeur moyenne par le nombre n des termes, on aura la somme s de la totalité des termes

$$s = \frac{(a + u)\,n}{2} = \frac{2an + n(n - 1)\,d}{2}$$

les deux équations ci-dessus ayant trois quantités communes a, u, n, on en déduira, en éliminant ces valeurs communes, *trois* autres équations; ce qui donnera cinq équations entre les cinq quantités

a, d, n, u, s. Si maintenant on résout chaque équation par rapport à chacune des quatre quantités qui y entrent, il en résultera les vingt formules suivantes qui comprennent tous les cas :

Progressions par différences.

Etant donnés	Trouver a.
$n . d . u$	$a = u - d(n-1)$
$n . u . s$	$a = \frac{2s - un}{n} = \frac{2s}{n} - u$
$n . d . s$	$a = \frac{2s - dn(n-1)}{2n} = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$
$u . d . s$	$a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2}$
	Trouver u.
$a . d . n$	$u = a + d(n-1)$
$a . n . s$	$u = \frac{2s - an}{n} = \frac{2s}{n} - a$
$d . n . s$	$u = \frac{2s + dn(n-1)}{2n} = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$
$a . d . s$	$u = \frac{d \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2}$
	Trouver n.
$a . u . d$	$n = 1 + \frac{u-a}{d}$
$a . u . s$	$n = \frac{2s}{a+u}$
$a . d . s$	$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2d}$
$u . d . s$	$n = \frac{2u + d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2d}$

Etant donnés	Trouver d.
$a\,.\,u\,.\,n$	$d=\frac{u-a}{n-1}$
$a\,.\,u\,.\,s$	$d=\frac{u^2-a^2}{2s-a-u}$
$a\,.\,n\,.\,s$	$d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}=\frac{2(s-an)}{n^2-n}$
$u\,.\,n\,.\,s$	$d=\frac{2un-2s}{n(n-1)}=\frac{2(un-s)}{n^2-n}$

	Trouver s.
$a\,.\,u\,.\,n$	$s=\frac{(a+u)n}{2}$
$a\,.\,u\,.\,d$	$s=\frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}=\frac{a+u}{2}+\frac{u^2-a^2}{2d}$
$a\,.\,n\,.\,d$	$s=\frac{2an+dn(n-1)}{2}=an+\frac{dn(n-1)}{2}$
$u\,.\,n\,.\,d$	$s=\frac{2un-dn(n-1)}{2}=un-\frac{dn(n-1)}{2}$

Si la progression était décroissante, la différence d serait négative, et il suffit, pour appliquer ces formules à la progression décroissante, d'y changer le signe de d.

Exercices. On trouverait pour la somme s des 20 premiers termes de la progression $\div$ 1 . 3 . 5 . 7 . . . pour laquelle dès lors $a=1$, $d=2$, $n=20$

$$s=20+20\times 19=20\,(1+19)=20\times 20=400=n^2$$

Pour toute autre série des nombres impairs commençant par 1, la somme des termes égalerait le carré du nombre des termes ou $s=n^2$.

Le premier terme d'une progression arithmétique est 5, le dernier terme 41, la somme des termes 299 ; on demande le nombre des termes n et l'équidifférence d

$$n=\frac{598}{5+41}=13\,; \qquad d=\frac{41-5}{13-1}=3$$

Le premier terme d'une progression est $\frac{1}{2}$, le dernier est 12, la

somme des termes est 32 ; on demande le nombre des termes n et la différence d. Il vient

$$n = \frac{64}{\frac{1}{3} + 12} = \frac{192}{37}$$

or cette division ne pouvant s'opérer exactement, et un nombre de termes ne pouvant être ni fractionnaire ni négatif, il faut en conclure que, avec ces données, la suite par différences égales est impossible.

Démontrer que la somme S_2 des carrés des termes d'une progression arithmétique est

$$S_2 = \frac{d^2 n^3}{3} + \frac{(2ad - d^2) n^2}{2} + \frac{(6a^2 - 6ad + d^2) n}{6}$$

Dans le cas particulier où la progression est celle des nombres naturels 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n, on a

$$S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n}{1} \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+1)}{3}$$

Progressions par quotient. a étant le premier terme, q le quotient d'un terme quelconque divisé par le terme qui le précède immédiatement, n le nombre des termes de la progression, u le dernier terme, s la somme de tous les termes, depuis a jusqu'à u inclusivement, on trouve facilement que m termes donnent $(m - 1)$ quotients égaux, et que dès lors le $m^{ième}$ terme égale le premier multiplié par le quotient constant élevé lui-même à la $(m - 1)^{ième}$ puissance. Ainsi

$$m^{ième} \text{ terme} = a q^{m-1}$$

et l'on a pour le dernier ou $n^{ième}$ terme

$$u = a q^{n-1} \ldots\ldots$$

quant à la somme S de n termes, on a évidemment

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots + aq^{n-1} \quad \text{ou}$$

$$S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1})$$

or la parenthèse revient à $\frac{1 - q^n}{1 - q}$ ou $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ lorsque l'on suppose $q \geq 1$: donc on a définitivement

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Eliminant a u et q des deux équations ci-dessus, on aura trois autres équations ou en tout cinq renfermant chacune quatre des

cinq quantités a, u, q, n, s, d'où l'on tirera les vingt formules qui suivent :

Connaissant — Trouver a.

$u.q.n.$ . . . $a = \frac{u}{q^{n-1}}$ ou $\log. a = \log. u - (n-1)\log. q$

$u.q.s.$ . . . $a = uq + s - sq$ ou $\log.(s-a) = \log. q + \log.(s-u)$

$q.n.s.$ . . . $a = \frac{s(q-1)}{q^n-1}$ ou $\log. a = \log. s + \log.(q-1) - \log.(q^n-1)$

$u.n.s.$ . . . $a \times (s-a)^{n-1} - u \times (s-u)^{n-1} = 0$

Connaissant — Trouver u.

$a.q.n.$ . . . $u = aq^{n-1}$ ou $\log. u = \log. a + (n-1)\log. q$

$a.q.s.$ . . . $u = \frac{sq-s+a}{q}$ ou $\log.(s-u) = \log.(s-a) - \log. q$

$q.n.s.$ . . . $u = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$ ou $\log. u = \log. s + (n-1)\log. q + \log.(g-1) - \log.(q^n-1)$

$a.n.s.$ . . . $u(s-u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$

Connaissant — Trouver q.

$a.u.n.$ . . . $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ ou $\log. q = \frac{\log. u - \log. a}{n-1}$

$a.u.s.$ . . . $q = \frac{s-a}{s-u}$ ou $\log. q = \log.(s-a) - \log.(s-u)$

$a.n.s.$ . . . $aq^n - sq + s - a = 0$

$u.n.s.$ . . . $q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-u} + \frac{u}{s-u} = 0$

Connaissant	Trouver n.
$a.u.q\ldots$	$n=1+\frac{\log. u-\log. a}{\log. q}$
$a.u.s\ldots$	$n=1+\frac{\log. u-\log. a}{\log.(s-a)-\log.(s-u)}$
$a.q.s\ldots$	$n=\frac{\log.(a+sq-s)-\log. a}{\log. q}$
$u.q.s\ldots$	$n=1+\frac{\log. u-\log.(s-sq+uq)}{\log. q}$

Connaissant	Trouver s.
$a.u.n\ldots$	$s=\frac{u\sqrt[n-1]{u}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}-\sqrt[n-1]{a}}$ On calculera séparément 1° $u\sqrt[n-1]{u}$, 2° $a\sqrt[n-1]{a}$, 3° $\sqrt[n-1]{u}$, 4° $\sqrt[n-1]{a}$, par les formules particulières 1° $\log. u\sqrt[n-1]{u}=\log. u+\frac{\log. u}{n-1}$ 2° $\log. a\sqrt[n-1]{a}=\log. a+\frac{\log. a}{n-1}$ 3° $\log. \sqrt[n-1]{u}=\frac{\log. u}{n-1}$ 4° $\log. \sqrt[n-1]{a}=\frac{\log. a}{n-1}$
$a.u.q\ldots$	$s=\frac{uq-a}{q-1}$ ou $\log. s=\log.(uq-a)-\log.(q-1)$
$a.n.q\ldots$	$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ ou $\log. s=\log. a+\log.(q^n-1)-\log.(q-1)$
$u.n.q\ldots$	$s=\frac{u(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$ ou $\log. s=$ $\log. u+\log.(q^n-1)-\log.(q-1)-\log. q^{n-1}$

Il n'y a aucun changement à faire à ces formules quand la progression est décroissante. Elles sont générales, pourvu que l'on convienne que $q = \frac{\text{un terme quelconque}}{\text{celui qui le précède}}$.

Le quotient q étant nécessairement une fraction lorsque la progression est décroissante, la somme s prend la forme

$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Si de plus le nombre des termes est très-grand, la fraction q élevée à la très-haute puissance n devient très-petite, et la somme s se rapproche beaucoup de la valeur

$$s_0 = \frac{a}{1-q} \text{ limite}$$

qu'elle n'atteint que lorsque le nombre des termes est infiniment grand, et le dernier terme $u = 0$.

Exercices. La série suivante

$$\div\!\!\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$$

donne $a = 1$; $q = 2$; $u = 64$; $n = 7$; $s = 127$

Une progression croissante de dix termes a pour premier terme 1, pour quotient 2, on demande le dernier terme u et la somme s des termes. $u = 512$; $s = 1023$.

Trouver la fraction vulgaire équivalente à la fraction décimale périodique 0.36 36 36... on a

$$a = \frac{36}{100}, \quad q = \frac{1}{100}; \quad s_0 = \frac{a}{1-q} = \frac{4}{11}$$

on trouverait de même $0.818181 = \frac{9}{11}$

On demande la somme de la progression suivante décroissante de $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot \;.\;.\;.\;.\; + \left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$$

On a : $a = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$; $u = 0$ et $s = 1$

On aurait de même

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \;.\;.\;.\;.\; + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots+0=\frac{1}{3}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots+0=2$$

et pour la somme de la série infinie alternative qui suit, à cause de $a=1$; $q=(-x)$

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots=s=\frac{a}{1-q}=\frac{a}{1+x}=\frac{1}{1+x}$$

PROPORTIONS. Il y a *proportion arithmétique* dans tout système de quatre nombres tels que la *différence* des deux premiers soit égale à la différence des deux derniers, en marchant dans le même sens. 2.7 : 9.14 forment une proportion arithmétique en vertu de l'équidifférence $7-2=14-9=5$, et dans toute proportion arithmétique la *somme* $2+14$ des *extrêmes* = la somme $7+9$ des *moyens*; propriété qui déterminera toujours l'un des quatre termes, lorsqu'on connaîtra les trois autres.

Il y a *proportion géométrique* dans tout système de quatre nombres tels que le *quotient* des deux premiers soit égal au quotient des deux derniers, en marchant dans le même sens. A : B :: C : D formera donc une proportion géométrique, si $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ et dans toute proportion géométrique le *produit* $A\times D$ des *extrêmes* = le produit $B\times C$ des *moyens*; propriété qui permet toujours de déterminer l'un des quatre termes, lorsqu'on connaît les trois autres. Une proportion arithmétique ou géométrique est dite *continue* lorsque ses deux moyens sont égaux

$$A.X:X.B \quad \text{d'où} \quad A-X=X-B \quad \text{ou} \quad X=\frac{A+B}{2}$$

est une proportion arithmétique continue.

$$A:Y::Y:B \quad \text{d'où} \quad Y^2=AB \quad \text{et} \quad Y=\sqrt{AB}$$

est une proportion géométrique continue.

X est dite *moyenne arithmétique* entre les nombres A et B; Y est dite *moyenne géométrique* entre les mêmes nombres, et il est facile de démontrer que X est toujours plus grand que Y, tant que A est plus grand que B.

Proportions dérivées. S'il y a proportion géométrique entre les quatre nombres

$$A:B::C:D$$

il y aura encore une proportion géométrique en changeant les termes

moyens de place, ou en renversant les termes ou en changeant les rapports de places, ou par ces diverses combinaisons; ce qui donnera

A : C :: B : D	D : C :: B : A
B : A :: D : C	D : B :: C : A

Dans une proportion géométrique quelconque, la somme ou la différence des deux premiers est à la somme ou à la différence des deux derniers comme le premier est au troisième, ou comme le deuxième est au quatrième, d'où

$(B+A) : A :: (D+C) : C$	$(B-A) : A :: (D-C) : C$
$(B+A) : (D+C) :: A : C$	$(B-A) : (D-C) :: A : C$
$(B+A) : (D+C) :: A : C$ ou $:: B : D$	$(B-A) : (D-C) :: A : C$ ou $:: B : D$

La somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence, d'où

$(B+A) : (D+C) :: (B-A) : (D-C)$ et $(B+A) : (B-A) :: (D+C) : (D-C)$

Il est visible que, lorsque deux proportions ont un rapport commun, on peut mettre en proportion les deux autres rapports: donc

$$\left.\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ E : F :: C : D \end{array}\right\} \text{ donnent } A : B :: E : F$$

Si les proportions ont les mêmes antécédents, on peut mettre les conséquents en proportion : ainsi

$$\left.\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ A : E :: C : F \end{array}\right\} \text{ donnent } \left\{\begin{array}{l} B : E :: D : F \\ B : D :: E : F \end{array}\right.$$

et si l'on multiplie ou si l'on divise *par ordre* les termes de deux proportions, on formera encore une proportion, ainsi

$$\left.\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ E : F :: G : H \end{array}\right\} \text{ donnent } A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H$$

Enfin les puissances semblables de quatre quantités en proportion forment une proportion, et il en est de même de leurs racines du même degré.

PUISSANCES. Elever une quantité quelconque A à une puissance donnée n, c'est chercher le produit de cette quantité A multipliée $(n-1)$ fois par elle-même ou la valeur de A^n.

La quantité A étant numérique ou littérale, on obtiendra donc sa puissance A^n en multipliant A $(n-1)$ fois par A. L'on trouverait

PUITS ET GALERIES. C'est par des puits et des galeries que nous pénétrons dans le sein de la terre. Bien que l'établissement de ces voies souterraines appartienne plus spécialement à l'art du mineur, et qu'un aide-mémoire *général* ne puisse convenablement résumer les procédés des arts, je crois devoir pourtant indiquer sommairement comment on peut, avec sécurité, *foncer* un puits et *pousser* une galerie, sinon pour arracher méthodiquement des entrailles de la terre les minéraux qu'elle récèle, du moins pour aller porter secours à des hommes ensevelis sous des éboulements; circonstance que le grand développement des travaux souterrains de chemin de fer rend malheureusement trop fréquente aujourd'hui et dans laquelle tous ceux qui portent le nom d'*ingénieurs* doivent apporter autre chose qu'une pitié stérile et le regret de ne savoir que faire (*).

Foncer un puits (*pl.* CIV, *fig.* 1, 2, 3). Etablir parfaitement de niveau sur le sol un cadre dit à *oreilles*, carré (*fig.* 1), ou rectangulaire (*fig.* 3), composé de quatre pièces A, B, C, D, équarries au moins à la scie. Ses côtés sont assemblés par entailles à mi-bois, et on les oriente d'ailleurs de telle sorte que l'un des côtés se trouve dans le plan vertical de l'entrée de la galerie ouverte ou à ouvrir au fond du puits.

Si le puits est barlong, comme dans la perspective isométrique de la *figure* 3, il convient que les plus courtes pièces B, D du cadre posent sur les plus longues A, C. On a retranché deux des quatre côtés du puits dans cette figure, pour mieux montrer la disposition des deux faces A B, en tout semblables d'ailleurs aux faces supprimées C D.

Le cadre à oreilles étant maintenu solidement à la place déterminée soit par des piquets *p*, *p*, *p*. . . fichés contre les *oreilles*, soit en chargeant celles-ci de pierres, le mineur excave suivant les quatre plans verticaux déterminés par les quatre faces extérieures du cadre. Ce déblai est poussé jusqu'à la profondeur de un mètre et plus, s'il est possible, ou jusqu'à une profondeur moindre, si le terrain est très-ébouleux.

Sur le fond de l'excavation ainsi obtenue et qui doit être de niveau, le mineur pose un cadre *sans oreilles* $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, dont les côtés sont assemblés par entailles quelquefois maintenues par deux

---

(*) Le 2 septembre 1836, *Dufavet*, puisatier à Champvert près de Lyon, fut enseveli sous 20ᵐ.14 d'éboulis dans un puits qu'il creusait. Il y vécut pendant *quatorze* jours à l'aide d'aliments qu'on put lui passer par quelques étroites issues. Après des travaux que les puisatiers ses camarades avaient tentés infructueusement, il fut tiré de sa périlleuse situation au moyen d'un *puits* et d'une *galerie* creusés par les mineurs du génie *militaire*, envoyés de Lyon pour le secourir (Emy, *Charpenterie*, pag. IX).

clous. Ce second cadre, comme tous ceux qui le suivront, doit être établi avec la plus grande précision, et de telle sorte que ses côtés répondent verticalement et horizontalement à ceux du cadre à oreilles.

On introduit entre les cadres et les parois de l'excavation des planches *m*, *m*, *m*, verticales et jointives, dont la longueur est égale à la profondeur du déblai comprise entre le plan supérieur d'un cadre et le plan inférieur du cadre qui le suit.

Ces planches touchent immédiatement les côtés extérieurs du cadre à oreilles ; elles y sont au besoin maintenues par quelques clous ; mais elles sont écartées des côtés du cadre inférieur de l'épaisseur d'une planche, et le vide de cet écartement est d'abord occupé par des coins en bois *n*, *n*, *n*, *n*, qui maintiennent l'assemblage du cadre, serrent les planches contre les terres, et réservent la place des bouts supérieurs des planches qui revêtiront la seconde tâche.

On soutient le deuxième cadre par quatre tringles en bois *t*, *t*, clouées par leurs bouts contre les faces internes des cadres ; et des traits verticaux, marqués sur le milieu de ces faces, doivent se trouver rigoureusement sur une même verticale, depuis le cadre à oreilles jusques au fond du puits, ce dont on s'assure à l'aide du fil à plomb.

Les choses ainsi disposées, on creuse un nouveau déblai, et lorsque cette deuxième *tâche* est faite avec tous les soins qu'on a dû apporter à l'exécution de la première, on établit au nouveau fond un troisième cadre A_2, B_2, C_2, D_2 avec la même précision que les précédents ; puis on ôte l'un après l'autre les coins qui réservaient les places des nouvelles planches, et l'on insinue celles-ci comme les premières, c'est-à-dire de telle sorte qu'elles s'appuient, en place des coins, directement contre les côtés extérieurs du cadre A_n, et s'écartent du cadre A_{n+1}, inférieur à celui-ci, de l'épaisseur d'une planche.

On continue ainsi à descendre aussi bas qu'on veut, sans qu'il soit à craindre, en terrain sec, et si le travail a été bien fait, que les terres du haut s'éboulent et ensevelissent le mineur en comblant le travail.

Pour obtenir encore plus de sécurité, lorsque la chose est possible, on dispose dans les parties où l'on commence à rencontrer le ferme deux pièces de bois dites *porteurs* P P, qu'on applique contre les côtés les plus courts du rectangle du puits, et dont les extrémités sont reçues dans des entailles spéciales pratiquées dans la roche elle-même. Lorsqu'on a pu placer ainsi deux porteurs P P, et un cadre au-dessus d'eux, on dispose des poteaux I dans chacun des angles du boisage, de cadre en cadre, en remontant, de sorte que ces cadres, qui n'étaient d'abord maintenus en place que par les

tringles *t*, *t*, et par la pression du terrain, deviennent maintenant solidaires et reposent sur les porteurs inférieurs, et dès lors sur le ferme. Enfin, lorsque le puits est barlong, on consolide souvent ses longs côtés par des traverses horizontales allant de l'un à l'autre.

Galeries. La construction des galeries qui réclament un boisage s'exécute par un procédé que les *fig*. 1 et 2 de la *planche* CV indiquent maintenant suffisamment. Il ne diffère, en effet, de celui du foncement d'un puits que en ce que, au lieu d'approfondir le déblai verticalement, on le pousse horizontalement, les cadres devenant verticaux. On appelle *semelle* le côté inférieur des cadres ordinairement trapézoïdaux, *fig*. 2; *chapeau*, le côté horizontal supérieur, et *montants* les côtés convergents du trapèze. Dans la coupe longitudinale de la *fig*. 1, on a donné les mêmes lettres aux pièces analogues à celles du puits de la *pl*. CIV. On voit que les planches de garnissage *m m m* sont disposées horizontalement et de champ pour boiser les murs, et à peu près horizontalement et à plat sous le *ciel* de la galerie. Dans l'exploitation des mines, on emploie rarement des bois équarris; des motifs d'économie leur font préférer des bois ronds en grume, mais écorcés *fig*. 2, 3 et 4, et, lorsque le garnissage se compose de bois ronds refendus, il faut placer leur côté plat du côté de la roche.

Quant aux cadres D D D, on les établit en plaçant d'abord la semelle tant de niveau que de devers perpendiculairement à l'axe de la galerie, puis les montants, puis le chapeau, et enfin le garnissage qu'il est souvent nécessaire d'insinuer peu à peu par de légers coups de masse.

Dans les galeries et les puits, dont l'axe est incliné à l'horizon, les plans de tous les cadres doivent être perpendiculaires à cet axe.

L'ordre de préférence à donner aux bois est chêne, sapin rouge, hêtre, pin, sapin blanc. La pratique locale enseigne seule les dimensions qu'ils réclament, car on ne connaît jamais *à priori* les efforts auxquels ils pourront être soumis.

Les galeries reçoivent des mineurs certaines dénominations qu'il est bon de rappeler. En *p*, *fig*. 6, *planche* LXXI, est un *puits vertical* descendant du *jour* jusqu'au filon (p. 759), dont le *mur* est du côté *m m*; A des distances verticales d'une trentaine de mètres, on a établi la communication du filon avec le puits par des galeries sensiblement horizontales *t t* dites de *traverse* et qui courent à travers la roche stérile. Parvenu au filon, on a ouvert horizontalement et suivant sa direction des galeries dites *d'allongement* dont les points blancs A A A indiquent la coupe transversale ou perpendiculaire à leur axe. Ces galeries entièrement excavées dans la masse du filon servent à reconnaître le *gîte*, suivant sa longueur ou *direction*, en même temps qu'elles fournissent du minerai. Reliant

les différents *étages* par des puits *inclinés* ou foncés dans la masse minérale suivant son *inclinaison*, et dès lors productifs, l'exploitation est dite *préparée*. En effet, le système général des *puits inclinés*, *bures* ou *descenderies*, combiné avec celui des *galeries d'allongement*, a nécessairement partagé la masse minérale en masses partielles, ayant toutes sensiblement la forme de longs parallélipipèdes, qui sont abordables par quatre de leurs faces, les deux autres faces restant en contact avec la roche, supérieurement du côté du *toit*, inférieurement du côté du *mur m, m*. Enlever tout ce que chacun de ces parallélipipèdes peut renfermer de minéraux utiles, empêcher soit par des boisages, soit par des remblais de matières stériles, les roches supérieures de s'ébouler en comblant les vides ainsi laissés par l'exploitation, sont les données et les difficultés principales de l'art du mineur. On peut remarquer que, en général, *préparer* l'exploitation, c'est aussi l'*assécher*, car il suffit de donner aux galeries horizontales une pente suffisante, pour que les eaux s'écoulent dans un sens convenable; c'est encore la *ventiler* ou l'*aérer*, car les différences de niveau des étages mis en communication entre eux par les puits déterminent ordinairement un tirage qui suffit au renouvellement de l'air et au dégagement des gaz ; enfin, c'est faciliter le transport du minerai au jour.

L'établissement d'une galerie de traverse E, ayant son entrée au jour vers un des points les plus bas de la vallée, contribue considérablement, lorsqu'il est possible, à l'*aérage* de la mine et à l'économie des transports, en même temps qu'il assure infailliblement l'*écoulement* des eaux et dispense ainsi de toute machine d'épuisement. Cette traverse prend alors le nom de *Galerie d'écoulement*.

PYROMÈTRE : voyez *Calorique*, page 185. Je saisis l'occasion que m'offre ce renvoi pour réclamer, en faveur de l'ingénieur *Benjamin Robins*, l'idée du pyromètre que j'avais employé dans les forges de l'Ariége, en 1832, et dont je m'étais naïvement cru l'inventeur. Il n'y a pas plus d'une année que, parcourant pour la première fois les *Nouveaux principes d'artillerie*, publiés, en 1742, par l'illustre auteur du *Pendule balistique* (page 1259), j'ai trouvé, à la proposition V, la description d'un appareil en tout semblable à celui que, depuis vingt ans, j'appelais de très-bonne foi *mon* pyromètre, bien que *Robins* l'eût décrit, comme on le voit, près d'un siècle avant le premier emploi que j'en ai fait. Concluons de cet humble aveu d'abord qu'il y aurait moins *d'inventeurs* à l'époque où nous sommes, s'il y avait plus d'*érudits*, et aussi que l'on trouve parfois des notions utiles jusque dans les traités d'*artillerie*.

PYROXÈNE. Les pyroxènes se trouvent dans certains micas-

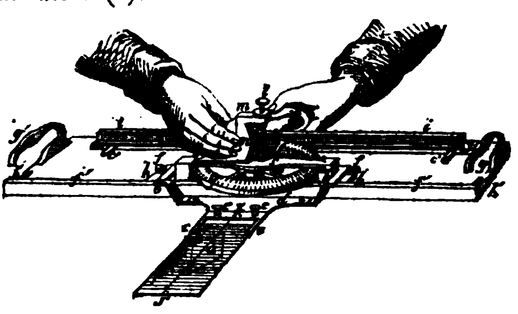
chistes, dans quelques calcaires anciens (vallée de Vicdessos, Ariége), dans les serpentines et dans des roches d'origine ignée.

Tantôt c'est une substance blanche ou verdâtre, ne donnant point d'eau par la calcination, fusible au chalumeau en un verre incolore ou presque incolore, inattaquable par les acides, rayant difficilement le verre et rayée par le quartz, pesant 3.250 à 3.400 ; c'est alors un bisilicate de chaux et de magnésie, avec un peu d'alumine de fer ou de manganèse. Tantôt c'est une substance verte tirant sur le noir et à poussière verte, ou tout à fait noire et à poussière brune, quelquefois rouge, ne donnant point ou donnant peu d'eau à la calcination, rayant difficilement le verre, fusible au chalumeau en un verre noir ou vert foncé; c'est un bisilicate de chaux de fer et de magnésie.

Q

QUADRATURES. Je renvoie pour les méthodes de quadrature à la page 435 de l'article *Courbes*, et je donne ci-dessous la description de l'instrument qui a jusqu'à ce jour satisfait le mieux aux conditions d'exactitude et de durée parmi tous ceux qui ont été proposés pour abréger les interminables calculs des surfaces cadastrales, ou le relèvement des courbes du travail (p. 1064).

L'auteur, M. *Beuvière*, géomètre en chef du cadastre, ex-professeur de génie rural à l'école de Grignon, a nommé son ingénieux appareil *planimètre-sommateur* (*).



Cet instrument a pour principe :

1° La *subdivision* de la figure à calculer en bandes ou zones, de largeur constante et la même pour chacune d'elles; 2° la *transformation* de chacune de ces zones, qui affectent généralement la forme de trapèzes mixtilignes, en un *rectangle équivalent* de même largeur que la bande qu'il remplace ; 3° enfin, le *relèvement* et la *sommation*, ou *totalisation* des longueurs des rectangles, substitués aux bandes qui composent la figure.

La *division* en zones d'égale largeur est fictivement effectuée par

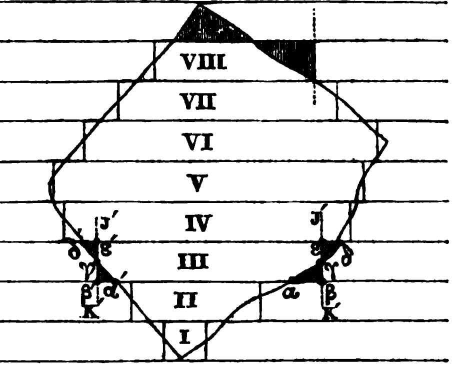
(*) M. *Beuvière*, rue des Marais-Saint-Martin, n° 20, se charge de faire établir son planimètre pour la somme de 325 fr.

un système de parallèles gravées sur une échelle en cristal *a*, posée à plat sur la figure à calculer, et se mouvant parallèlement à elle-même.

La *transformation* de chaque zone en un rectangle équivalent est faite *à vue et au jugé*, au moyen de la *ligne de foi* J′ K′, que l'on amène *en compensation* sur la partie de périmètre comprise dans la bande que l'on veut transformer, c'est-à-dire que l'on place cette ligne de manière à rendre équivalentes pour la vue les deux petites figures, généralement triangulaires et mixtilignes, analogues à celles $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\varepsilon$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'\varepsilon'$ de la bande n° III de la *figure*.

Le *relèvement* et la *sommation* des longueurs des rectangles ainsi substitués se font au moyen d'une roue graduée *g*, qui développe en roulant sur une règle mobile en travers *i*, qui lui reste tangente et s'appuie sur elle à volonté, un chemin précisément égal au déplacement de la ligne de foi J′ K′, sur la figure à calculer, et égal, par exemple, à la longueur $\beta\,\beta'$ de la bande que l'on veut relever.

Voici maintenant la série d'opérations que comporte généralement la manœuvre de l'instrument, pour la quadrature d'une figure quelconque.



On étend avec soin la feuille de plan, qui renferme la figure à calculer, sur une *table bien plane*; l'instrument posé et au besoin callé sur cette feuille y est suffisamment fixé par son propre poids.

On le dispose, par rapport à la figure, de manière que la première et la dernière bande (I et IX) soient en général des triangles mixtilignes, ce qui arrive presque toujours, lorsque la ligne de foi J′ K′ de l'échelle *a* est à peu près posée en diagonale; on met alors le compteur *au point*, en faisant coïncider les traits marqués zéro de la roue *g* et du vernier *l*; on saisit de la main droite la poignée *n*, et de la main gauche le levier *x*, de la règle tangente *i* (voir la figure pour la position des mains), on renverse cette règle en arrière; on amène la ligne de foi J′ K′ de l'échelle *a*, *en compensation* à l'extrémité droite de la bande n° I; on laisse retomber et agir par pression la règle *i*, poussée par un ressort sur la périphérie de la roue *g*; on imprime, par la poignée *n*, un mouvement de transport, le long du rebord *f′ f′* du plateau à la chappe *sh*, *sh*, et par suite au compteur *g*, et à l'échelle *a*, jusqu'à ce que la

ligne J′ K′ soit arrivée *en compensation* à l'extrémité gauche de la même bande n° I ; cette bande est alors relevée, c'est-à-dire que sa longueur est inscrite sur la roue *g*. Pour relever celles qui suivent, on renverse la règle tangente *i*, pour soustraire la roue à son action ; on amène J′ K′ de l'échelle, *en compensation* à l'extrémité droite de la bande n° II ; on laisse agir de nouveau la règle *i* sur la roue *g*, tant que J′ K′ n'est pas arrivée, *en compensation*, à l'autre extrémité de la même bande ; lorsqu'elle y est arrivée, la longueur de cette bande est aussi *relevée*, et évidemment *ajoutée, sommée, totalisée* avec celle de la première. On continue cette manœuvre jusques et y compris la dernière ou IX° bande ; les longueurs de toutes les zones, qui composent la figure, sont alors relevées et *cumulées* sur la roue *g* du compteur.

Pour connaître la surface qui correspond à cette somme, il suffit de lire, sur la graduation de la roue, le nombre de divisions dont elle a tourné, et si, comme dans le planimètre ci-contre, la roue a 0m.500 de circonférence, et que l'écartement de deux parallèles consécutives de l'échelle *a* soit 0m.005, le nombre lu exprimera la valeur de la surface en petits carrés d'un demi-millimètre de côté chacun.

Si la figure était assez grande pour que la roue du compteur ait dû faire plusieurs tours, on en compterait le nombre de la manière suivante : on prendrait *d'abord note* de la valeur de la fraction de tour, dont la roue aurait, en général, dépassé l'index du vernier, puis on ramènerait, par un *mouvement rétrograde de la roue*, sa division marquée zéro, en coïncidence avec celle analogue du vernier, c'est-à-dire avec l'index. La fraction de tour se trouverait ainsi supprimée, et on n'aurait plus à chercher qu'un nombre entier de tours qui serait donné par la position relative, qu'aurait prise, sur une petite échelle placée le long de l'axe *j* de la roue, la bague qui termine le ressort à boudins *p*, et qui, étant maintenue par la traction de ce ressort dans les *creux* d'un filet de vis, pratiqué sur cet axe, est visiblement entraînée sur sa longueur *d'un pas*, ou d'une spire à chaque tour.

Chaque tour complet devrait être compté pour 10 000 petits carrés de un demi-millimètre de côté, c'est-à-dire pour $\frac{10\,000}{4} = 2500$ millimètres carrés.

C'est d'après cette méthode, et avec un planimètre de ce genre, que M. *Morin*, en répétant 10 fois la quadrature d'un cercle de 0m.100 de diamètre, a obtenu une moyenne, ne différant que de un 1180ème de la surface réelle, et *sans qu'aucune des épreuves partielles ait différé de plus de un* 307ème (*Rapport à l'Académie des Sciences*).

Le même instrument appliqué dans des circonstances entièrement pratiques à la quadrature de 25 à 30 000 hectares, distribués dans 60 à 65 000 parcelles, a constamment soutenu les *comparai-*

sons à un 600ème près, ce que n'a pu faire jusqu'ici aucune des méthodes et instruments connus. En effet, l'emploi du compas et de l'équerre n'a pu toujours atteindre, en pratique courante, la limite d'exactitude réglementaire de un 300ème; quant au planimètre de MM. *Opikoffer* et *Ernst*, même muni de son cône en bois dépoli, il n'a pu dépasser le chiffre de un 400ème, dans les expériences auxquelles M. *A. Morin* l'a soumis.

QUANTITÉ DE MOUVEMENT. La mécanique industrielle désigne encore sous cette ancienne dénomination le produit $\frac{P}{g}V$ de la masse $M = \frac{P}{g}$ d'un corps dont le poids est P par sa vitesse actuelle V (page 782); comme g étant la gravité $9^{m}.80896$, cette vitesse V serait $= g\,T$, si le corps était tombé librement pendant le nombre de secondes T, on a indifféremment pour l'expression de sa quantité de mouvement

$$MV = \frac{P}{g}V = PT$$

T étant le temps *dû* à la vitesse acquise.

Lagrange explique le terme *quantité de mouvement*, en considérant M V comme exprimant *la somme des mouvements* de toutes les parties matérielles du corps; mais de même que *Laplace*, il prend la quantité de mouvement pour la *force* du corps en mouvement. Il importe de ne point se laisser égarer par l'autorité imposante de ces hommes illustres. Une quantité de mouvement n'est point *une* FORCE (page 776) dans le sens que les praticiens donnent à ce mot; elle peut devenir pour le corps qui en est doué une *source de forces* qui s'épuisera, par exemple, contre l'obstacle supposé fixe qui serait placé sur la direction même de la vitesse du mobile; mais cette exhaustion de la somme totale des quantités de mouvements élémentaires du mobile ne pourra s'opérer que dans une certaine durée, pendant laquelle le corps exercera contre l'obstacle une série de *forces* ou d'*efforts* variables, dont les intensités successives dépendront surtout de la nature physique du mobile et de celle de l'obstacle. Ainsi, animée d'une même vitesse, une même balle de fusil perdra très-différemment toute sa quantité de mouvement en frappant une plaque de fonte, ou en pénétrant dans un sac de laine; F étant en général l'effort *moyen* en kilogrammes exercé contre l'obstacle, t la durée en seconde de l'exhaustion totale de la quantité de mouvement du mobile, P son poids et V sa vitesse d'arrivée, on a (page 943)

$$Ft = \frac{P}{g}V \quad \text{ou} \quad F = \frac{P}{g}\frac{V}{t}$$

expression qui montre que l'effort moyen augmente à mesure que la durée du choc diminue. Ainsi, le mobile étant une balle de fusil dont le poids $P = 0^k.0256$, et la vitesse d'arrivée $V = 454^m$, on a $F\,t = MV = 1.18$, et suivant que la quantité de mouvement s'épuisera en

$$t = 1 \text{ seconde ou } 0^s.1 \text{ ou } 0^s.01 \text{ ou } 0^s.001$$

la moyenne des efforts exercés contre l'obstacle pendant toute cette durée sera

$$F = 1^k.18 \text{ ou } 11^k.8 \text{ ou } 118^k \ldots \text{ ou } 1180^k.$$

R

RACCORDEMENT (*quelques méthodes de*), *pl.* CV.

Raccorder deux alignements parallèles AB, DE *sur une oblique* FG, *à leur direction commune dont l'inclinaison est connue* (*fig.* 5).

Prolongez les alignements donnés AB, DE, jusqu'à la sécante FG, ou jusqu'à une parallèle FG à cette sécante. Au milieu H de la droite déterminée par les points de rencontre F, G, élevez une perpendiculaire indéfinie HI à FG. Portez FH de F en A, et GH de G en E. Par A et E ainsi déterminés, élevez des perpendiculaires aux parallèles, elles rencontreront HI en des points C_1 C_2 qui sont les centres des arcs de raccordement AH, HE dont les rayons respectifs sont $AC_1 = C_1H$ et $C_2H = C_2E$.

Les alignements BM, AN *n'étant pas parallèles* (*fig.* 6), cherchez sur le terrain ou sur le papier leur intersection C. Divisez l'angle BAC en plusieurs angles égaux et marquez sur BC les intersections 1, 2, 3 des côtés de ces angles avec la direction BC. Répétez les mêmes opérations du point B, par rapport à l'alignement CA en numérotant les intersections dans l'ordre inverse. Les intersections des lignes de même indice B1 et A1, B2 et A2, etc., sont des points qui appartiennent à l'arc de raccordement.

Autre méthode (*fig.* 7). BM, AN sont encore les directions des alignements ; C est leur point de rencontre. Joignez les points A et B; de C menez une droite au milieu de AB, et par le milieu B′ de CB une parallèle B′*m* à la base AB. L'intersection *m* est un point de la courbe de raccordement. Tirez B*m*, puis par le milieu *n* de BB′ une parallèle à la base B*m*, et du point B′ une droite au milieu de cette base; l'intersection de ces deux dernières droites donnera encore un point de la courbe de raccordement. Opérez de même sur le triangle *m*A′A, ce qui donnera un troisième point, et par conséquent, quatre des côtés du polygone inscrit à la courbe. On pourrait continuer à opérer de la même manière et obtenir ainsi autant de points qu'on voudra de cette courbe.

Autre méthode (*fig.* 8). Cherchez comme ci-dessus le point de

rencontre C des alignements donnés en direction B M, A N. Divisez C B et C A chacun en un même nombre de parties égales. Numérotez les points de division des deux alignements en ordre inverse. Les intersections des droites de même indice B 1 et A 1, B 2 et A 2 appartiennent à la courbe de raccordement, laquelle est alors tangente aux alignements B M, A N.

Si la courbe de raccordement a un point d'inflexion déterminé O, *fig.* 9, on fera deux fois l'opération précédente, pour O et A d'une part, puis pour O et D de l'autre, ainsi que l'indique suffisamment la *fig.* 9, *pl.* CV.

RACINES. *Procédé général d'extraction.* Pour extraire la racine $n^{ème}$ d'un nombre *entier*,

1° Partagez ce nombre en tranches de n chiffres à partir de la droite.

2° Quel que soit le nombre de chiffres conservé par la dernière tranche à gauche, cherchez la racine $n^{ème}$ la plus approchée de cette tranche, et placez ce chiffre à la droite du nombre donné en l'en séparant par un trait vertical.

3° Formez la puissance $n^{ème}$ de ce chiffre, et retranchez-la de la tranche de gauche.

4° A côté du reste, abaissez la deuxième tranche de n chiffres, et séparez-en $(n - 1)$ chiffres sur la droite.

5° Divisez ce qui reste à gauche par n fois la $(n - 1)^{ème}$ puissance du nombre déjà inscrit à la racine, le quotient ainsi obtenu est le second chiffre de la racine totale.

6° Pour le vérifier, formez la $n^{ème}$ puissance des chiffres inscrits à la racine, et retranchez-la du nombre qui les a fournis. Si la soustraction ne peut pas s'opérer, le dernier chiffre placé à la racine doit être diminué d'une unité, et l'on vérifie de nouveau. La soustraction pouvant s'opérer, on abaisse à côté du reste la tranche suivante de n chiffres, et l'on répète les opérations ci-dessus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranche à abaisser.

Si le nombre a des décimales, on ajoute d'abord à ces décimales assez de zéros pour qu'elles puissent être exactement partagées en autant de tranches de n chiffres qu'on veut avoir de décimales à la racine, et l'on opère ensuite comme ci-dessus.

Abréviation. Lorsqu'on a obtenu un nombre des chiffres de la racine au moins égal au nombre de ceux qui restent à trouver augmenté de n, il suffit alors de *diviser* simplement le reste de l'opération par n fois la $(n - 1)^{ème}$ puissance des chiffres déjà obtenus.

Fractions. La racine $n^{ème}$ d'une fraction est la racine $n^{ème}$ du numérateur divisé par la racine $n^{ème}$ du dénominateur.

Racine $n^{ème}$ d'un monome. Extrayez la racine $n^{ème}$ de son coeffi-

cient, et divisez par n l'exposant de chacun de ses facteurs algébriques. Si ces opérations ne peuvent s'effectuer, on ne peut qu'indiquer la racine du monome en en simplifiant quelquefois l'expression. Quant aux signes, les racines *paires* des monomes positifs doivent être affectées du double signe $\pm$; — celles des monomes négatifs ne sont que des quantités *imaginaires* (page 940) — les racines *impaires* des monomes positifs ou négatifs prennent le même signe que la puissance qui les donne, et il n'y a pas d'imaginaires dans ce cas. Ainsi $\sqrt[7]{-a^{14}} = -a^2$.

Racine $n^{ème}$ des polynomes. Le procédé d'extraction est parfaitement analogue à celui qui est indiqué pour les nombres, il faut seulement avoir le soin d'ordonner les termes avant de procéder à la recherche de la racine. Lorsque la quantité littérale n'est pas une puissance parfaite du degré dont on demande la racine, on ne peut plus obtenir celle-ci, et il faut se borner à en approcher d'aussi près que l'exige la question pour laquelle l'extraction est nécessaire. Pour cela, on représente la racine par une puissance fractionnaire (page 715) en ayant soin de prendre pour premier terme le plus grand terme de la quantité proposée; puis on développe la puissance fractionnaire en SÉRIE, et l'on arrête le développement à l'instant où l'on rencontre des termes négligeables. Ainsi soit $a > b$, on a

$$\sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$a^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1.b}{2.a}-\frac{1}{8}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^4}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}-\dots\right\}$$

on aurait de même

$$\sqrt[5]{a^5-x^5} = \left(a^5-x^5\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5\times1}{5}}\left(1-\frac{x^5}{a^5}\right)^{\frac{1}{5}} = a\left(1-\frac{x^5}{a^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= a\left\{1-\frac{x^5}{5\,a^5}-\frac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}}-\dots\dots\right\}$$

Cette méthode s'applique à toutes sortes de racines et à toutes sortes de quantités. Elle est très-générale mais peu commode.

Remarques relatives aux racines carrées et cubiques. Un polynome qui compte plus de trois termes ne peut être le carré d'un binome.

Aucun binome n'étant un carré parfait, on ne peut pas obtenir sa racine carrée exacte. Cependant la plupart des questions de la mécanique pratique conduisant à des expressions de la forme $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, M. *Poncelet* a recherché la valeur approchée et rationnelle de ces radicaux. Voici le tableau des valeurs de $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ces valeurs dépendent de la relation qui existe entre les grandeurs de a et de b, relation presque toujours suffisamment connue d'avance.

Relations de a et b.	Valeurs de $\sqrt{a^2+b^2}$ approchées.	Erreur maximum possible.
$a > 1\,b$	..... $0.96046\,a + 0.39783\,b$.	$\frac{1}{25}$ près.
$a > 2\,b$	..... $0.98592\,a + 0.23270\,b$.	$\frac{1}{71}$
$a > 3\,b$	..... $0.99350\,a + 0.16123\,b$.	$\frac{1}{154}$
$a > 4\,b$	..... $0.99625\,a + 0.12260\,b$.	$\frac{1}{266}$
$a > 5\,b$	..... $0.99757\,a + 0.09878\,b$.	$\frac{1}{417}$
$a > 6\,b$	..... $0.99826\,a + 0.08261\,b$.	$\frac{1}{589}$
$a > 7\,b$	..... $0.99875\,a + 0.07098\,b$.	$\frac{1}{800}$
$a > 8\,b$	..... $0.99905\,a + 0.06220\,b$.	$\frac{1}{1049}$
$a > 9\,b$	..... $0.99930\,a + 0.05535\,b$.	$\frac{1}{1428}$
$a > 10\,b$	..... $0.99935\,a + 0.04984\,b$.	$\frac{1}{1538}$ près.

Si le rapport de a et b est inconnu, on aura à $\frac{1}{6}$ près

$$\sqrt{a^2+b^2} = 0.8284\,(a+b)$$

Quant au radical $\sqrt{a^2-b^2}$ qui se présente plus rarement, on aura : a étant compris entre $1.01\,b$ et $1.02\,b$

$$\sqrt{a^2-b^2} = 6.097\,a - 6.02\,b \text{ à } \tfrac{1}{12} \text{ près;}$$

b étant compris entre zéro et $0.91\,a$

$$\sqrt{a^2-b^2} = 1.1319\,a - 0.72636\,b \text{ à } \tfrac{1}{7} \text{ près;}$$

entre $b = 0$ et $b = \frac{1}{2}a$ ou entre $a = \infty$ par rapport à b jusqu'à $a = 2\,b$

$$\sqrt{a^2-b^2} = 1.018623\,a - 0.272944\,b \text{ à } \tfrac{1}{62} \text{ près.}$$

Harros et, avant lui, *Lambert* ont démontré que a étant une valeur approchée de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre A qu'on a partagé en $a^m \pm b$, on avait avec une très-grande approximation

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a^m \pm b} = a \pm \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)\,b}$$

formule qui, pour les cas habituels où $m = 2$ et $m = 3$, prend les formes respectives

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{2ab}{4a^2 \pm b}$$

$$\text{et} \quad \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$$

Tant que deux grandeurs ab sont inégales, le radical $\sqrt{ab}$ qui est leur moyenne par quotient, est toujours moindre que leur moyenne arithmétique et d'autant moindre quelles sont plus inégales (p. 1356)

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

mais si a et b sont des nombres entiers tels que le nombre des chiffres qui expriment l'excès $(a - b)$ de a sur b soit moindre que la moitié du nombre des chiffres de b, la moyenne arithmétique ne peut pas excéder la moyenne géométrique de *un huitième d'unité*, de sorte que l'on a, dans ce cas, cette autre limite (*Lentheric*)

$$\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{1}{8}$$

Ainsi, en prenant la demi-somme de tels entiers pour la racine de leur produit, on ne se tromperait pas de un huitième d'unité.

Le théorème s'applique à deux nombres décimaux dans lesquels le nombre de chiffres décimaux serait le même, et qui, abstraction faite de la virgule, tomberaient dans le cas des deux nombres entiers dont il vient d'être question. L'excès de leur demi-somme sur la racine carrée de leur produit serait moindre que le huitième d'une unité décimale du dernier ordre.

Si l'on avait à extraire la racine carrée d'un nombre exprimé par l'unité plus une fraction décimale dans laquelle la première décimale significative serait précédée d'autant de zéros au moins qu'il y a de chiffres décimaux significatifs, on obtiendrait immédiatement cette racine avec le même degré d'approximation qu'offre le nombre proposé, en remplaçant simplement la partie décimale par sa moitié (*Gergonne*). Ainsi

$$\sqrt{1.000512} = 1.000256$$

La racine carrée de la somme ou de la différence de deux nombres m et n, dont l'un est un radical, s'obtient parfois plus facilement en prenant une quantité auxiliaire $d = \sqrt{m^2 - n^2}$ et l'on a alors

$$\sqrt{m \pm n} = \sqrt{\frac{m+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{m-d}{2}}$$

ainsi, pour obtenir $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ on ferait $m=3$; $n=2\sqrt{2}$

d'où $d=\sqrt{9-8}=1$,

et on aurait pour la racine cherchée $=1+\sqrt{2}$

On trouverait de même $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

et $\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

La racine quatrième d'un nombre A peut s'obtenir par deux extractions successives de la racine carrée $\sqrt[4]{A}=\sqrt{\sqrt{A}}$

Trois extractions successives de la racine carrée donneraient la racine *huitième* : $\sqrt[8]{A}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}}$

Et il est évident que de cette manière toute racine $(2^n)^{\text{ième}}$ s'obtient par n extractions successives de la racine carrée.

Il n'est pas moins évident que la racine sixième s'obtiendra par une extraction de la racine carrée, suivie d'une extraction de la racine cubique : $\sqrt[6]{A}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{A}}$

La racine *neuvième* s'obtiendra par deux extractions successives de la racine cubique.

Et en général, toute racine $(3^n)^{\text{ième}}$ s'obtiendra par n extractions successives de la racine cubique.

On peut donc obtenir ainsi toutes les racines dont les indices sont des puissances de 2 et de 3 ou quelques multiples de ces nombres.

Lorsqu'on n'a pas besoin d'une très-grande approximation, il est bien plus commode de faire usage des *logarithmes* pour obtenir les racines des degrés élevés (Voyez pag. 1054).

RADICAUX. L'impossibilité d'extraire dans tous les cas les racines des quantités algébriques a conduit à effectuer directement sur les quantités soumises aux signes radicaux les opérations fondamentales, et à en simplifier les résultats de manière à renvoyer l'extraction de la racine à la fin du calcul. Tel est le but du *calcul des radicaux*.

L'addition et la soustraction des radicaux à indices différents ne peuvent qu'être indiquées, ainsi :

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{a} \text{ ou en général } \sqrt[m]{a}\pm\sqrt[n]{a}$$

ne peuvent se réduire. Lorsque, au contraire, les indices et les quan-

tité sous le radical sont les mêmes, il y a lieu à réduction par voie d'addition et de soustraction :

$$5\sqrt{a}+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}=6\sqrt{a}$$

$$m\sqrt[n]{ab}+p\sqrt[n]{ab}-q\sqrt{ab}=(m+p-q)\sqrt[n]{ab}$$

On peut encore quelquefois décomposer en facteurs, qui soient les puissances exactes du même degré que le radical, les quantités que ce dernier affecte ; alors on extrait les racines de ces facteurs; elles deviennent multiplicateurs du radical, et l'on parvient à simplifier les expressions quand les radicaux ont le même indice :

$$a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\sqrt[3]{2a^6b}=(3-a)a\sqrt[3]{2b}$$

Multiplication et division. Les indices des radicaux étant de même degré, on formera le produit ou le quotient des quantités soumises aux radicaux, et on affectera ce produit ou ce quotient du radical commun

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Lorsque les indices des radicaux sont différents, on les ramène au même degré en remarquant que l'on peut multiplier ou diviser par un même nombre l'indice d'un radical, et l'exposant de la quantité soumise à ce radical

$$\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{pn}}; \qquad \sqrt[2]{a^2}=\sqrt[4]{a^4}$$

on multipliera donc les indices et les exposants de chaque quantité par le produit des indices de toutes les autres quantités, et s'il y a des nombres sous les radicaux, on élève chacun à la puissance marquée par le produit de ces indices. Ainsi :

$$\frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{3b}}=\frac{\sqrt[6]{8a^6}}{\sqrt[6]{9b^2}}=\sqrt[6]{\frac{8a^6}{9b^2}}=a\sqrt[6]{\frac{8}{9b^2}};$$

$$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^8}\times\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^{11}};$$

et

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

Remarquez que l'on peut toujours faire passer sous un radical un facteur qui est en dehors. Il suffit de l'élever à la puissance marquée par l'indice. Ainsi :

$$a\sqrt{1} = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m}$$

$$a^2 = \sqrt[5]{a^{10}} \quad \text{et} \quad 2a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{8a^3b}$$

Puissances. Si l'on élève les différents facteurs d'un produit à une même puissance, le produit se trouve élevé à cette puissance. On élèvera donc une quantité radicale à la *puissance du même exposant* en supprimant le radical. Ainsi :

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a\,; \quad (\sqrt{-a})^2 = -a \quad \text{et} \quad (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Pour élever une quantité radicale à une *puissance quelconque*, on élève à cette puissance la quantité soumise au radical, et on conserve au résultat l'indice primitif

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[3]{a}\right)^4 = \sqrt[3]{a^4}$$

Toutefois, si l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance que l'on cherche, l'opération s'effectue en pratiquant cette division

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[\frac{12}{3}]{a^2b} = \sqrt[4]{a^2b}$$

Racines. Si les exposants des quantités soumises au radical sont divisibles par le degré de la racine à extraire, on opère cette division et l'on conserve au résultat le radical primitif

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2} \quad \text{et} \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}$$

S'il n'en est pas ainsi, l'extraction s'indique en multipliant l'indice du radical par le degré de la racine à extraire, et l'on parvient quelquefois à simplifier l'expression en divisant ensuite le nouvel indice, ainsi que l'exposant de la quantité sous le radical, par un facteur commun

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4} \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[15]{a^6} = \sqrt[5]{a^2}$$

On peut, sans changer la valeur d'un radical de degré *impair*, changer le signe du radical et celui de la quantité qu'il affecte. Il n'en est pas de même pour un radical à indice *pair*

$$+\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{+a}$$

Les règles ci-dessus appliquées à des quantités *imaginaires* conduiraient à des erreurs qu'on évitera en recourant au mot IMAGINAIRES (page 940). Voyez encore l'article *Exposants* (page 715) pour la simplification de l'expression et du calcul des radicaux.

RADIERS. On appelle ainsi les revêtements factices du sol destinés à le défendre contre l'action érosive des eaux (*fig.* 1, *pl.* XXI). L'*avant*-radier est le radier d'*amont*, l'*arrière*-radier est un radier d'aval.

RAVINS. Vallons dont le fond est à sec pendant une partie de l'année, et dans lesquels les pluies, les dégels ou des fontaines intermittentes forment des cours d'eau temporaires. Les *ravines* ne sont autre chose que les sillons naturels tracés dans les terres par les eaux pluviales.

RAYONNEMENT (Voyez *Calorique*, page 187), et pour le *Rayonnement terrestre*, voyez *Chaleur terrestre*, page 272.

RÉACTIFS (*sensibilité des*). On doit à M. *Harting* d'intéressantes recherches sur le degré de sensibilité des réactifs dont je crois utile de consigner ici les résultats (*Journal Allemand de Chimie pratique* 1841).

Amidon pour reconnaître l'*iode*. Lorsqu'on ajoute une dissolution d'amidon dans l'eau chaude (empois) à celle d'un iodure métallique, si l'on verse ensuite dans la liqueur un peu d'acide nitrique, elle se colore en bleu et même en bleu noir.

Une solution d'iodure de potassium, légèrement acidulée par de l'eau régale, essayée avec une dissolution étendue d'amidon a donné un précipité noir, le reste du liquide étant d'un jaune brun, lorsqu'elle contenait de un 500ème à un 1000ème d'iode; — avec un 2000ème, le précipité est semblable et la liqueur moins colorée; — avec un 3000ème, le précipité est bleu foncé et la liqueur presque incolore; — avec un 4000ème ou un 5000ème, précipité bleu, liqueur claire; — jusqu'à un 40 000ème, même phénomène, mais le précipité est moins foncé; — entre un 50 000ème et un 60 000ème, le précipité prend une teinte violette;—avec un 100 000ème, la couche supérieure est bleu-violet, la couche inférieure violette; — avec un 120 000ème la couche supérieure est violette, la couche inférieure est rose;—avec un 150 000ème, le précipité entier est rose avec une nuance violette; — entre un 300 000ème et un 400 000ème, le précipité rose n'a plus de teinte violette; il n'avait qu'une couleur blanche, lorsque la solution ne contenait que un 550 000ème ou un 600 000ème d'iode.

L'action du réactif était immédiate lorsque la solution contenait au moins un 250 000ème d'iode; elle exigeait quelques minutes, puis quelques heures à mesure qu'elle s affaiblissait.

Pour l'acide sulfurique d'un poids spécifique =1.829, et contenant 75.83 pour cent d'acide réel.

Le sirop de violettes ne fait pas reconnaître au delà de un 250ème d'acide sulfurique tel qu'il est désigné, soit un 310ème d'acide réel.

Le papier teint avec le bois de Brésil accuse un 10 000ème d'acide, soit un 12 500ème d'acide réel.

Le papier teint avec la teinture de chou rouge rougit avec un 18 750ème d'acide réel.

Le papier de tournesol rougit à l'instant avec un 25 000ème d'acide réel, et après quelques heures il change légèrement de couleur avec un 62 500ème.

Le carbonate de potasse présente une légère effervescence avec un 310ème d'acide réel.

L'acide sulfurique libre est précipité après quelques heures par une solution concentrée de chlorure de calcium, lorsque sa solution renferme un 310ème d'acide réel.

L'acétate de plomb découvre l'acide sulfurique dans une solution qui n'en renferme qu'un 50 000ème.

Le chlorure de barium donne un précipité dans une solution contenant un 75 000ème d'acide réel.

L'acide sulfurique, combiné avec la soude, ne précipite l'acétate de plomb que lorsque la solution renferme au moins un 36 000ème d'acide réel.

Et le chlorure de barium que lorsqu'elle en contient un 45 000ème.

Pour l'acide phosphorique. Les papiers de chou rouge et de bois de Brésil accusent un 10 000ème d'acide phosphorique anhydre, et le papier de tournesol rougit après quelques heures avec un 30 000ème du même acide.

L'acétate de plomb et l'eau de chaux donnent un précipité immédiatement avec un 10 000ème d'acide phosphorique anhydre, et avec un 20 000ème au bout d'une demi-heure.

Il faut au moins un 10 000ème de cet acide pour troubler le chlorure de barium.

Pour l'acide arsénieux. Un excès d'eau de chaux produit un précipité dans une liqueur contenant un 4000ème de cet acide.

Une solution ammoniacale d'oxyde de cuivre a découvert un 8000ème. Celle de sulfate de cuivre et d'ammoniaque un 12 000ème. On observe des précipités avec ces deux réactifs dans des solutions plus étendues, mais ils n'ont plus alors leur couleur verte caractéristique.

L'acide sulfhydrique produit un précipité avec un 30 000ème.

Le nitrate d'ammoniaque et d'argent forme un précipité jaune avec un 30 000ème; dans les dissolutions plus étendues, la couleur du précipité ne se reconnaissait pas assez nettement.

Pour les alcalis libres. Le papier de curcuma découvre un 3000ème d'alcali caustique; celui de chou rouge un 7500ème. Le papier de bois de Brésil devient légèrement violet avec un 20 000ème.

Le papier de tournesol rougi par l'acide acétique prend une couleur bleue sensible avec un 80 000ème d'alcali.

Comme l'hydrate de potasse employé contenait 16 pour cent d'eau, les quantités d'alcali réel reconnues par les réactifs précédents sont un 3600ème, un 9000ème, un 24 000ème et un 95000ème.

Pour la potasse (pag. 1320). Une solution alcoolique de chlorure de platine donne un précipité dans une solution de nitrate de potasse contenant un 200ème de cette base. Une solution contenant un 205ème ne donne pas de précipité.

Une solution très-concentrée d'acide tartrique produisit un précipité avec un 220ème de potasse, mais non avec un 230ème. Ces réactifs furent essayés à la température 15° C.

Pour la chaux (pag. 302). L'oxalate d'ammoniaque produit un nuage, après quelques minutes, dans une solution de chlorure de calcium, ne contenant qu'un 400 000ème de chaux.

Pour la barite. L'acide fluo-silicique donne un léger précipité dans une solution de chlorure de barium qui contient un 3800ème de barite.

Une solution de sulfate de soude produit, au bout d'une demi-heure, un nuage dans une liqueur qui renferme un 71 000ème de barite.

Pour la magnésie (pag. 35 et 1101). Une solution de phosphate de soude indiqua en 24 heures la présence de un 200 000ème de magnésie dans une dissolution de sulfate de cette base. Le réactif doit être très-concentré, et ajouté en quantité égale à celle du liquide examiné. Ces conditions sont indispensables, et, si l'on n'y satisfaisait pas, le réactif ne pourrait indiquer la présence que de un 1000ème à un 4000ème de magnésie.

L'ammoniaque donne, après quelques minutes, un léger précipité dans une solution qui contient un 6000ème de magnésie.

Pour le protoxyde de fer. La teinture de noix de galle et une solution de ferro-prussiate de potasse acidulée par quelques gouttes d'acide hydrochlorique démontrent, après quelques minutes, la présence dans l'eau du protoxyde de fer avec un 440 000ème de sulfate de fer cristallisé.

Pour le peroxyde de fer. La teinture de noix de galle donne une couleur violette à une solution qui ne renferme qu'un 300 000ème de sulfate de peroxyde de fer.

Une solution de ferro-prussiate de potasse fait reconnaître la présence de un 420 000ème du même sel.

Pour le cuivre (pag. 483). L'ammoniaque donne, après quelques

heures, une légère couleur bleue à une solution de sulfate de cuivre qui renferme un 9400ème d'oxyde de ce métal.

Le prussiate de potasse rend évidente la présence de un 78 000ème du même sel.

Du fer poli démontre l'existence de un 125 000ème d'oxyde de cuivre (pag. 484), ou de un 156 000ème de cuivre métallique, lorsque la solution est acidulée avec une goutte d'acide nitrique.

Pour le plomb (pag. 1291 et 23). Un morceau de zinc précipite le plomb de sa solution dans l'acide nitrique, lorsqu'un 3000ème de l'oxyde s'y rencontre.

Un excès d'acide sulfurique donne un précipité dans une solution du même sel contenant un 20 000ème d'oxyde.

Le chromate de potasse trouble une liqueur qui contient un 70 000ème d'oxyde de plomb.

L'acide sulfhydrique (pag. 931) noircit une solution (probablement acide ?), qui contient un 350 000ème d'oxyde de plomb.

Pour l'argent (pag. 24 et 25). Le chromate de plomb donne un léger précipité rouge dans une solution de nitrate d'argent, qui contient un 10 000ème d'oxyde. Aucune action ne se manifeste, si elle n'en renferme qu'un 20 000ème.

L'arsénite de potasse donne un précipité jaune bien prononcé avec un 6000ème d'oxyde d'argent, mais non avec un 20 000ème.

L'iodure de potassium indique la présence de un 4000ème du même oxyde. Il est sans action avec un 30 000ème.

L'acide sulfhydrique précipite une solution qui ne contient qu'un 35 000ème d'oxyde d'argent.

Le chlorure de sodium trouble une liqueur qui n'en renferme qu'un 240 000ème.

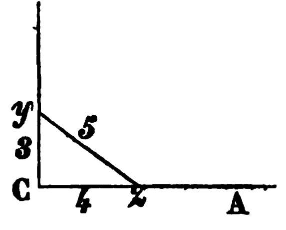
RECONNAISSANCES. Voir le terrain, le *rapporter* avec promptitude, en évaluer rapidement les ressources, tel est pour le militaire comme pour l'ingénieur l'objet d'une *reconnaissance*; leurs points de vue, seuls, diffèrent.

Reconnaissance du sol. Elle exige des opérations plus rapides qu'exactes, et ne comporte guère que l'emploi de cordeaux et de jalons; celui du *sextant* de poche (pag. 975) la facilite quelquefois en l'abrégeant ; mais c'est ici surtout qu'il faut se défendre de céder au goût d'une perfection intempestive. J'indique quelques opérations fondamentales.

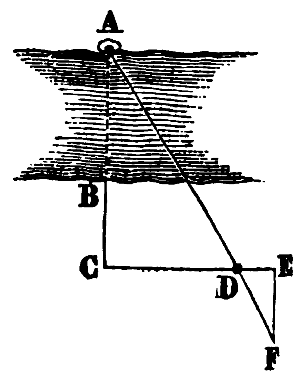
A l'aide d'un cordeau, mener sur le terrain au point donné C *une perpendulaire à l'alignement* AC.

Divisez le cordeau en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 3, 4 et 5. Tendez la partie 4 du point donné C

vers le piquet x sur l'alignement donné CA. Tendez les parties 3 et 5 fixées respectivement en C et x, et à leur point de division y, fichez dans le terrain un troisième piquet y. L'alignement Cy est perpendiculaire à AC, ou l'angle C est droit, car le carré de l'hypoténuse $5^2 = 3^2 + 4^2$ (*Géom.*, B. 29).



Mesurer la largeur AB *d'une rivière*. En A, est un objet remarquable, tel qu'un arbre, un buisson, une pierre. A la ligne AC perpendiculaire au fil de l'eau, on mène une perpendiculaire CD égale à la moitié à peu près de CA. On prolonge l'alignement CD de DE = à peu près $\frac{1}{2}$ CD. On plante un piquet en D. Au point E, on mène un alignement perpendiculaire à CE, et l'on s'éloigne sur cet alignement en reculant jusqu'à un point F pour lequel le piquet D masque le milieu de l'objet A. Mesurant CD, DE, EF et BC, on a évidemment



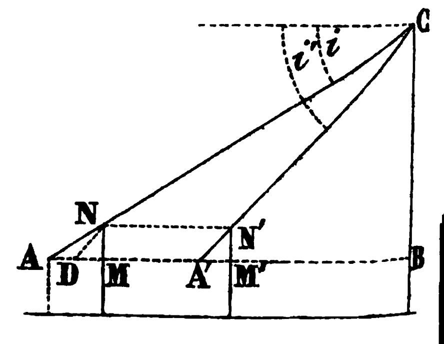
$$DE : EF :: CD : CA = \frac{EF \times CD}{DE} \quad \text{et} \quad AB = CA - CB$$

Ainsi soit $BC = 4^m$, $CD = 30^m$, $DE = 20^m$, $EF = 45^m$, on a $CA = \frac{135}{2} = 67^m.50$ et pour la largeur

$$AB = 67^m.5 - 4 = 63^m.5$$

A l'aide de jalons, prendre une hauteur quand on ne peut approcher du pied B *de l'axe vertical* BC *qui passe par le sommet* C.

En un point A d'une horizontale parallèle au terrain, déterminez à l'aide d'un jalon vertical MN un triangle rectangle vertical AMN dont l'hypoténuse prolongée passe par le sommet C. Prolongez AM sur le terrain jusqu'en un point M' pris dans le plan du premier triangle et tel que le jalon vertical M'N' = MN



détermine un nouveau triangle A′M′N′ dont l'hypoténuse prolongée A′N′ passe aussi par le sommet C. Mesurez AM, AA′ et A′M′. Remarquez qu'en superposant A′N′M′ sur ANM, on déterminerait un triagle AND semblable à ACA′. Donc BC = hauteur cherchée devient

$$\text{hauteur BC} = \frac{MN \times AA'}{AD}$$

formule dans laquelle AD et AA′ sont la différence des bases, MN et BC les hauteurs respectives des petits et des grands triangles.

Si l'on était muni du sextant de poche (pag. 973), on se contenterait de prendre les angles de hauteur $i = BAC$ et $i' = BA'C$ aux point A et A′ de la même horizontale, et l'on aurait très-simplement la hauteur BC en divisant AA′ par la différence des cotangentes de hauteur (pag. 892)

$$BC = \frac{AA'}{\text{cotang.}\, i - \text{cotang.}\, i'}$$

Ainsi soit $AA' = 93^{\text{mèt.}}$, $i = 33°\,20'$; $i' = 55°\,54$, on aurait

$$\text{cotang.}\, i - \text{cotang.}\, i' = 1.5204261 - 0.6770509 = 0.8433752$$

pour le diviseur de 93, ce qui donnerait pour quotient la hauteur $BC = 110^{m}.27$. Il faut bien se garder ici de l'emploi des logarithmes.

Réciproquement, d'un sommet C dont l'élévation BC au-dessus de la plaine AB serait connue, on mesurerait avec assez d'approximation, sans qu'il fût nécessaire de s'y transporter, la distance horizontale de deux points A, A′ à l'aide des angles de dépression (pag. 513) de ces points, car

$$AA' = BC\,(\text{tang.}\, ACB - \text{tang.}\, A'CB)$$

Ainsi soit $BC = 120^{m}$; $i = 25°\,30'$ ou $ACB = 64°\,30'$

$i' = 57°$ ou $A'CB = 33°$, il vient

$$(\text{tang.}\, 64°30 - \text{tang.}\, 33°) = 2.0965436 - 0.6494076 = 1.447136$$

différence qui, multipliée par BC = 120, donne la distance cherchée $AA' = 173^{m}.66$.

On remarquera que, si l'on connaissait la distance horizontale AB de la station A au pied B d'un sommet C, et qu'on pût relever de A l'angle de hauteur $i = BAC$, on aurait *à très-peu près :*

hauteur $BC = \frac{1}{5} AB$ si $i = 11° 19'$ et $\frac{2}{5} AB$ si $i = 21°.48$

$\frac{3}{10} AB$ si $i = 16° 42'$ et $\frac{1}{2} AB$ si $i = 26°.34$

$\frac{3}{5} AB$ si $i = 30°.58'$ et $\frac{7}{10} AB$ si $i = 35°$

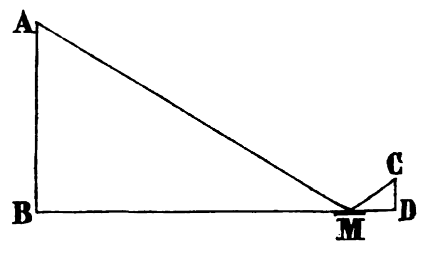
$\frac{4}{5} AB$ si $i = 38°.40'$ et

$1 \times AB$ exactement si $i = 45°$

Réciproquement, connaissant la hauteur BC, on obtiendrait la distance horizontale AB.

Et l'on pourra souvent fixer l'instrument qui donne les angles sur une des valeurs ci-dessus de i, puis avancer de A vers B ou s'éloigner de B vers A jusqu'à ce que BC intercepte cette valeur de i. On en conclura soit AB, si l'on connaît BC, soit BC, si l'on connaît AB.

Hauteurs, distances. On peut encore, au moyen d'un miroir M, ou du petit horizon artificiel (pag. 974) qui accompagne le sextant de poche, déduire une distance horizontale BM de la connaissance d'une hauteur AB ou réciproquement obtenir la hauteur AB lorsqu'on connaît la distance BM.



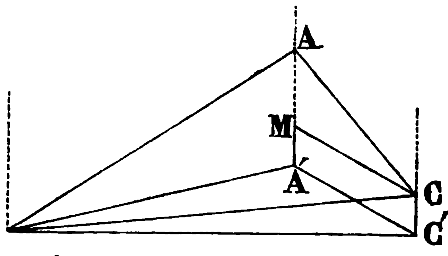
Il suffit, après avoir calé le miroir de manière à le rendre parfaitement horizontal, de cheminer dans la direction BM jusqu'à un point D sur la verticale duquel l'œil placé en C aperçoive la sommité A par réflexion. (Une petite quantité de mercure versée dans un godet est un excellent miroir qui se dispose de lui-même horizontalement.) On mesure MD et DC avec un double mètre, et comme, par hypothèse, on connaît AB ou BM, on a

$$AB = BM \times \frac{DC}{MD} \quad \text{et} \quad BM = AB \times \frac{MD}{DC}$$

On peut, avec quelques précautions, déterminer ainsi les grandes différences de niveau avec une passable exactitude.

Mesure des bases et des triangles horizontaux par des différences de niveau.

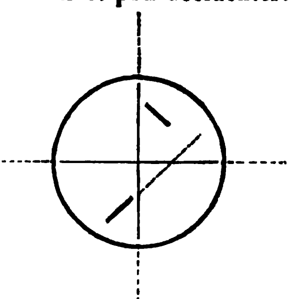
Soient maintenant A, B, C trois sommets dont on connaît les différences de niveau AA', AM. Si des points A, B, C on prend,



en outre, les angles que les rayons visuels forment avec le fil à plomb, on détermine facilement les triangles verticaux A A′ B, A C M et B C C′. Connaissant alors les trois côtés A′ C′, B C′ et A′B du triangle horizontal, il est facile de le construire.

Cette méthode est surtout commode dans les pays de montagne; elle est d'autant moins inexacte que les différences de niveau sont plus considérables.

En donnant à l'*équerre à réflexion*, pag. 976, la disposition suivante, on en fait un instrument qui facilite beaucoup les levés expéditifs et la reconnaissance des pays découverts et peu accidentés.



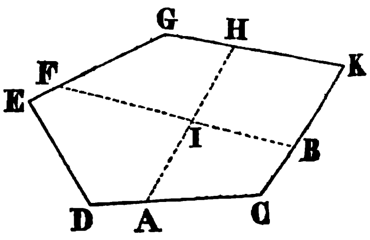
A droite et à gauche de l'axe optique ou de l'un des axes optiques d'une simple équerre d'arpenteur, fixez deux petits miroirs verticaux formant chacun avec cet axe un angle de 45° ; disposez-les de manière que le plan du miroir le plus rapproché de l'œil, et que je suppose à gauche, passe en deçà du miroir qui est à droite, et que les miroirs laissent entre eux dans la direction des pinnules l'intervalle nécessaire pour prendre la direction de la base; opérez par la méthode générale (pag. 1032, § 51). A mesure que l'équerre cheminera sur cette base, chacun des deux miroirs réfléchira tous les objets latéraux au moment même où l'instrument se trouvera parvenu au pied de la perpendiculaire qui serait abaissée de l'objet sur cette base : les différents points des deux bases d'où l'observateur apercevra les objets seront donc les intersections des coordonnées qui déterminent leur position.

L'observateur peut ainsi parcourir très-rapidement les deux bases en laissant à chaque point des piquets marqués par des numéros pairs pour les objets de droite et impairs pour ceux de gauche. Il reviendra ensuite prendre les distances à l'origine des coordonnés ou il les fera prendre par ses porte-jalons, pourvu qu'il puisse les contrôler les unes par les autres.

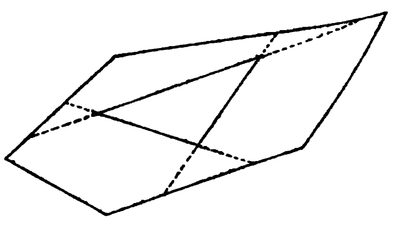
Cette méthode ainsi que l'instrument sur lequel elle se fonde, et qui diffère de l'équerre à réflexion de *Lypkens* (pag. 976), ont été proposés l'un et l'autre par feu *Allent* dans un petit chef-d'œuvre, et comme fond et comme style, publié dès 1803 par cet officier, sous

le titre d'*Essai sur les reconnaissances militaires*. Je dois à ce beau mémoire une partie des moyens expéditifs que j'indique pour obtenir le canevas des reconnaissances.

Déterminer par des jalons la position de points intérieurs (tels que I) à un polygone dans lequel on ne peut pénétrer. D'un point A quelconque du périmètre, dirigez un rayon visuel sur I, et faites marquer le point H où ce rayon coupe le côté GK. D'un autre point B, pris sur un autre côté KC, répétez la même opération, ce qui donnera encore un point F. Mesurez les distances des points B, A, F, H aux angles les plus voisins. Rapportez ces quatre points sur la carte, ils y serviront deux à deux à construire les transversales dont l'intersection détermine le point I.



Lorsqu'il faut reconnaître un grand nombre de points, on les considère comme formant deux à deux des droites et trois à trois des triangles dont les prolongements coupent en deux points les côtés du polygone de circonscription. Six points ainsi déterminés sur ce périmètre suffisent à la construction d'un triangle intérieur, ainsi que l'indique la figure.



On trouvera encore aux articles *Distances* (pag. 537), *Dépression* (pag. 513), *Géométrie* P (pag. 881 et suiv.), *Levés de terrains* (pag. 1013), *Nivellement* (pag. 1201), quelques méthodes expéditives pour obtenir les distances horizontales et les différences de niveau avec l'approximation que comporte une reconnaissance de la surface.

S'il existe une bonne carte du pays qu'on explore, on lui emprunte, en l'agrandissant, le canevas de la reconnaissance, dont l'échelle ne devra jamais être au-dessous du millième, et, après en avoir fait par les méthodes précédentes la vérification partielle et y avoir placé les points intéressants qui n'y figuraient pas, on aura un tableau suffisamment fidèle des accidents du sol, ainsi que de ses ressources en pierres, en bois, en chaux, en matériaux de construction de tous genres, et même des distances et des obstacles qu'ils auraient à franchir pour arriver à pied d'œuvre, si l'on avait quelque construction ultérieure en projet.

Cours d'eau. Il conviendra alors d'étudier les cours d'eau quant

à leur profondeur, quant à leurs volumes, quant à leurs chutes, quant au *travail* qu'ils pourront laisser disponible suivant les saisons. Sont-ils flottables, navigables (pag. 446)? La méthode des flotteurs (pag. 451) ou l'emploi du tube de *Pitot*, suffiront pour déterminer les vitesses, et quelques sondages, rapprochés, de la largeur du cours d'eau, donneront son débit à l'époque de la reconnaissance. Les renseignements locaux, prudemment contrôlés les uns par les autres, basés sur les traces laissées aux rives, compléteront les connaissances relatives à son état dans les diverses saisons, à l'époque, aux effets et à la durée des crues ou de l'étiage.

Mines. Le terrain recèle-t-il des mines? Si elles ont été exploitées, en examiner alors très-attentivement les déblais; consulter les anciens mineurs, mais se méfier de l'exactitude des renseignements locaux, toujours dictés par l'intérêt de voir renaître pour celui-ci une entreprise de transports, pour celui-là un cabaret; ne pas oublier que la plupart des gîtes abandonnés ont été très-complétement exploités par les anciens; tâcher de suivre les affleurements des filons (pag. 758), et rapporter avec soin leur direction sur la reconnaissance.

Si l'on a à reconnaître chimiquement quelques substances minérales, l'officine du pharmacien du canton fournira presque toujours les réactifs nécessaires, ainsi que les ustensiles qu'exigent de simples analyses qualitatives. Si j'en crois ma propre expérience, j'ajouterai qu'on y trouvera de plus la complaisance et le bon vouloir qu'inspire une communauté d'études scientifiques. La forge du maréchal permettrait, au besoin, quelques essais par la voie sèche (pag. 27).

Forêts. Indiquer leurs essences.—Et, si le temps le permet, étudier quels bois seront propres à la charpenterie, à la menuiserie, au charronnage, à l'ébénisterie (pag. 151), au chauffage ou à la carbonisation (pag. 567 et suivantes)? Pourront-ils être flottés (*)? La contrée fournira-t-elle les bûcherons, les scieurs de long, les charbonniers et les animaux de trait nécessaires à l'exploitation? —A quels prix?—Remarquer que le nombre, le diamètre, la hauteur moyenne et l'état de conservation des arbres, sont une constatation bien plus importante que l'étendue du sol forestier, qui, seule, n'apprend rien. Un mode expéditif de reconnaissance qui convient aux futaies, consiste à traverser la forêt suivant toutes

(*) Question *de détail* que les capitalistes qui exploitèrent la Corse, vers 1839, ne s'étaient même pas adressée. D'immenses forêts de *chêne-yeuse* avaient été acquises dans la vallée de l'*Ortolo*, en vue d'en *flotter* les produits sur ce torrent, de la montagne jusqu'à la mer. On s'aperçut, en arrivant sur les lieux que, même après six mois de coupe, le *chêne-yeuse* pesait encore 1260 kil. le mètre cube, et ne pouvait dès lors être flotté (pag. 162).

sortes de lignes brisées en mesurant au cordeau métrique les *entre-axes* d'un arbre à l'arbre suivant, opération qui n'exige qu'un seul aide pour tenir le bout de la mesure. On a bientôt ainsi un très-grand nombre d'entre-*axes*, d'où l'on conclut la distance moyenne d'un arbre à l'autre, puis le nombre d'arbres par hectare. On remarque et on prend note, d'un même coup, de la hauteur moyenne et du diamètre des arbres. J'ai pu reconnaître ainsi, en quelques journées, la forêt de *Marmano* située dans le haut *Fiumorbo* (Corse), et réduire à 170 arbres par hectare le chiffre de 4 à 500 qu'on lui accordait sur la foi de renseignements locaux très-concordants, contrôlés par les relations de voyageurs romanesques.

Généralités. Enfin, si la durée de la reconnaissance n'est pas trop limitée, l'ingénieur pourra peut-être recueillir encore quelques données :

Sur les prix des journées, mais elles n'auront d'utilité qu'autant que ses observations personnelles lui auront permis d'en rapprocher la quantité de *travail fait;*

Sur les ressources locales en *subsistances*, et eu égard à la qualité, à la quantité, et surtout aux prix probables, alors qu'un personnel d'ouvriers plus ou moins nombreux aura pu être amené sur les lieux;

Sur les prix des *transports*, et les saisons pendant lesquelles ils pourront être effectués avec le plus de promptitude et d'économie; ne pas oublier que, pour certaines localités, l'hiver, contrairement aux indications de ce qu'on appelle le bon sens, sera parfois la saison propice, parce que la suspension des travaux agricoles laissera alors disponibles les bêtes de somme et de trait, les chariots et ceux qui les possèdent.

Enfin, c'est en ayant toujours en vue le *but* de la *reconnaissance* que l'ingénieur découvrira de jour en jour et les *sujets* à observer, et jusqu'aux *moyens* d'observation.

J'indiquerai, non certes comme un modèle du genre, mais du moins comme un consciencieux essai, la *reconnaissance* de l'île de *Corse*, que j'eus pour mission d'étudier, en 1838 et 1839, aux points de vue métallurgique et forestier. Le *Moniteur industriel* de 1840, le *National*, et quelques autres journaux, ont bien voulu reproduire ce petit écrit.

RÉFLEXION et **RÉFRACTION**. (Voyez *Lumière*, pag. 1071 et 1073.)

REFROIDISSEMENT. (Voyez *Calorique*, pag. 196.)

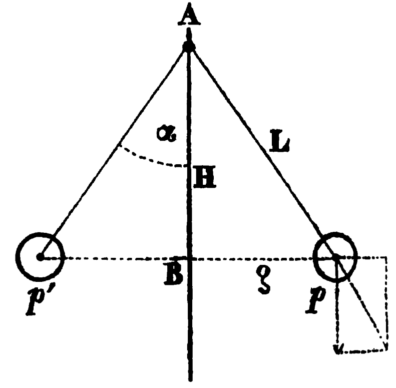
RÈGLE A CALCUL. Instrument plus ingénieux qu'utile, dont l'invention remonte à *Gunter*, professeur d'astronomie au collége

de *Gresham* (année 1625). En lui rendant le nom *d'échelle logarithmique* qu'elle porta dès l'origine, on indiquera suffisamment le principe sur lequel elle est fondée. A l'aide d'une *coulisse* convenablement divisée, qui sort plus ou moins du corps de la règle portant lui-même des divisions logarithmiques, on parvient à ajouter ou à retrancher matériellement des longueurs proportionnelles aux *logarithmes* des nombres (pag. 1052), et l'on obtient ainsi par addition et soustraction, ou mieux par allongement et retranchement, les produits ou les quotients de ces nombres. On réduit aujourd'hui le corps de la règle à la longueur portative de $0^m 25$, et les divisions sont encore assez distinctes pour permettre d'effectuer, avec une approximation souvent suffisante, les multiplications de trois chiffres par trois chiffres au plus. *Wingate, Milbourn, Oughtred, Leybourn, Robertson*, etc., en Angleterre, *Sauveur, Lemonnier*, etc., en France, ont successivement cherché à étendre et à vulgariser l'emploi de la règle à calcul, mais sans succès durable; et l'instrument était encore retombé dans l'oubli, lorsque, vers 1820, M. *Jomard* essaya de nouveau de le réhabiliter. Enfin, depuis une dizaine d'années, M. *A. Morin* tente, par un effort suprême, de ressusciter encore une fois *l'échelle de Gunter*, et il est, du moins, parvenu à en rendre l'usage obligatoire dans quelques écoles publiques. Il semble que si l'on y prescrivait en même temps l'emploi du *compas de proportion* qui était fort à la mode dans le dernier siècle, et dont l'invention paraît due au grand *Galilée*, sinon à son élève *Balthazar Capra*, on parviendrait ainsi à matérialiser à la fois et le calcul et la géométrie, on substituerait plus sûrement l'adresse manuelle à l'intelligence, et le mécanisme à l'entendement, ce qui paraît être le but de ce que l'on appelle en France l'enseignement *pratique*.

RÉGULATEUR *à force centrifuge*. Sorte de *pendule conique*, depuis longtemps employé dans les moulins pour régulariser plus ou moins efficacement le mouvement des meules, ou l'ouverture des vannes. *Watt*, en introduisant dans le mécanisme de sa machine à vapeur cet appareil bien connu avant lui, lui a donné une célébrité que ses qualités propres ne lui auraient point acquise; car il a le défaut grave de fonctionner toujours trop tard.

Pendule conique. Imaginons une tige rigide et verticale AB, tournant par un moyen quelconque autour de son axe, d'un mouvement uniforme; — à son sommet A une articulation ou charnière, portant deux tiges égales et roides Ap Ap' dont on négligera le poids, et terminées par deux points matériels également pesants p et p'. Et cherchons d'abord quel angle α chacune des tiges formera avec la verticale AB, lorsque la vitesse angulaire du système aura atteint une valeur déterminée ω. p est le poids de

chacun des points pesants, L la distance constante de son centre à l'articulation A, H et ρ sont les projections verticale et horizontale de la longueur L correspondantes à l'angle α.



L'appareil ayant pris la disposition qui convient à sa vitesse angulaire ω, chacun des points pesants est, à cet instant, en équilibre sous l'action simultanée des trois forces suivantes, savoir : 1° son poids p qui agit verticalement; 2° la force centrifuge horizontale de ce point matériel, qui est (pag. 808) égale à $\frac{p}{g}\omega^2\rho$; 3° la tension T de la tige L nécessairement dirigée suivant sa longueur. Puisqu'il y a équilibre, l'une quelconque de ces forces est la résultante des deux autres; et comme, tant en direction qu'en intensité, ces forces sont entre elles respectivement comme les côtés $AB = H$, $Bp = \rho$ et $Ap = L$ du triangle ABp, on a :

$$\frac{p}{g}\omega^2\rho : \rho :: T : L \qquad \text{et} \qquad T : p :: L : H$$

d'où

$$T = \frac{p}{g}\omega^2 L = \frac{p}{\cos.\alpha} = p\,\frac{L}{H}$$

et enfin

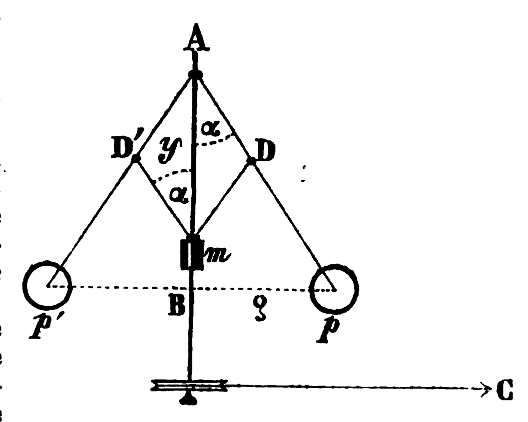
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos.\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{H}} \qquad \text{ou} \qquad \cos.\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}$$

$$\text{et} \quad H = \frac{g}{\omega^2}$$

Si l'on désigne par t la durée en secondes d'*une* révolution du système, on aura, puisque le mouvement est supposé uniforme,

$$\frac{2\pi}{t} = \omega \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos.\alpha}{g}}$$

de sorte que la *demi-révolution périodique s'accomplit en une durée égale à celle de l'oscillation d'un pendule simple* (pag. 1253), *qui aurait pour longueur la projection verticale* H de l'une des tiges L; et cette durée ne dépend point du rayon du cercle horizontal décrit par le point matériel. Il en résulte que des pendules coniques simples, de longueurs très-différentes L, L', L'' accompliraient leur révolution périodique dans un même temps, s'ils avaient tous une même projection verticale $H = L\cos\alpha = L'\cos.\alpha' = L''\cos\alpha''$.



Articulons maintenant deux nouvelles tringles $Dm = D'm = D'A = DA = b$ sur celles du pendule conique précédent, et supposons que ces tringles sans masse se réunissent sur une autre articulation fixée à un petit manchon m, qui peut lui-même glisser librement le long de la tige verticale AB. Si, par une cause quelconque, la vitesse angulaire ω du système diminue ou augmente, le manchon m descendra ou montera le long de la verticale AB. Et l'on conçoit facilement comment à l'aide d'un levier, par exemple, on pourra transmettre les mouvements du manchon, soit à une vanne de roue hydraulique, soit à la soupape d'admission d'une machine à vapeur, et augmenter ou diminuer ainsi le débit du fluide moteur à mesure que le mouvement de la machine tendra à se ralentir ou à s'accélérer; ce qui le ramènera plus ou moins promptement à sa vitesse moyenne ou de régime. Un cordon sans fin C, conduit par la roue hydraulique ou la machine à vapeur, embrasse une poulie montée sur l'axe tournant AB, et transmet à cet axe un mouvement angulaire qui est dans un rapport constant avec celui du moteur que l'on veut régulariser.

Cela posé, soit R' la somme des forces nouvelles introduites dans le système par la résistance verticale que le manchon m devra surmonter, et supposons d'abord que le mouvement du manchon, quand il naîtra, aura lieu de bas en haut. Pour que la résistance R' puisse être vaincue, sans que α ait varié, il faudra que la vitesse angulaire du système ait pris une nouvelle valeur ω', telle que la force centrifuge qui en résultera, fasse équilibre sur le système à à cette résistance R' et à toutes les autres. En d'autres termes, et y étant la valeur de la distance Am correspondante à α et ω, il faudra que le travail élémentaire de la force centrifuge des deux balles égale la somme de tous les travaux résistants. Or, la somme des forces centrifuges des deux balles est

$$\frac{2p}{g}\omega'^2 \rho = \frac{2p}{g}\omega'^2 L \sin.\alpha$$

L'arc élémentaire décrit de bas en haut par chacune des deux balles est $Ld\alpha$, et le chemin décrit dans la direction propre de la force

centrifuge est la projection horizontale de celui-ci ou $L\,d\alpha.\cos.\alpha$. Ainsi le travail moteur élémentaire des forces centrifuges devient

$$\frac{2p}{g}\,\omega'^2\,L\sin.\alpha\,L\cos.\alpha\,d\alpha = \frac{2p\,\omega'^2\,L\sin.\alpha\,d\alpha}{\omega^2}$$

La hauteur verticale dont chaque balle s'élève est la projection verticale $L\,d\alpha\sin.\alpha$ de l'arc élémentaire qu'elle tend à décrire, et dès lors $2pL\sin.\alpha d\alpha$ est le travail résistant dû à leur ascension; quant au travail résistant du manchon, il est évidemment $R'dy$ et comme dans le système de la figure

$$y = 2b\cos.\alpha \quad \text{et} \quad -dy = +2b\sin.\alpha\,d\alpha$$

on a pour ce travail $\quad R'\,dy = 2R'\cdot b\sin.\alpha\,d\alpha,$

Egalant le travail moteur à la somme des travaux résistants, remarquant que tous les termes sont divisibles par $2\sin.\alpha d\alpha$, il vient :

$$\frac{p}{g}\,\omega'^2\,L^2\cos.\alpha = \frac{p\,\omega'^2\,L}{\omega^2} = p\,L + R'\,b$$

d'où $$p = \frac{b\,R'\,\omega^2}{L\,(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{b\,R'\,\omega^2}{L\,(\omega' + \omega)(\omega' - \omega)}$$

formule qui permettra de régler passablement le poids p de chaque boule qui assurerait le mouvement ascendant du manchon coïncidemment avec un excès déterminé $(\omega' - \omega)$ de la vitesse angulaire du système, lorsque la résistance R' sera connue. Appelant R_1 la résistance que le manchon éprouvera lorsque son mouvement aura lieu de haut en bas, et qui pourrait être différente de R'; remarquant que, pour le cas de ce mouvement, c'est le travail dû à la descente des boules qui devient le travail moteur; raisonnant d'ailleurs comme ci-dessus, on obtient, en désignant par ω_1 la valeur à laquelle la vitesse angulaire s'abaissera,

$$p' = \frac{b\,R_1\,\omega^2}{L\,(\omega^2 - \omega_1{}^2)} = \frac{b\,R_1\,\omega^2}{L\,(\omega + \omega_1)(\omega - \omega_1)}$$

Cette autre valeur du poids qu'il convient de donner à chaque boule, ne sera rigoureusement égale à p que dans le cas où l'on aurait $R_1(\omega'^2 - \omega^2) = R'\,(\omega^2 - \omega_1{}^2)$ et la supposition $R_1 = R'$ ne rendrait elle-même $p = p'$ qu'à la condition $2\omega^2 = \omega'^2 + \omega_1{}^2$. On voit même facilement que R_1 étant toujours supposé $= R'$ on aurait $p < p'$ pour des écarts égaux $\omega - \omega_1 = \omega' - \omega$ de la vitesse angulaire de régime ω, ou en faisant cette vitesse $\omega = \frac{\omega' + \omega_1}{2}$ c'est-à-dire moyenne entre les vitesses extrêmes. Le poids des

boules ne pouvant recevoir deux valeurs différentes, la pratique ramène ces deux valeurs à une seule en disposant sur le levier conduit par le manchon un contre-poids qui rende possible l'équation ci-dessus :

$$\frac{R_1}{R'}=\frac{(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega'^2-\omega^2)}=\frac{(\omega+\omega_1)(\omega-\omega_1)}{(\omega+\omega')(\omega'-\omega)}$$

On trouvera, dans les cahiers lithographiés de M. *Poncelet*, des considérations très-intéressantes et très-étendues sur la théorie générale de ces mécanismes.

RELIEF DU TERRAIN. 1. La plupart des travaux, dont les ingénieurs peuvent être chargés, exige une connaissance exacte et préalable du *relief du terrain.*

2. *Le principe*, à l'aide duquel on exprime ce relief sur les plans, attribué par quelques-uns à l'ingénieur genevois *Ducarla*, paraît cependant dû à *Buache* (Voyez *Mémoires de l'Académie*, 1752).— Pour bien saisir l'esprit de la méthode, on peut imaginer que la mer baigne d'abord le point le plus bas du terrain à lever ;—puis, que son niveau s'élève brusquement mais successivement de hauteurs toujours égales, à partir du point le plus bas, jusqu'à ce qu'il ait atteint la plus haute sommité.

Dans cette hypothèse, chaque niveau de la masse liquide coupera le terrain suivant une ligne dont tous les points seront de niveau entre eux, et de l'ensemble de ces sections de niveau *équidistantes* naîtra un système de *courbes de niveau* dont tous les points appartiennent au terrain, et qui en caractériseront parfaitement le relief dès que la distance constante de deux niveaux successifs, ou ce que l'on appelle l'*équidistance* sera indiquée ou connue. Ce sont ces courbes de niveau que l'on trace sur les plans.

Application. Les *fig.* 1 et 2 de la *pl.* CVI montrent l'application du principe à des corps géométriques : le cône et la demi-sphère, et les *fig.* 3, sont des applications du même principe à un relief tel qu'on en a le plus ordinairement à figurer ; enfin, la partie à droite de la *pl.* CVII est une autre application sur une grande échelle.

3. *Pour obtenir la hauteur d'un point quelconque d du terrain* (*fig.* 3, *pl.* CVI), au-dessus de la courbe inférieure $aqhi$ dont le plan sert de point de départ, et que l'on numérote alors o, il suffira donc de compter le nombre de courbes depuis et y compris celle qui passe par le point d jusques et y compris celle qui précède la courbe *zéro*, puis de multiplier ce nombre par l'*équidistance*, laquelle est toujours indiquée sur le plan.

Si le point est situé entre deux courbes horizontales, on fait passer par ce point une petite ligne, normale tant à la courbe supérieure qu'à la courbe inférieure ; on divise cette normale en dix

parties égales, et on compte le nombre des divisions depuis le point jusqu'à la courbe immédiatement inférieure, ce qui donne les dixièmes de l'*équidistance*.

4. Les points *culminants* comme *s*, même figure, exigent des *cotes* particulières que l'on écrit toujours sur le plan, d'abord à cause de l'importance de ces points, ensuite parce qu'il est bien rare qu'ils correspondent juste à une *équidistance*.

5. *Pentes*. On voit d'ailleurs facilement que si l'on divise l'équidistance ε par l'intervalle *d* compris sur le plan entre deux courbes consécutives, on a pour quotient la tangente de l'angle de pente *i* en cet endroit du terrain, car $\varepsilon = d \tan i$; et en recourant à la table (pag. 892) on trouve cette pente en degrés et minutes s'il est nécessaire.

6. *Pour obtenir une coupe du terrain suivant des directions quelconques abcsefgh* (*fig.* 3, *pl.* CVI), l'équidistance ε étant connue, on portera sur une horizontale AH une distance $Ab' =$ l'intervalle *ab* déterminé sur le plan par l'intersection de la surface sécante avec les courbes qui passent par ces points *a* et *b*. Au point *b'*, on élèvera une ordonnée *b'* B égale à l'équidistance constante ε, puis par l'extrémité B de cette ordonnée on tirera AB. Par le même point B de la coupe on conduira une parallèle à AH sur laquelle on prendra $Bc' = bc$ du plan; par *c'* on élèvera une perpendiculaire à B*c'* encore égale à l'équidistance $\varepsilon = c'C$, et l'on joindra encore les points B et C. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait placé le point D de la coupe, et pour y placer le sommet *s*, il est clair qu'on ne devra donner au triangle D*s'*S que la hauteur *s'*S qui, pour ce seul point, pourra n'être qu'une fraction de l'équidistance ε, toujours connue par la cote de ce point écrite en chiffres sur le plan. Ainsi, et sans détailler plus longuement la construction de la coupe d'après le plan, on voit qu'on l'obtiendra en faisant en sorte que chacun des triangles partiels de la coupe : 1° soit rectangle; 2° ait une hauteur constante égale à l'équidistance ε; 3° ait pour base la distance des points où la surface sécante rencontre deux courbes consécutives. Les sommités *s* seules peuvent donner lieu à des triangles dont la hauteur *s'*S soit une fraction de l'équidistance ε.

Remarques. On peut remarquer dans ce mode ingénieux de représentation, que :

7. Toutes choses égales d'ailleurs, plus la distance entre deux courbes quelconques est faible, plus la pente est forte. Ainsi (*fig.* 3), pour descendre du sommet du mamelon jusqu'à son pied, le chemin le plus long, et dès lors le moins rapide, est *sdcba*, le plus court et le plus roide est *snopq*.

8. Dans les *reliefs*, toute courbe fermée appartient à des points de niveau plus élevés que ceux d'une autre courbe fermée qui en-

veloppe la première ; *leof* enveloppante est plus bas que son enveloppée *dnem*.

9. L'inverse a lieu pour les *creux ;* et pour qu'on ne confonde pas les saillies avec les excavations, il convient en général d'inscrire sur le plan les cotes de hauteur des courbes extrêmes.

10. Lorsque les courbes ne sont point fermées, on éprouve quelquefois de l'embarras pour distinguer si le terrain est en relief ou en creux. Les cotes extrêmes ôtent toute incertitude à cet égard, mais à défaut de ces cotes, les cours d'eau suffisent le plus souvent. Ainsi (*fig.* 4) *m'n'p'* est plus élevée que son enveloppante *mnp*; c'est exactement le contraire qui a lieu (*fig.* 5); les cours d'eau SO montrent clairement en effet le sens de la pente dans l'une et l'autre figure.

11. Quelques exercices, au reste, mettent bientôt les jeunes gens en état de lire les plans, et ils distinguent alors sans aucun effort toutes les particularités d'un terrain.

Ainsi (*fig.* 6, *pl.* CVI), P est un petit *col* entre deux mamelons N, Q ; et le premier mamelon Q est plus élevé que N au-dessus du point P ; et, comme l'indiqueraient les coupes que l'on pourrait faire suivant XPY et UPM, P est le point le plus bas de cette sommité dans le sens XPY et le plus haut de la section UPM. Cela est évident indépendamment de toutes cotes et de toutes coupes.

12. *De l'équidistance.* Il paraît d'ailleurs que le relief du terrain sera d'autant plus rigoureusement et fidèlement accusé, que les courbes seront plus multipliées ou que l'équidistance sera plus petite. En général, cette équidistance varie suivant l'échelle du plan, suivant le but de son levé, et surtout en raison des formes du terrain, mais elle doit toujours être la même pour toutes les parties d'un même plan. L'équidistance est habituellement de $2^{m}.50$ pour les plans à l'échelle de un 5000ème. On la porte au double pour l'échelle moitié moindre ou un $10\,000^{ème}$.

13. *Lignes de plus grande pente.* Ainsi les *courbes de niveau* donnent, avec toute l'exactitude désirable, les hauteurs ou les pentes absolues ou relatives que l'ingénieur a besoin de comparer à chaque instant pour bien asseoir ses projets. Toutefois, il faut en convenir, ce mode de représentation est peu pittoresque, et des yeux exercés peuvent seuls saisir l'ensemble de la forme du terrain à l'inspection de ces courbes. Pour remédier à cet inconvénient, qui a paru assez grave dans certains services, la science a appelé l'*art* à son aide, et, à la suite d'une mémorable discussion où toutes les opinions ont été pesées et où toutes les notabilités ont été entendues, il a été décidé que, pour les plans à l'échelle de un dix-millième et *au-dessous*, les espaces laissés entre les courbes seraient remplis par

des normales ou lignes de plus grande pente, ainsi que l'indique la partie gauche de la *planche* CVII.

14. Je résumerai ici très-succinctement les prescriptions rendues à la suite de cette discussion (qu'on trouvera d'ailleurs *in extenso* au Mémorial topographique du Dépôt de la guerre) en faveur des ingénieurs qui voudraient s'y conformer.

Pour les minutes des levés, quelle que soit leur échelle, ils auront recours *uniquement* aux courbes équidistantes. — Mais sur les dessins qu'ils exécuteront d'après cette minute, dans tous les cas où l'échelle de ce dessin serait au-dessous de un 10 000ème, ils traceront, entre les projections des courbes horizontales, des *hachures* (*pl.* CVII) qui représenteront les projections horizontales des lignes de plus grande pente et qui seront menées perpendiculairement à chacune des deux courbes entre lesquelles elles seront tracées. La *planche* CVII montre les effets comparés des deux systèmes.

15. *L'espacement* de ces hachures sera en raison inverse de la rapidité des pentes, et égal au quart de la distance prise sur la carte entre deux courbes consécutives.

Lorsque les hachures normales à deux courbes consécutives divergeront sensiblement entre elles, l'espacement qui vient d'être déterminé se mesurera sur une ligne perpendiculaire à la hachure et menée par son milieu.

Dans le cas où la distance entre deux courbes consécutives sera au-dessous de 0^{m}.002, on substituera à la loi de l'espacement des hachures celle de leur épaisseur, c'est-à-dire qu'on fera ces hachures d'autant plus grosses que la pente sera plus rapide.

On conservera sur le dessin exécuté d'après la minute une sorte de trace de la projection des courbes horizontales équidistantes qu'on n'y marque qu'au crayon et provisoirement dans le but de servir de directrices aux hachures.

16. Pour conserver cette trace des courbes de niveau et permettre de suivre leurs directions lorsqu'on les a effacées, on peut, ou disposer les hachures de deux tranches consécutives de manière que la hachure inférieure ne soit pas dans le prolongement de la hachure supérieure, ou bien l'on peut arrêter la hachure à une petite distance de la courbe directrice, de manière à laisser entre deux rangs un petit espace blanc. *Voyez* la partie gauche de la *planche* CVII.

Des cotes écrites aux points les plus remarquables indiqueront la hauteur de ces points; celui dont la cote est zéro étant toujours le plus bas, on fera connaître, autant que possible, la hauteur de ce point au-dessus du niveau de la mer (pag. 393).

Dans le cas où un ou plusieurs points du terrain seraient inférieurs au niveau de la mer, la cote zéro correspondra à ce dernier niveau, et les cotes des points qui lui sont inférieurs prendront le signe négatif.

17. *Lumière*. L'instruction prescrit encore, quelque petite que soit l'échelle, d'écarter toute considération de lumière soit oblique soit verticale. Mais peut-être trouvera-t-on utile d'user, quelquefois, des ressources que présente l'hypothèse de la lumière oblique, et de se conformer dans le dessin topographique, à l'usage adopté dans le dessin des machines (pag. 517), quant à la manière d'y placer les traits de force. On parviendra ainsi le plus souvent à faire sentir d'un seul coup d'œil les bords d'une excavation par exemple que, sans cette ressource, on confondrait facilement avec une saillie; et bien que, en général, on doive dans le dessin utile se dispenser de toutes *ombres portées* qui rendent toujours les plans confus, on pourra exceptionnellement s'éloigner de cette loi. Lorsqu'on voudra faire connaître approximativement la *hauteur* d'un objet, on portera son ombre sur le plan, ce qui donnera immédiatement cette hauteur, puisque cette ombre est dans l'hypothèse de la lumière oblique, une tangente à 45° et que cette tangente est égale à la hauteur de l'objet.

18. *Quant au sens de ces ombres*, il conviendrait d'autant mieux de le fixer conformément aux conventions de la page 516, que le nord d'un plan de terrain étant toujours à la partie supérieure du cadre, ce terrain se trouverait éclairé par des rayons solaires venant des régions du sud, ce qui paraît plus naturel que le mode inverse longtemps adopté. Les *traits de force* seraient également disposés conformément à la même convention, qui servirait ainsi pour tous les genres de dessin. Jetons maintenons un coup d'œil sur les :

19. *Méthodes qui donnent les courbes de niveau du terrain* avec plus ou moins d'approximation. La hauteur de tous les sommets de la triangulation générale ou secondaire étant connue ou pouvant être calculée, on prend les angles de hauteur ou de dépression d'un très-grand nombre de points du terrain autour de chacun de ces sommets, ou bien encore de chacun des points du terrain, on relève les angles de hauteur ou de dépression qu'ils forment avec les sommets en question. La distance horizontale de chacun de ces points au sommet étant donnée sur le plan, on calcule avec ces éléments les cotes respectives de chacun d'eux, on joint ensuite par une même courbe les points peu éloignés entre eux et qui ont des cotes égales. Ces cotes tracées d'abord au crayon sont ensuite passées à l'encre sur la minute.

20. Pour prendre d'un point quelconque A, l'angle de hauteur ou de dépression d'un autre point B, il faut donner au signal placé en B (mire ou piquet), la hauteur de l'instrument placé en A. On voit d'ailleurs facilement que, avec cette condition, H étant la cote de A ou sa hauteur au-dessus du point le plus bas du terrain, *h* celle du point B que l'on observe de A, ou d'où l'on observe A, *i* l'angle

de hauteur ou δ l'angle de dépression, D la distance horizontale du point B au sommet, distance prise sur la carte, on a :

$$h = H - D \text{ tang. } i = D \text{ tang. } \delta + H,$$

valeur que l'on calculera rapidement à l'aide de la table des tangentes naturelles (pag. 892).

21. On peut encore faire les nivellements du terrain (pag. 1201) suivant des séries de plans sécants et verticaux, soit parallèles entre eux, soit passant tous par une même verticale comme le suppose la *fig.* 3, *planche* CVI, ce qui fournit autant de profils qu'il y a de plans sécants. On trace ces profils à l'échelle du plan on mène dans chacun d'eux des horizontales distantes de l'équidistance adoptée ε, on projette sur le plan les intersections de ces horizontales avec les profils, et l'on joint par des courbes tous les points qui ont les mêmes cotes de hauteurs, ainsi que l'indique suffisamment la figure. On dessine à vue, en parcourant le terrain, les courbes qui passeraient par les points intermédiaires.

Quand le sol est couvert de bois, *planche* CVII, on figure les courbes jusqu'à leur lisière, et le reste s'obtient par approximation soit à vue, soit par points en suivant les chemins et appréciant le mieux possible la valeur des pentes.

22. Les méthodes précédentes suffisent ordinairement aux besoins généraux de la *topographie*, mais, si en vue de constructions à faire sur le terrain, d'excavations à y pratiquer, de déblais à en enlever, de travaux de mines à y entreprendre, le relief devait en être plus exactement accusé, on tracerait, sur le terrain, à l'aide de piquets, de véritables polygones de niveau, dont les plans superposés devraient être d'autant plus rapprochés que les pentes seraient plus variables. Puis on leverait successivement les sommets de chacun de ces polygones, dont les différences de niveau seraient données par un nivellement (pag. 1201).

23. *Pour tracer une courbe ou un polygone de niveau sur le terrain, à partir d'un point déterminé*, on dispose la mire en ce point, puis, plaçant le niveau réglé en un point quelconque, on fait élever le voyant de la mire jusqu'à ce qu'il se trouve à l'intersection des fils du réticule. On arrête invariablement le voyant dans cette position à l'aide de la vis, puis laissant le niveau à la place qu'il occupe, on fait porter la mire sur un point voisin du terrain. Si le voyant se trouve au-dessous ou au-dessus du fil du réticule, on abaisse ou on élève la mire en corps jusqu'à ce que l'intersection des fils et la ligne du voyant coïncident, et l'on plante un piquet au point du terrain que le pied de la mire occupait. Ce point est nécessairement de niveau avec le point de départ. Le niveau restant dans la position qu'il occupait, on répète avec la mire dont le voyant n'a pas bougé, la même opération pour tant de points qu'on voudra.

24. Si les sinuosités de la courbe deviennent telles que l'on cesse d'apercevoir la mire de la station fixe du niveau, on transporte celui-ci en avant de la dernière position de la mire. On établit, à volonté, le niveau à sa nouvelle station, on donne un *coup d'arrière* sur la mire (pag. 1202), ce qui obligera à faire monter ou descendre le voyant. On fixera celui-ci invariablement dans sa nouvelle position, on laissera un piquet au point que la mire occupait et l'opération pourra alors être continuée comme dans le premier cas.

Au reste, la moindre pratique suggèrera bientôt à un ingénieur un peu géomètre d'autres méthodes que je me dispense dès lors d'exposer ici, où les principes généraux seuls peuvent être rappelés.

RÉSISTANCE DES FLUIDES. Lorsqu'un corps solide se meut dans un fluide, parallèlement à lui-même, sans tourner, et avec une vitesse uniforme V, il éprouve de la part des molécules de ce fluide et dans le sens même de son mouvement une *résistance* R ou pression totale qui dépend de sa forme, de ses dimensions et surtout de sa vitesse.

A étant la projection du corps sur un plan perpendiculaire à sa vitesse uniforme V, $de = Vdt$ le chemin élémentaire que décrit cette projection dans le temps infiniment petit dt, on admet que le prisme Ade engendré par le mouvement du corps, représente le volume de fluide qui a été déplacé.

ϖ étant le poids du mètre cube de ce fluide, $\varpi A de$ sera donc le poids du fluide déplacé, $\frac{\varpi}{g} A de$ sa masse, $\frac{\varpi}{g} A\, de\, V^2$ la force vive qu'elle a acquise et $\frac{\varpi}{2g} A de V^2$ le travail $R\,de$ que le corps a dépensé pour imprimer au prisme fluide sa vitesse propre V. La résistance constante théorique R qu'il a éprouvée est ainsi donnée par l'égalité

$$R\,de = \frac{\varpi}{2g} A V^2\, de \qquad \text{ou} \qquad R = \varpi A \frac{V^2}{2g} = \varpi A H$$

en appelant H la hauteur due à la vitesse V (pag. 603). Mais l'expérience montre que le second membre doit être multiplié par un coefficient k qui dépend de la forme du corps mobile et des circonstances de son mouvement, de sorte que l'on a en général

$$R = k \varpi A \frac{V^2}{2g} = k \varpi A H$$

ϖ étant pour l'eau 1000^k et pour l'air à la pression $0^m.75$ et à la température de 12° environ $1^k.22$, on a donc à peu près

Pour l'eau $R = 51 k A V^2$, et pour l'air $R = 0.062 k A V^2$.

En réalité, la résistance éprouvée par un corps qui se meut dans un fluide provient à la fois d'une pression antérieure et d'une *non-*

pression postérieure. Pour les corps symétriques, les pressions latérales se détruisant réciproquement, elles ne deviennent un obstacle au mouvement que par le frottement qu'elles peuvent exercer contre les parois du corps.

Suivant *Dubuat*, la pression antérieure ou vers la proue ne dépendrait ni de la longueur du corps, ni de la forme de la poupe, mais au contraire la *non-pression* postérieure pourrait diminuer à mesure que le corps s'allonge, bien que la forme de la proue et de la poupe ne change pas. Les effets combinés de la pression antérieure et de la non-pression postérieure, sont généralement confondus dans les valeurs de k que l'on trouvera ci-après.

Si c'est le corps qui est en repos et le fluide en mouvement rigoureusement uniforme, ou s'ils sont animés tous deux de vitesses parallèles uniformes, on trouve commode d'employer encore la formule ci-dessus, mais V y désigne alors la vitesse *relative* du corps et du fluide, et le coefficient k prend en général une autre valeur K.

Proue et poupe fluides. *Dubuat* a aussi observé que, dans les deux cas où un corps se meut dans un fluide en repos, et où il reste immobile dans un fluide en mouvement, ce corps était toujours accompagné d'une *proue* et d'une *poupe* du fluide dans lequel il baigne, et qui forment en quelque sorte partie de sa propre masse.

Pour des pendules oscillant dans l'air et dans l'eau, *Dubuat* a trouvé que le volume de fluide ainsi entraîné dans le mouvement, était pour une sphère les 0.6 de son volume propre.

Pour les prismes et cylindres droits de longueur L et de section A, mus parallèlement à leur axe dans un fluide en repos, le volume de fluide entraîné avait pour mesure $0.705\,A\sqrt{A} + 0.13\,AL$.

Convois de chemins de fer. Mais indépendamment d'une poupe et d'une proue fluides, les corps qui se meuvent dans les fluides en repos semblent bien entraîner avec eux une masse fluide latérale, et, dès 1839, le docteur *Lardner* a parfaitement constaté sur les chemins de fer, l'existence d'un courant d'air fort étendu qui se meut dans le même sens que le convoi, et dont les filets fluides prennent une vitesse d'autant plus grande qu'ils sont plus rapprochés du train, cette vitesse diminuant pour les couches plus éloignées jusqu'à une assez grande distance des deux côtés du convoi. Cet effet s'ajoute d'ailleurs au *tourbillonnement* de l'air produit par la vive rotation des roues basses des waggons, et dont l'intensité retardatrice augmente avec le nombre de ces roues; de sorte que la résistance que l'air oppose à la marche des convois ne dépendrait pas moins de la longueur du train que de sa section tranversale.

Si le mouvement du corps mobile dans le fluide *est varié*, ce qui a lieu pour les projectiles et les pendules par exemple, l'inertie de la masse fluide qui les accompagne est mise en jeu. M' étant cette

masse et $\pm \frac{dV}{dt}$ son accélération positive ou négative, on fait la résistance R

$$R = k \varpi A \frac{V^2}{2g} \pm M' \frac{dV}{dt}$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque la vitesse V s'accélère et le signe inférieur correspondant au cas où elle se ralentit.

Si le corps flotte à la surface du fluide au lieu d'être entièrement plongé, la valeur de la résistance conserve sa forme générale, mais A n'y représente plus que la projection sur un plan perpendiculaire à V de la partie du corps qui serait plongée au-dessous du niveau fluide dans le cas du repos.

Enfin, il faut encore distinguer le cas où le mouvement du corps mobile dans le fluide est circulaire comme celui des roues à ailettes des tourne-broches et des ventilateurs, le coefficient k différant alors très-sensiblement du cas où les mêmes ailettes auraient un mouvement de transport rectiligne et parallèle.

Valeurs de k. Les valeurs de k sont donc considérablement modifiées pour un même fluide, et par la forme du corps, et par ses dimensions et par le genre de mouvement qui l'anime. Voici celles que j'ai pu recueillir, et dont la plus grande partie m'a été fournie par l'*Introduction à la mécanique industrielle* de M. *Poncelet*, 2e édition.

MOUVEMENT CIRCULAIRE. *Plans minces mus circulairement dans un fluide en repos.* On pourra employer les coefficients k ci-dessous, tant pour l'air que pour l'eau, en ayant soin de donner à ϖ la valeur convenable. V est la vitesse de rotation du centre du plan.

Aire des plans A.	Vitesse de rotation V.	Coefficient k.	Observateurs.
mèt. carré. 0.012	3 à 4m	1.39	Borda.
»	»	1.34	Hutton.
0.021	0 à 5m	1.43	Hutton.
0.026		1.49	Borda.
0.026	0m.5 à 11m	1.525	Thibault.
0.059	3 à 4m	1.64	Borda.
0.103	0m.5 à 11m	1.784	Thibault.

Si la palette mince forme un angle α avec la direction du mouvement, on calculera la résistance comme dans le cas ci-dessus, en prenant pour A la surface absolue de la palette, puis on multipliera le résultat par la valeur

$$\frac{2 \sin.^2 \alpha}{1 + \sin.^2 \alpha}$$

proposée par M. *Duchemin*.

Volants à ailettes. Au reste, pour le cas particulier des volants à ailettes se mouvant circulairement dans l'air à la pression et à la température ordinaires, MM. *Piobert*, *Morin* et *Didion*, ont trouvé pour la résistance totale R en kilogrammes

$$R = 0.100 + (0.0068 + 0.1179\,NS)\,V^2$$

N étant un nombre de palettes compris entre 5 et 20, S l'aire de chacune d'elles, et V la vitesse uniforme de leur centre, cette vitesse étant comprise entre 3 et 8 mètres. Mais les palettes n'avaient que $(0^m.2)^2 = 0^{mm}.04 = S$. On peut le plus souvent négliger le premier terme $0^k.100$.

Pour les surfaces cylindriques minces, mues circulairement dans l'air, la concavité tournée en avant, les coefficients du tableau ci-dessus n'ont augmenté que très-faiblement.

Pour des sphères de $0^m.10$ à $0^m.15$ diamètre mues de la même manière à des vitesses médiocres, on aurait d'après *Borda* $k = 0.56$ à 0.6. Cette dernière valeur correspondrait d'après *Hutton* à une vitesse de 2 mèt.

Aubes planes des bateaux à vapeur et des roues pendantes. Si les aubes ne sont plongées que partiellement, V étant la vitesse circulaire moyenne et relative de la partie plongée, k est très-voisin de 3. Si les aubes plongent entièrement, on fait $k = 2.50$ environ.

Mouvement rectiligne et parallèle. *Plans minces entièrement plongés*. Après une lumineuse discussion (*Mécanique industrielle*, pag. 587), M. *Poncelet* propose de faire $k = 1.30$ lorsque le plan mince se mouvra uniformément dans un fluide en repos, et $K = 1.85$ lorsque, au contraire, le plan mince sera en repos et le fluide en mouvement, sauf à décider ultérieurement si l'étendue effective des plans offre une influence propre dont il soit nécessaire de tenir compte.

Voiles des navires. On prendra pour A leur surface développée et, faute de mieux, on calculera comme pour les plans minces.

Parachutes. Lorsque le mouvement est devenu uniforme, et pourvu que la vitesse V ne dépasse pas 8 mèt., on a, d'après quelques expériences de MM. *Piobert Morin* et *Didion* sur un *parapluie* de $1^m.27$ diamètre

$$R = \frac{\varpi}{\varpi'}\,A\,(0.07 + 0.163\,V^2)$$

et si le parapluie tombe à l'envers

$$R^1 = \frac{\varpi}{\varpi'}\,A\,(0.028 + 0.0652\,V^2)$$

A est dans les deux cas la projection horizontale du parapluie,

ϖ le poids du mètre cube d'air au moment de l'expérience, et ϖ' le poids du mètre cube d'air à la pression 0.76 et à la température 10°. $\varpi' = 1.214$ environ.

Tant que le mouvement n'est pas parvenu à l'uniformité, et $\varphi = \frac{dV}{dt}$ étant l'accélération, on a, d'après les expériences de M. *Didion* sur le même appareil

$$R = \frac{\varpi}{\varpi'} A (0.07 + 0.163\ V^2 + 0.142\varphi)$$

V étant la vitesse au moment que l'on considère (Voy. pag. 1235).

Angle dièdre se mouvant dans l'air. S étant la somme des aires des deux plans, α l'angle aigu, exprimé en degrés, de chacun de ces plans avec la direction du mouvement, c'est-à-dire avec le plan *médian*, ϖ le poids du mètre cube d'air au moment de l'expérience, ϖ' le poids du mètre cube d'air à la pression 0.76 et à la température 10°, MM. *Piobert*, *Morin* et *Didion* ont trouvé pour la résistance totale R, la vitesse étant uniforme et l'angle dièdre agissant par son tranchant

$$R = S \frac{\varpi}{\varpi'} \cdot \frac{\alpha}{90} (0.036 + 0.084\ V^2)$$

Prismes droits immobiles plongés dans un fluide en mouvement. La longueur du prisme étant L et sa section transversale A, on mettra pour k dans la formule générale, savoir :

$$k = 1.865 \ldots 1.451 \ldots 1.323 \quad \text{et} \quad 1.360$$

selon que l'on aura

$$\frac{L}{\sqrt{A}} = 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 3 \quad \text{et} \quad 6$$

ces chiffres résultent d'expériences de *Dubuat* sur des prismes pour lesquels il avait $A = 0^{mm}.1$.

Homme dans l'air. L'homme étant en repos, on a, d'après M. *Poncelet*, $k = 0.75$, d'où pour l'effort total R, la surface A exposée au vent étant prise $= 0^{mm}.6$, $R = 0.028\ V^2$.

Si l'homme se meut dans l'air en repos, $k = 0.6$ et $R = 0.0224\ V^2$, et s'il est *à cheval*, on a avec assez d'approximation pour la résistance totale $R = 0.03\ V^2$.

Prismes droits se mouvant plongés dans un fluide en repos et suivant leur axe. A étant la section et L la longueur du prisme, on calculera sa résistance R en mettant pour k dans la formule générale, savoir :

k	A étant	L étant	V étant	D'après
	mm. mm.			
1.27	0.5 à 1	$\sqrt{A}$. . .	faible. . .	Marguerie.
1.44	0.1. . . .	3 mèt. . .	4 mèt. . .	Beaufoy.
1.50	0.1. . . .	3.	2.	*Id.*
1.58	0.1. . . .	3.	$0^m.5$. . . .	*Id.*

D'après les expériences de M. *Duchemin*, on aurait en général

$$k = 1.254\left(1 + \frac{0.227\,L}{9\sqrt{A}+L}\right)$$

Sphères tombant verticalement dans l'air ou dans l'eau. On a, d'après *Newton*, *Desaguliers*, *Dubuat*, $k = 0.50$ à 0.53 pour des vitesses finales qui ne dépassent pas 9 mèt.

Sphères entrant parallèlement à la surface de niveau dans un bassin d'eau avec des vitesses initiales de 70 à 550 mèt., on aurait, d'après MM. *Piobert*, *Morin* et *Didion*, $k = 0.452$.

Les obus creux de 12 à la vitesse initale de 3 à 400 mèt., et ceux de 6 à la vitesse de 250^m se sont presque tous brisés en choquant le liquide.

Projectiles dans l'air. La résistance R qu'ils éprouvent pendant leur mouvement *horizontal* peut être représentée, à chaque instant, dans les circonstances atmosphériques ordinaires, par

$$R = 0.06255\,k\,A V^2$$

V étant la vitesse qu'ils possèdent à l'instant que l'on considère. Or on a, d'après *Hutton*, la correspondance suivante entre les valeurs de V et de k

V = 1	3	5	10	25	50^m	100	200	300	400	500	600
k = 0.59	0.61	0.63	0.65	0.67	0.69	0.71	0.77	0.88	0.99	1.04	1.01

Ainsi, le boulet de 12^k dont le diamètre $= 0^m.148$ éprouverait une résistance exprimée par

$$R = 0.0010755\,k\,V^2$$

qui, aux vitesses ci-dessus, deviendrait en kilogrammes

R = $\overset{k}{0}.00064$	0.006	$\overset{k}{0}.017$	0.07	0.45	1.855	7.64	33.1	85.2	170	279	$\overset{k}{360}$

c'est-à-dire que, sans tenir compte de la masse d'air entraînée par le boulet, la résistance qu'il éprouve à la vitesse de 200 mèt. est presque égale à trois fois son propre poids ; elle devient trente fois ce même poids à la vitesse de 600 mèt., et comme ces résultats devraient être multipliés par 770 environ quand il s'agit de l'eau, on

peut juger de l'énorme résistance que doivent éprouver les boulets qui se meuvent dans ce liquide, indépendamment du choc qui s'opère à l'instant où ils y pénètrent.

M. *Piobert* a présenté la résistance des projectiles se mouvant dans l'air sous une forme différente pour laquelle je renvoie à la pag. 651 de l'*Introduction* de M. *Poncelet* à la *Mécanique industrielle*.

CORPS FLOTTANTS. *Prismes dans un fluide indéfini et en repos.* M. *Poncelet* ne pense pas que, dans les applications à la pratique, on doive attribuer au coefficient k une valeur qui surpasse notablement 1.10 ou même 1, si la longueur du prisme est égale à trois fois au moins la largeur de la partie plongée.

Si le prisme a une poupe, on fait $k = 0.99$.

Bateaux sur rivières et canaux à grande section. Si leur forme est prismatique, on prend k comme il vient d'être dit; mais si le bateau a une proue dont les faces latérales se raccordent par des arcs de cercle avec les flancs, et dont le dessous soit un plan incliné d'environ 30° raccordé avec le fond, la valeur de k s'abaisse à 0.33 au plus, et on a alors

$$R = 17\,A\,V^2$$

V étant la vitesse *relative* de l'eau et du bateau. D'après *Navier*, toutefois, on aurait sur les rivières et canaux à grande section les valeurs suivantes de k :

Bateau en prisme rectangulaire avec proue et poupe formées de deux plans verticaux dont la saillie égale la largeur. . . k=0.55

— la saillie de la proue étant double de la longueur. . 0.45

— la proue étant formée par un demi-cylindre vertical. 0.50

— la proue étant formée par le prolongement du prisme coupé en dessous par un plan incliné sur l'horizon de 30°. 0.45

Bateaux sur rivières et canaux à petite section. La résistance augmente très-sensiblement lorsque le cours d'eau n'a pas au moins 4 fois $\frac{1}{2}$ la largeur, et 6 fois $\frac{1}{2}$ la section de la partie immergée du bateau; mais on connaît mal la loi de l'accroissement de cette résistance, en dépit des observations de *Dubuat*, *Russell* et *Macneill*, etc. On se contente, faute de mieux, d'augmenter de sa moitié la valeur de k prise d'après les conditions du paragraphe précédent. Une observation de MM. *Magnès* et *d'Aubuisson* a cependant donné pour le canal du Languedoc et les grandes barques qui y naviguent, et que M. *d'Aubuisson* appelle « espèces de gros coffres garnis d'une proue et d'une poupe fort obtuses, à faces courbes »; la résistance

$$R = \frac{140\,A\,V^2}{S + 2A}$$

S étant la section du canal.

Vaisseaux. Quant aux embarcations qui ont les formes des navires marins, on prend $k = 0.16$ ou 0.18 d'après une expérience de *Bossut* sur un *modèle* de vaisseau mu exactement dans le sens de sa quille.

Ainsi, la formule théorique par laquelle on s'est accordé à représenter la résistance des fluides se trouve modifiée par un coefficient k qui varie entre les limites excessivement distantes 0.16 et 3 sans que l'on sache même le plus souvent si ce coefficient affecte la section A du fluide déplacé ou le carré V^2 de la vitesse relative. Cette formule n'est donc que l'expression fort incomplète des phénomènes nombreux et complexes qui donnent lieu à ce genre de résistance, une sorte de traduction algébrique d'*un seul* des faits mécaniques qui l'accompagne et qui n'est pas toujours le plus influent d'entre eux. Si nous exceptons l'*essai* si remarquable qui termine la *Mécanique industrielle* de M. *Poncelet* (pag. 675), nous pourrions donc appliquer encore aujourd'hui à la théorie de la résistance des fluides la critique que D'Alembert en faisait il y a un siècle (1752) : « S'il arrive, disait-il, que la question que l'on veut examiner soit trop compliquée pour que tous les éléments puissent entrer dans la comparaison analytique qu'on veut en faire, on sépare les plus incommodes, on leur en substitue d'autres moins gênants mais aussi moins réels ; — et on est étonné d'arriver, après un travail pénible, à un résultat contredit par la nature ! Comme si, après l'avoir déguisée, altérée ou tronquée, une combinaison purement mécanique pouvait nous la rendre. »

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. 1. Les matériaux sont soumis dans les constructions à des efforts instantanés ou permanents qui les *étendent*, les *compriment*, les *fléchissent* ou les *tordent*, et tendent toujours à les rompre. La cohésion de leurs molécules développe alors dans ces solides des résistances, dites *moléculaires*, à l'aide desquelles ils réagissent contre les efforts extérieurs qui les déforment ; mais les lois physiques qui régissent ces résistances, n'ayant été étudiées que très-récemment avec la sévérité convenable, les illustres géomètres qui, depuis deux siècles, ont créé et développé la théorie de la résistance des solides se sont trouvés conduits, à défaut d'observations exactes, à fonder cette théorie sur une nombreuse série d'*hypothèses*, implicites et explicites, que nous allons essayer de résumer :

2. *Première hypothèse : limite d'élasticité*. Les corps solides se laissent étendre, comprimer, fléchir et tordre, jusqu'à une *limite* différente pour chaque nature de solide, mais en deçà de laquelle ils reprennent *exactement* leurs formes et dimensions primitives ou naturelles, au moment où les forces extérieures qui tendaient à les

déformer viennent à cesser d'agir. Cette limite prend le nom de *limite d'élasticité*.

3. *Deuxième hypothèse : allongements*. Lorsqu'un prisme solide, dont nous représenterons la longueur et la section primitives ou naturelles par L et A, est tiré, dans le sens de sa longueur, par des efforts successifs P, les accroissements e de sa longueur primitive sont *proportionnels* aux valeurs de P aussi longtemps que sa *limite d'élasticité de tension* n'est pas atteinte.

4. *Troisième hypothèse :* en deçà de la limite d'élasticité, *la durée* des efforts est sans aucune influence sur les effets produits.

5. *Quatrième hypothèse*. Les accroissements de longueur subis par le prisme ne diminuent pas ses dimensions transversales ou sa section A.

6. *Cinquième hypothèse*. Les efforts nécessaires pour allonger des prismes de même longueur L, d'une même quantité déterminée e, sont *proportionnels* à leurs sections transversales.

7. *Sixième hypothèse : module ou coefficient d'élasticité*. Puisque les allongements par mètre $\frac{e}{L}$ sont, en vertu des hypothèses ci-dessus, *proportionnels* aux efforts d'extension $\frac{P}{A}$ par mètre carré de section du prisme aussi longtemps que la limite d'élasticité n'est pas atteinte, on obtiendrait évidemment l'allongement par mètre α du même prisme correspondant à un effort de *un* kilogramme par mètre carré, en posant la proportion

$$\frac{P}{A} : \frac{e}{L} :: 1^k : \alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{eA}{LP} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, , \quad (1)$$

Faisant le quotient $\frac{1}{\alpha} = E$, on aurait donc

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{P}{A} \cdot \frac{L}{e} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

c'est ce poids E que l'on nomme le *module* ou le *coefficient d'élasticité* de la substance du prisme.

8. On dit encore que ce *module ou coefficient d'élasticité* serait le nombre de kilogrammes qu'il faudrait appliquer à un prisme de *un* mètre carré de section pour l'allonger de *un mètre par mètre*, s'il était possible physiquement qu'un pareil allongement n'altérât pas l'élasticité de ce prisme. E est, en effet, la valeur que prendrait P dans la formule ci-dessus, en y faisant la section A du prisme = *un* mètre carré et l'allongement absolu e = la longueur primitive L.

9. *Septième hypothèse. Compressions*. La théorie étend les six hy-

pothèses précédentes aux phénomènes de *compression* comme à ceux d'*extension*.

Ainsi, tant que les efforts de compression ne dépassent pas la limite d'élasticité relative à l'extension, elle admet que le refoulement longitudinal du prisme n'altère pas son élasticité; — et aussi longtemps que cette élasticité n'est pas altérée, la longueur primitive L du prisme diminue de quantités absolues c qui restent : 1° *proportionnelles* aux efforts de compression P ; 2° en raison inverse de sa section A qui est censée rester constante malgré le refoulement ; 3° absolument indépendantes de la durée des efforts P.

10. *Huitième hypothèse*. Toutes choses égales d'ailleurs, ces quantités c sont en outre considérées comme ayant *rigoureusement* la même valeur numérique dans le cas de la compression que les quantités e dans le cas de l'extension. Il en résulte qu'un même effort $\pm P$ appliqué à un même prisme dans la direction de sa longueur, fera varier sa longueur primitive L de quantités $\pm c = \mp e$ absolument égales, mais seulement de signes contraires, soit qu'il tire, soit qu'il refoule ce prisme, aussi longtemps du moins que la limite commune d'élasticité n'est pas atteinte.

11. Enfin, le *module ou coefficient d'élasticité* C relatif à la compression a conséquemment pour la même substance, la même valeur numérique que le *module d'élasticité* E relatif à l'extension ;— de sorte que, selon le sens de l'action, E représente dans cette théorie, tantôt le poids qui *allongerait de un mètre par mètre* un prisme de *un mètre carré* de section, ou qui doublerait sa longueur primitive, tantôt le poids qui *refoulerait* ce même prisme jusqu'à le réduire à un *plan géométrique* sans épaisseur, en supposant toujours que dans toute l'étendue de ces déformations, les variations de longueur puissent rester *proportionnelles* aux efforts.

Ces hypothèses admises, on résout assez facilement les problèmes qui suivent et qui supposent tous que les efforts extérieurs sont toujours assez faibles pour que l'élasticité du solide ne soit point altérée.

12. Je prendrai ici pour guide le résumé de la théorie de la résistance des matériaux, tel à peu près qu'il a été donné par M. *H. Moseley*, dès 1843, dans ses *Mechanical principles of engineering*. On pourra y remarquer quelques tours heureux de démonstration, et une grande généralité. Je regrette beaucoup que le cadre restreint de mon livre, et surtout que l'incertitude qui plane sur cette ingénieuse théorie depuis la publication des belles expériences de M. *Hodgkinson*, ne m'aient pas permis d'exposer tous les développements originaux et les applications intéressantes du savant professeur *Moseley*.

Quant au fond de la théorie, on sait qu'il est le produit successif des travaux d'une série d'hommes illustres qui commence à *Galilée, Hooke, Leibnitz, Mariotte* et finit aux *Bernouilli*, aux *Coulomb*, aux *Lagrange*, aux *Poisson*, aux *Navier* et aux *Poncelet*.

13. *Déterminer l'allongement ou le refoulement total* e *que subit sous un effort* P, *un prisme dont la longueur et la section primitives, sont* L et A.

Allonger (ou refouler) le prisme de e, c'est donner à chaque mètre de sa longueur un allongement $\frac{e}{L}$; ce qui exigerait (§ 11) un effort égal à $\frac{e}{L}$ E si le prisme avait une section de *un* mètre, et exigera un effet A $\frac{e}{L}$ E, puisque la section est A mètre (§ 6); donc

$$P = AE\frac{e}{L}; \quad \frac{e}{L} = \frac{P}{AE}; \quad E = \frac{P}{A}\cdot\frac{L}{e} \ldots \quad (3)$$

14. *Déterminer le travail* T *nécessaire pour allonger* (*ou refouler*) *de* e, *un prisme dont la longueur et la section primitives sont* L et A.

La proportionalité admise entre les extensions et les efforts (§ 3), indique évidemment ici des efforts successifs qui augmenteront avec le chemin déjà parcouru par l'extrémité du prisme; soit donc x une partie de l'allongement total ou du chemin total e parcourue par cette extrémité à une époque quelconque, l'effort nécessaire pour rendre l'allongement x permanent est d'après la formule (3) $= \frac{AEx}{L}$; le travail élémentaire de cet effort est évidemment le produit de cette quantité par le petit chemin dx et le travail total T dépensé sur le prisme est la somme de tous les travaux élémentaires accomplis entre $x = o$ et $x = e$ donc

$$T = \frac{AE}{L}\int_0^e x\,dx = \frac{AEe^2}{2L} = \frac{E}{2}\left(\frac{e}{L}\right)^2 AL \ldots\ldots \quad (4)$$

Ainsi *le travail est proportionnel au volume* AL *du prisme et au carré de son allongement par mètre.*

15. Substituant dans cette expression la valeur (3) de l'effort P qui suffirait pour maintenir d'une manière permanente l'allongement e du prisme, on a encore :

$$T = \frac{AEe^2}{2L} = \frac{AEe}{L}\,\frac{e}{2} = \frac{Pe}{2} \text{ kilogrammètres} \ldots \quad (5)$$

ou, en mettant à la place de e sa valeur en fonction de P (3) :

$$T = \frac{Pe}{2} = \frac{P^2 L}{2AE} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

16. *Corollaire*. Donc si l'on appliquait *subitement* à l'extrémité inférieure d'une tige verticale fixée par son extrémité supérieure, un poids P égal à l'effort rigoureusement nécessaire pour la maintenir allongée de e, le travail Pe dû à la descente du poids P diminué du travail $\frac{Pe}{2}$, qui suffit pour allonger la barre de la quantité e, laisserait disponible dans le système de la tige et du poids un travail

$$Pe - \frac{Pe}{2} = \frac{Pe}{2}$$

précisément suffisant (4) pour allonger encore la tige d'une nouvelle quantité e, de sorte que l'allongement total acquerrait une amplitude $= 2e$. Mais cet allongement $2e$ ne saurait persister, puisque, par hypothèse, P ne peut *maintenir* la tige allongée que d'une quantité e. Le poids P remonterait donc, et l'extrémité inférieure de la barre oscillerait avec lui autour d'un point correspondant à l'allongement e. Nous reviendrons tout à l'heure sur cette question intéressante (*).

17. *Coefficients de la résistance vive d'élasticité* T^1_ε. L'équation (4) obtenue au § 14, mise sous la forme

$$T = \frac{1}{2} E \left(\frac{e}{L}\right)^2 A L$$

nous a montré que les quantités de travail à dépenser sur des prismes de même substance pour les allonger ou les raccourcir d'une même quantité par mètre de longueur, étaient proportionnelles aux volumes de ces prismes.

Imaginons donc que deux prismes de même substance ont subi l'allongement par mètre ε qui correspond à leur commune limite d'élasticité. Soit A la section du premier prisme, L sa longueur primitive, T_ε le travail à dépenser sur lui pour produire l'allongement limite par mètre ε, et soit *un mètre carré* la section du second prisme, *un mètre* sa longueur primitive, et T^1_ε le travail analogue

(*) M. *Moseley* remarque que les raisonnements ci-dessus s'appliqueraient très-exactement à la colonne liquide d'un *manomètre* (pag. 1115), dont la pression est nécessairement proportionnelle à sa hauteur. On voit donc que, lorsque cette colonne est *brusquement* soumise à la tension constante T d'un fluide (vapeur, air comprimé, etc.), la variation de la hauteur manométrique est le *double* de celle qui ferait équilibre à la tension réelle du fluide. Faute d'avoir eu égard à cette remarque, on est tombé dans des erreurs très-graves et quelques résultats d'expériences courent le monde et y sont acceptés, bien qu'ils soient entachés du genre d'erreur que l'on signale ici. (Voyez encore la pag. 802 de l'article *Forces*.)

à T_ε ; on aura entre ces deux travaux, d'après ce qui précède, la relation

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^1 AL \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

18. Ce travail T_ε^1, qui sert de mesure à la résistance élastique qu'un prisme solide oppose à l'action d'un choc ou d'un effort brusque dirigé dans le sens de son axe, est ce que M. *Poncelet* appelle *coefficient de la résistance vive d'élasticité*, et ce que, d'après *Tredgold*, les auteurs anglais nomment module de *résilience longitudinale*.

19. *Détermination pratique de* T_ε^1. Pour déterminer le coefficient de résistance vive d'élasticité d'une substance donnée, on pourra donc se borner à chercher par l'observation l'effort P_ε, strictement suffisant pour maintenir à l'allongement limite par mètre ε un prisme de la substance donnée d'une longueur quelconque et d'une section A : car, en vertu des équations (5) et (7), on a :

$$T_\varepsilon = \frac{L}{2AE} P_\varepsilon^2 = T_\varepsilon^1 . AL$$

d'où

$$T_\varepsilon^1 = \frac{1}{2E}\left(\frac{P_\varepsilon}{A}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

20. *Allongement d'un prisme vertical tiré dans le sens de sa longueur par un effort* P, *en tenant compte du poids propre du prisme.* Soient :

x une longueur quelconque du prisme comptée du point de suspension ;
x_1 ce que devient cette longueur par l'effet de l'allongement ;
L la longueur primitive du prisme ;
L_1 ce que devient cette longueur après l'allongement ;
p le poids par mètre courant du prisme ;
A sa section ;

$p\,(L - x)$ sera évidemment le poids de la partie du prisme qui, outre l'effort P, agit sur l'élément de longueur dx; l'allongement absolu que subira cet élément sous l'influence de l'effort et du poids sera donc (3) :

$$\frac{[P + (L - x)p]dx}{AE} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

d'où l'on conclut que

$$dx_1 = dx + \frac{[P + (L - x)p]\,dx}{AE} = dx\left[1 + \frac{P + (L - x)p}{AE}\right] \quad (10)$$

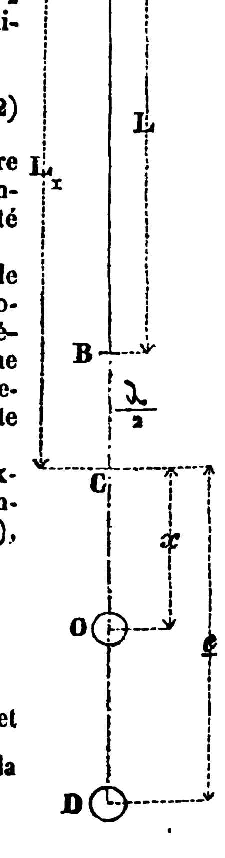
Intégrant depuis $x = o$ jusqu'à $x = L$, on obtient pour la valeur de L_1 :

$$\int dx_1 = L_1 = L\left(1 + \frac{P}{AE}\right) + \frac{p}{2AE} L^2 \ldots \quad (11)$$

21. Si l'effort P tendait à refouler la barre de bas en haut, il faudrait lui donner le signe négatif; et si cet effort était alors équivalent à la moitié $\frac{pL}{2}$ du poids de la barre, on aurait $L_1 = L$, c'est-à-dire que la tige ne subirait aucun allongement.

22. *Oscillations verticales d'une tige élastique ou d'une corde de longueur primitive L, et d'une section A portant un poids P suspendu à son extrémité inférieure.*

On néglige la masse de la tige.



Soient S le point fixe de suspension, $BC = \frac{\lambda}{2}$ l'allongement permanent que le poids P produirait sur cette tige, ce qui suppose (3) :

$$P = \frac{AE\lambda}{2L} \ldots \ldots \quad (12)$$

et soit C la position fixe que conserverait le centre du poids P ou l'extrémité de la tige sous l'influence d'une force sans inertie d'une intensité égale à P.

Imaginons que, le centre du poids occupant le point C, une nouvelle force extérieure soit introduite dans le système et fasse parcourir à l'extrémité C un nouveau chemin $CD = c$; puis, que cette extrémité D soit alors abandonnée à elle-même ainsi qu'à l'action du poids P qui lui reste attaché.

Soit enfin O une position quelconque de l'extrémité de la tige ou du poids P qu'elle porte pendant l'une quelconque de ses oscillations (§ 16), et $CO = x$,

On aura à cet instant, savoir :

$\frac{\lambda}{2} + x$ pour l'allongement absolu de la tige;

$\frac{AE}{L}\left(\frac{\lambda}{2} + x\right)$ pour l'effort qui rendrait cet allongement stable ou permanent (3), ou pour la réaction de la tige à cet instant;

$\frac{AE}{L}\left(\frac{\lambda}{2}+x\right)-P$ pour l'excès de la réaction élastique de la tige sur le poids P ou pour l'effort dirigé de bas en haut qui reste disponible dans le système à cette période de l'allongement. Or, en vertu de la valeur (12) de P, cet excès ou effort disponible se réduit à

$$\frac{AEx}{L}$$

Son action sur la masse $\frac{P}{g}$ variant comme la distance x du point O au point C, la durée des oscillations de l'extrémité O de la tige est indépendante de leur amplitude, et cette extrémité s'éloigne dès lors de part et d'autre du point C à des distances égales dans le temps t qu'un pendule simple d'une longueur $\frac{\lambda}{2}=\frac{PL}{AE}$ mettrait à accomplir une oscillation complète (page 1253); donc

$$t=\pi\sqrt{\frac{PL}{gAE}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Si l'on désigne par L_1 la distance de la suspension S au centre C des oscillations, on aura donc, en mettant pour $\frac{\lambda}{2}$ sa valeur

$$L_1=L+\frac{PL}{AE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

23. Supposons maintenant que le poids P vienne d'atteindre précisément la plus haute position d_1 de sa première oscillation, où il est dès lors en repos au moins pour un instant, et imaginons qu'à cet instant même un second poids P_1 soit ajouté au premier poids P : une seconde série d'oscillations va évidemment commencer autour d'un nouveau centre C_1, centre dont la distance $SC_1=L_2$ à la suspension sera exprimée par

$$L_2=L=\frac{(P+P_1)L}{AE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

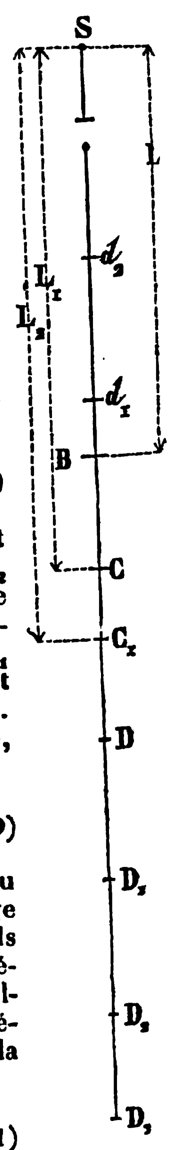
de sorte que la distance CC_1 des deux centres devient (page suivante)

$$L_2-L_1+\frac{P_1L}{AE}=CC_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

et le plus grand abaissement $C_1D_1=d_1C_1$ au-dessous du nouveau centre C_1 correspondant à la seconde oscillation devient lui-même égal à la distance de C_1 au point d_1 où cette oscillation a commencé. Or

$$C_1D_1=C_1d_1=Cd_1+CC_1=c+\frac{P_1L}{AE} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

L'amplitude totale $H_2 = d_1 D_1$ de cette seconde oscillation est donc



$$H_2 = 2\left[c + \frac{P_1 L}{A E}\right] \dots\dots (18)$$

24. Supposons encore que le poids P_1 soit anéanti au moment même où il atteint le point le plus bas D_1 de la seconde oscillation ; une troisième série d'oscillations va commencer, mais de même que la première, elle s'accomplira autour du premier centre C, dont la distance L_1 à la suspension S est déterminée (14), et le poids P seul, à la fin de la troisième oscillation, aura remonté au-dessus de C d'une quantité $C d_2 = C D_1$, de sorte que l'amplitude totale de l'oscillation sera (17) et (16)

$$= 2\, C D_1 = 2\,[C_1 D_1 + C C_1] = 2\left[c + \frac{2 P_1 L}{A E}\right] (19)$$

25. Enfin, imaginons toujours que, au moment précis où le poids P seul est parvenu au point d_2 le plus élevé de la troisième oscillation, il reçoive de nouveau la charge additionnelle P_1 ; une quatrième oscillation va commencer autour du centre C_1 situé à la distance L_2 de la suspension (15), point qui était le centre de la *deuxième* oscillation. $C_1 D_2 = C_1 d_2$ sera donc la nouvelle demi-amplitude, et dès lors l'amplitude totale deviendra

$$2\left[c + \frac{3 P_1 L}{A E}\right] \dots\dots\dots (20)$$

26. Continuant ainsi à décharger le système du poids additionnel P_1 toutes les fois que la charge atteint sa position inférieure, et à rétablir ce poids additionnel P_1 lorsque P atteint sa limite supérieure, il paraît évident que les amplitudes des oscillations croîtront suivant une progression par différence, de sorte que l'amplitude totale H_n de la $n^{ième}$ oscillation aura pour valeur

$$H_n = 2\left[c + \frac{(n-1) P_1 L}{A E}\right] \dots\dots (21)$$

Les oscillations ascendantes se faisant autour de C et les oscillations descendantes autour de C_1, si n est pair, le centre de la $n^{ième}$ oscillation est C_1, le plus grand allongement c_n de la tige est alors $= B C_1 + \frac{1}{2} H_n$. Mettant pour $B C_1$ sa valeur $(L_2 - L)$ tirée de (15)

et pour H_n la valeur ci-dessus, il vient pour le plus grand allongement absolu

$$c_n = c + \frac{(P + nP_1)\,L}{AE} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (22)$$

et cet allongement peut éventuellement déterminer la rupture de la tige.

Cette théorie explique les dangereux effets d'une troupe marchant au pas sur un pont suspendu. Voyez l'Introduction à la *Mécanique industrielle* de M. *Poncelet*. Voyez aussi le Mémoire de M. *Eaton Hodgkinson* sur la chute du pont suspendu de *Broughton* près Manchester (4e volume des *Manchester philosophical transactions*), et enfin le Mémoire de *Navier* sur les ponts suspendus (1823), et où il a montré que la durée des oscillations éprouvées par les chaînes de ces ponts, et dès lors par la totalité des tiges et du tablier, pouvait s'élever dans certains cas à près de six secondes, d'où pouvait résulter l'isochronisme entre ces oscillations et la marche d'une troupe, et enfin un accroissement redoutable de l'amplitude des oscillations.

27. Flexions. *Surface neutre des pièces fléchies.* La théorie de la résistance des matériaux suppose encore que, lorsqu'une pièce est fléchie, les fibres du solide situées vers la partie convexe s'étendent, tandis que les fibres situées vers la partie concave se raccourcissent. S'il en est ainsi, il existe nécessairement, entre les couches étendues et les couches comprimées ou refoulées, une couche unique dont les fibres ont conservé leur longueur primitive, et que, par ce motif, on nomme la *surface neutre du solide*.

28. *Réalité de la surface neutre.* Ainsi qu'on le verra plus loin, les observations récentes de M. *Eaton Hodgkinson* et de la commission anglaise n'ont point confirmé toutes les hypothèses de la théorie. Frappé de ces discordances que les anciennes expériences semblaient déjà indiquer (voyez *Fer et Fonte*, page 740), j'avais conçu un moment l'espoir de voir s'évanouir la *surface neutre* avec quelques autres hypothèses fondamentales, ou plutôt se confirmer l'idée première des *Galilée* et des *Leibnitz*, qui plaçaient cette surface à la concavité même du solide fléchi, dont toutes les parties se trouvaient dès lors simplement soumises à l'extension. Peu convaincu d'ailleurs par les raisonnements et les méthodes d'expérimentation, contestables à mon sens, qu'on emploie depuis longtemps pour démontrer le double phénomène d'extension et de compression dans les solides fléchis, j'ai essayé, si elle était réelle, de constater l'existence de la surface neutre d'une manière irrécusable, en la rendant sensible à l'aide de l'appareil suivant (*fig.* 1, 2 et 3, *planche* CIX).

29. Le 17 décembre 1851, j'ai pris une pièce de sapin du Nord

qui, après équarrissage à vive arête pour toutes ses faces, s'est trouvée avoir : section $(0^m.0974)^2$, longueur $2^m.0083$; poids total $8^k.9$. Je l'ai placée horizontalement sur deux appuis reposant eux-mêmes sur un bâti solide à une distance de $1^m.803$ (ces détails ne sont pas reproduits dans les figures).

Au milieu de cette pièce, j'ai placé un rouleau en bois R de $0^m.30$ de diamètre et de même largeur que la pièce, et j'ai suspendu à son axe en fer *a* deux étriers en bois *ee* qui recevaient à leur partie inférieure une traverse en fer *t* parallèle à l'axe du rouleau, traverse qui, à l'aide de quatre chaînes *cc* et de crochets, portait un plateau que je ne figure pas et qui recevait les poids successifs destinés à fléchir la poutrelle.

Tout le système de la suspension, du rouleau, des étriers, etc., et de la poutrelle elle-même, fut, à l'aide d'un poids additionnel, amené à former une charge totale exacte = 50 kilog. ; puis successivement, avec précaution, j'ai fait poser sur le plateau des poids successifs de demi-heure en demi-heure, de manière à obtenir les charges totales successives = 200^k, 300^k, 400^k, 500^k et 600^k.

Afin de rendre visible le double phénomène d'extension à la convexité et de refoulement à la concavité, j'avais pratiqué dans la face supérieure de la pièce une rainure longitudinale *m* et une rainure symétrique *m'* le long de la face inférieure, et j'avais engagé dans chacune de ces rainures à section trapézoïdale deux languettes de même forme très-minces *ll*, *l'l'*, du même bois que la pièce, bien frottées de savon sec et débordant les abouts de la pièce de $0^m.10$ environ de chaque côté.

Cette pièce étant d'abord posée librement et sans charge sur ses appuis, j'ai fait marquer sur les languettes, par des traits d'un crayon très-fin, les affleurements *nn*, *n'n'* des abouts de la pièce sans charge, c'est-à-dire les quatre traces *n*, *n*, *n'*, *n'* des plans alors verticaux de ses faces extrêmes; puis l'on a commencé à charger.

A mesure que le solide a fléchi, on a *vu* alors distinctement les traits *nn* marqués sur la languette supérieure *déborder* de plus en plus *vers le dehors* les arêtes *oo* de la pièce qui étaient d'abord en coïncidence avec ces traits ; — et, au contraire, on *voyait* les traits *n' n'* marqués sur la languette inférieure *rentrer* de plus en plus *vers le dedans*, et s'éloigner des arêtes *o' o'* avec lesquelles ils coïncidaient d'abord.

En fait, les languettes étant fort minces et très-libres dans leur rainure respective, les chemins parcourus par les traces *n*, *n*, *n'*, *n'*, qu'elles portaient, n'étaient qu'une apparence, et c'était évidemment les arêtes *oo* et *o'o'* qui avaient parcouru ces chemins. Les arêtes supérieures *oo*, *oo*, s'étaient donc *rapprochées*, ce qui démontrait une compression à la face concave; et les arêtes inférieu-

res $o'o'$, $o'o'$, s'étaient *éloignées*, ce qui démontrait l'*extension* de la partie convexe et dès lors l'existence d'une *surface neutre* située *quelque part* entre les lames supérieure et inférieure du solide.

Quant aux valeurs de l'extension et de la compression, j'ai trouvé sous la charge totale de 600 kil. agissant au milieu de la pièce, savoir :

Flèche	$= 0^m.01533$
Extension absolue e de la face inférieure.	$= 0^m.00195$
Compression absolue c de la face supérieure. . .	$= 0^m.0012$

Ainsi, sous la charge de 600 kil., la compression n'a pas atteint les deux tiers de l'extension.

On pourrait très-facilement adapter des *verniers* (p. 953) à tout appareil de ce genre, et mesurer avec beaucoup de précision l'amplitude des extensions et des compressions des pièces fléchies (*).

30. *Situation de la surface neutre d'un solide fléchi, dans le cas où l'on admet la septième hypothèse* (fig. 1, pl. CVIII).

ABCD est une lame que nous supposerons verticale, très-mince, comprise entre deux plans parallèles au plan de la flexion qu'elle conserve sous l'influence des forces extérieures P, Q et R.

acb est l'*axe neutre* de cette lame, TP et VQ sont les traces de deux plans très-rapprochés coupant la lame ABCD, et chacun d'eux est perpendiculaire à l'axe neutre aux points S et R où ils coupent cet axe. O est la rencontre de ces plans QV et PT, et $OR = \rho$ le rayon de courbure de l'axe neutre au point R.

La lame ABCD étant supposée en équilibre sous l'action des forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur elle, il y a équilibre sur chacune de ses parties et sur APTD en particulier.

Or la force P peut être considérée comme appliquée au point K où sa direction rencontre le prolongement du rayon de courbure ρ, K étant supposé invariablement lié au système.

Nommant θ l'angle OKP du plan OK avec la direction de P, et, décomposant cette force au point K, elle fournit suivant KPT normalement à l'axe neutre une composante

$$P \cos. \theta = G. \qquad (23)$$

qui est détruite par la résistance que la cohésion du solide oppose au glissement de la partie APTD le long du plan TP, et dont nous ne nous occuperons pas.

(*) Une faute importante s'est glissée dans le résumé de cette expérience que M. *Morin* a eu la bienveillance de m'emprunter (pag. 127 à 129 de sa *Résistance des matériaux*). Il y élève à $0^m.0017$ la compression de la face supérieure qui n'a pas, cependant, dépassé $0^m.0012$: fait qui détruit la conclusion qu'il a émise.

Quant à la composante P sin.θ parallèle à la tangente en R à l'axe neutre, elle fait équilibre à la résultante R_c des forces de compression développées de R en T, et à la résultante R_e des forces d'extension que la flexion développe de R en P.

Or ces trois forces en équilibre sont parallèles, et les forces d'extension agissent en sens inverse des forces de compression : donc (page 703) leur résultante étant nulle, on a

$$P\sin.\theta + R_c - R_e = o \quad \text{et} \quad P\sin.\theta = R_e - R_c \ldots \quad (24)$$

De plus, l'équilibre exige que la somme des moments des forces, par rapport à un point quelconque de leur plan, soit nulle aussi ; mais nous reviendrons tout à l'heure sur cette seconde condition.

Soit d'abord Δx la longueur primitive de la partie très-petite SR de l'axe neutre interceptée entre les deux normales OS et $OR = \rho$ à cet axe. Cette longueur Δx était aussi celle que possédait la fibre quelconque qm avant la flexion ; mais, en vertu de cette flexion, cette fibre qm s'est allongée de la quantité absolue $mp = \delta x$, c'est-à-dire que sa longueur est devenue $qp = \Delta x + \delta x$ et qu'elle a subi ainsi un allongement par mètre égal à $\frac{\delta x}{\Delta x}$.

Appelant da la section transversale de cette fibre qp et $v = Rp$ la distance de cette fibre à l'axe neutre, l'effort nécessaire pour rendre stable ou permanent l'allongement par mètre qu'elle subit sera (3)

$$\frac{E\,da.\delta x}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\rho} v\,da \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

car les triangles semblables mpR, SRO, donnent

$$mp : SR :: Rp : OR \quad \text{ou} \quad \frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{v}{\rho} \ldots\ldots \quad (26)$$

Or la résultante R_e des forces d'extension n'est rien autre chose que la somme $\int$ de tous les efforts semblables et parallèles exercés depuis le point R, pour lequel $v = o$, jusqu'au point P, pour lequel on fait $v = v_1$: donc

$$R_e = \frac{E}{\rho}\int_o^{v_1} v\,da \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Quant à la résultante R_c des forces de compression, on l'obtiendra de même en faisant la somme des forces de compression exercées depuis le point R où $v = o$ jusqu'à T, point dont la distance à l'axe neutre est représentée par v'. Mais, d'après cette théorie, le module d'élasticité relatif à la compression est supposé précisément égal au

coefficient ou module d'élasticité E relatif à l'extension (§ 11) : donc on a

$$R_c = \frac{E}{\rho}\int_0^{v'} v\,da \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (28)$$

d'où

$$R_e - R_c = \frac{E}{\rho}\left[\int_0^{v_1} v\,da - \int_0^{v'} v\,da\right] .\,.\,.\,. \quad (29)$$

de sorte que les *résultantes* R_e, R_c, *sont, chacune, le produit de* $\frac{E}{\rho}$ *par la somme des moments, pris par rapport à l'axe neutre, des éléments de la section sur laquelle elle agit.*

Mais le moment de la section totale de la lame, par rapport au même axe, est le produit de cette petite section totale $a = \int da$ par la distance v_0 de son centre de gravité à l'axe neutre ; et ce moment av_0 est lui-même égal aux sommes comprises dans la parenthèse ci-dessus : donc

$$\int_0^{v_1} v\,da - \int_0^{v'} v\,da = av_0 \,.\,.\,.\,.\,. \quad (30)$$

et (24)

$$P\sin.\theta = \frac{E}{\rho} av_0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (31)$$

expression qui donnera la distance

$$v_0 = \frac{\rho P}{Ea}\sin.\theta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (32)$$

de l'axe neutre au centre de gravité de la section a, lorsqu'on connaîtra le rayon de courbure. Cette distance devra être mesurée vers les fibres étendues lorsque θ sera positif, et vers les fibres comprimées, si θ est négatif. L'axe neutre passe donc d'un côté à l'autre de la ligne qui enfile les centres de gravité des sections transversales de la lame au point pour lequel $\theta = o$, c'est-à-dire au point où la normale à l'axe neutre est parallèle à la direction de la force P.

32. *Si la force* P *qui maintient la flexion est sensiblement perpendiculaire à la longueur de la lame,* ce qui est le cas habituel dans les constructions, l'angle θ et dès lors $\sin.\theta$ sont très-voisins de zéro, aussi longtemps du moins que la flexion en un point quelconque R de l'axe neutre est très-petite. Alors la distance v_0 du centre de gravité de la section a de la lame à son axe neutre est elle même très-petite.

Si on la suppose rigoureusement nulle, on a $P \sin.\theta = 0$, et l'équilibre exige alors (24) que la résultante R_e des forces d'extension soit égale et opposée à la résultante R_c des forces de compression, et que l'on ait

$$R_e = R_c \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\rho}\int_0^{v_1} v\,da = \frac{E}{\rho}\int_0^{v'} v\,da \ . \ . \ . \ (33)$$

ou bien encore
$$\int_0^{v_1} v\,dv\,du = \int_0^{v'} v\,dv\,du \ . \ . \ . \ . \ . \ (34)$$

en faisant l'épaisseur de la lame $= du$ ou l'élément da de sa section $= dv\,du$ (*figure suivante*, § 34).

Cette équation suppose que le centre de gravité de la section de la lame coïncide avec son axe neutre.

33. *Valeur du rayon de courbure* ρ *en un point quelconque* R *de l'axe neutre* (*fig.* 1, *pl.* CVIII).

Nous avons vu (§ 30) que l'état d'équilibre de la partie APTD de la lame exigeait encore que la somme algébrique des moments des forces d'extension de compression et de flexion fût nulle.

Prenant le point R de l'axe neutre pour origine,

$$P \sin.\theta \times \overline{KR} = P \times \overline{mR} = Pp \ . \ . \ . \ (35)$$

sera le moment de la résultante des forces qui maintiennent la flexion, en égalant à p la perpendiculaire mR menée de R à sa direction.

Quant aux moments des forces d'extension et de compression, lesquels tendent tous deux à faire tourner la section PT en sens inverse du moment Pp, on les obtiendra facilement en remarquant que chacun des éléments da de la section de la lame étant soumis à l'effort $\frac{E}{\rho} v\,da$ passant à la distance v de l'axe neutre, on a, en désignant respectivement par r et r' les bras de lever de R_e et R_c,

$$r_1 R_e = \frac{E}{\rho}\int_0^{v_1} v^2\,da \quad \text{et} \quad r' R_c = \frac{E}{\rho}\int_0^{v'} v^2\,da \ . \ . \ (36)$$

d'où résulte pour la deuxième condition d'équilibre

$$Pp - \frac{E}{\rho}\left[\int_0^{v_1} v^2\,da + \int_0^{v'} v^2\,da\right] = 0 \ . \ . \ . \ . \ (37)$$

Or la parenthèse ci-dessus n'est rien autre chose que la somme de tous les éléments de la section de la lame multipliés chacun par

la carré v^2 de sa distance v à l'axe neutre : c'est donc le *moment d'inertie* de la section totale par rapport à ce même axe.

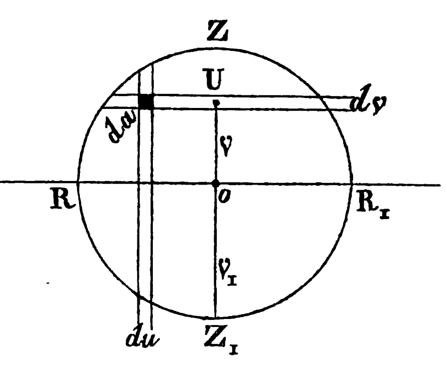
Lorsqu'on suppose à la fois des flexions extrêmement petites, la force infléchissante P sensiblement perpendiculaire à l'axe primitif de la lame, l'axe neutre passe par le centre de gravité de sa section, la droite $Rm = p$ vient se confondre sensiblement avec la courbe Ra ou avec sa corde x, de sorte qu'en désignant par $\dot{I}$ le moment d'inertie de la section de la lame pris par rapport à son centre de gravité, par $\Sigma(Px)$ le moment de la résultante des forces extérieures qui maintiennent la flexion de la partie APTD, l'équation (37) devient simplement

$$\Sigma(Px) = \frac{E}{\rho}\dot{I} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

et l'on a pour l'expression du rayon ρ de courbure au point R de l'axe neutre

$$\rho = \frac{E\dot{I}}{\Sigma(Px)} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\Sigma(Px)}{E\dot{I}} \ldots \quad (39)$$

34. *Solide dont la section transversale est constante.* Imaginons maintenant un corps solide dont toutes les sections transversales RZR_1Z_1 sont constantes et qui soit décomposable en lames verticales de largeur égale du juxtaposées, de telle sorte que les centres de gravité respectifs des sections de toutes ces lames soient situés sur une même droite RR_1 perpendiculaire au plan de flexion. Cette droite RR_1 sera la trace de la *surface neutre* du solide, dans le cas de flexions très-petites et d'une résultante P des forces extérieures sensiblement perpendiculaire à la longueur du solide et agissant sur toute sa largeur. Nous pourrons donc appliquer à l'ensemble de ces lames tous les raisonnements précédents.



Dès lors U étant la largeur du solide à une distance quelconque v de la surface neutre, et cette largeur U embrassant $\frac{U}{du}$ lames, chacune de l'épaisseur du, il suffira de multiplier les expressions ci-dessus par ce quotient qui exprime le nombre des lames pour qu'elles deviennent applicables à un solide ainsi décomposable.

Conservant d'ailleurs les mêmes notations, on aura (33) et (34) pour la valeur des forces d'extension et de compression

$$R = \frac{E}{\rho}\int_0^{v_1} U v\, dv \quad \text{et} \quad R_c = \frac{E}{\rho}\int_0^{v'} U v\, dv \ldots (40)$$

et ces quantités seront égales entre elles ainsi que nous l'avons vu (33).

Enfin l'on aura de même (37) et (38)

$$\Sigma(Px) = \frac{E}{\rho}\left[\int_0^{v_1} U v^2 dv + \int_0^{v'} U v^2 dv\right] = \frac{E}{\rho}\dot{I} \ldots (41)$$

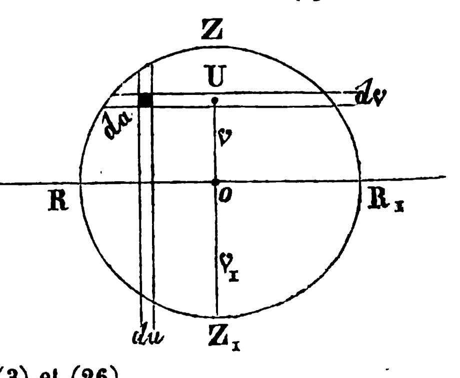
Ces équations sont générales dans les limites et hypothèses indiquées. On en fera facilement l'application lorsque ρ sera connu, $\dot{I}$ étant toujours donné par la forme de la section transversale et E par la nature ou la substance du solide, comme on le verra plus loin.

Si l'on fait $E\dot{I} = M$, la dernière équation prend la forme

$$\frac{M}{\rho} = \Sigma(Px) \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

M est alors ce que *Navier* a appelé *moment d'élasticité du solide.*

35. *Travail dépensé sur la partie* APTD *de la pièce pour produire une petite flexion.* Considérons maintenant la *figure* 1 de la *planche* CVIII comme le profil d'une pièce dont la section transversale est donnée par la *figure* ci-jointe.



$U\,dv$ étant la section de la couche du solide parallèle à la surface neutre, et qui est située à une distance quelconque v de cette surface RR_1, et δx l'allongement qu'elle subit, l'effort t qui rendrait cet allongement stable est (3) et (26)

$$\frac{E.U\,dv\,\delta x}{\Delta x} = \frac{E}{\rho} U v\, dv = t \ldots \ldots \ldots (43)$$

Mais, pour allonger ou raccourcir cette couche de δx, il faut (6) dépenser un travail

$$\frac{t^2 . \Delta x}{2 \mathrm{E} \mathrm{U} dv} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{E} . \Delta x . \mathrm{U}}{2 \rho^2} v^2 dv \ldots \ldots \quad (44)$$

donc, pour allonger et raccourcir toutes les couches de la section TP, le travail à dépenser sera la somme de toutes les quantités semblables ou

$$\frac{\mathrm{E} . \Delta x}{2 \rho^2} \left[\int_0^{\mathrm{V}_1} \mathrm{U} v^2 dv + \int_0^{\mathrm{V}'} \mathrm{U} v^2 dv \right] = \frac{\mathrm{E i}}{2 \rho^2} \Delta x . \; . \; . \quad (45)$$

car la parenthèse est le moment d'inertie i de la section constante du solide. Or, l'équation (39) donne la relation

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\mathrm{P}^2 x^2}{\mathrm{E}^2 \mathrm{I}^2}$$

Faisant cette substitution dans (45), il vient pour le travail dépensé sur la section TP située à la distance x

$$\frac{\mathrm{P}^2}{2 \mathrm{E I}} x^2 \Delta x \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

et pour le travail total T_x dépensé sur l'extension et la compression de toutes les sections entre $x = 0$ et $x = x$, en passant à la limite,

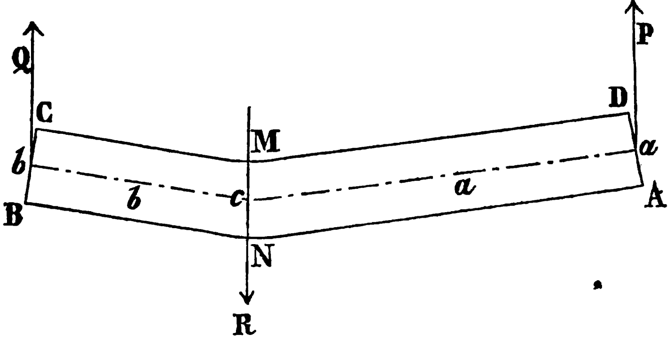
$$\mathrm{T}_x = \frac{\mathrm{P}^2}{2 \mathrm{E I}} \int_0^x x^2 \, dx = \frac{\mathrm{P}^2 x^3}{6 \mathrm{E I}} \ldots \ldots \quad (47)$$

P étant l'effort capable de maintenir le degré de flexion supposé.

36. *Expression, en fonction des forces extérieures, du travail total dépensé pour produire la flexion d'une pièce de section constante.*

I étant supposé constant, la flexion très-petite et les forces extérieures ou les résultantes P, Q, R des forces capables de maintenir la flexion supposées elles-mêmes sensiblement perpendiculaires à la longueur primitive de la pièce, on a, d'après l'équation (47) pour le travail T_p dépensé sur la flexion de la partie AN de la pièce, en faisant $c a = a$, :

$$\mathrm{T}_p = \frac{\mathrm{P}^2 a^3}{6 \mathrm{E I}} = \frac{\mathrm{P}}{2} \times \frac{\mathrm{P} a^3}{3 \mathrm{E I}} \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$



On aurait de même, en faisant $b\,c = b$ pour le travail T_q dépensé pour produire la flexion de la partie BN :

$$T_q = \frac{Q^2 b^3}{6 E I} = \frac{Q}{2} \times \frac{Q b^3}{3 E I} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

On aurait donc, pour le travail total T ou pour la somme des travaux partiels dépensés sur la flexion de la pièce entière, L étant la longueur $(a + b)$ de cette pièce :

$$T = \frac{P^2 a^3 + Q^2 b^3}{6 E I} = \frac{R^2 (a b)^2}{6 E I L} = \frac{R}{2} \times \frac{R (a b)^2}{3 E I L} \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

en remarquant que l'égalité des moments donne

$$\left.\begin{aligned} & P L = R b \quad \text{et} \quad Q L = R a \; . \; . \; . \; . \; . \\ \text{ou} \quad & P^2 a^3 + Q^2 b^3 = \frac{R^2}{L^2} a^2 b^2 (a + b) = \frac{R^2 (a b)^2}{L} \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

P, Q, R désignent les intensités *finales* de forces qui ont dû croître en même temps que la flexion de la pièce.

Si R est appliquée au milieu de la pièce $a = b = \frac{L}{2}$ et l'expression du travail total T devient simplement

$$T = \frac{L^3 R^2}{96 E I} = \frac{R}{2} \cdot \frac{R L^3}{48 E I} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

37. *Expression, en fonction des chemins parcourus, des travaux dépensés sur la flexion d'une pièce de section constante.* Conservons les mêmes notations et hypothèses que ci-dessus, et supposons d'abord la section MN absolument fixe.

Soit f le chemin total parcouru pendant la flexion par le point d'application de la force extérieure dont l'intensité finale est P, nous aurons en général

$$T_p = \int P\,df \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

d'où, en différentiant :

$$\frac{dT_P}{df} = \frac{dT_P}{df} \cdot \frac{dP}{dP} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

or l'équation (48) donne, en la différentiant, :

$$\frac{dT_P}{dP} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Pa^3}{3EI} \cdot \frac{dP}{df} \quad \text{et} \quad \frac{df}{dP} = \frac{a^3}{3EI} \; . \; . \; (55)$$

intégrant cette dernière, il vient pour le chemin f, en fonction de la force P capable de maintenir la flexion f :

$$f = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \text{et} \quad P = \frac{3EI}{a^3} f \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

ainsi la flexion f est proportionnelle à l'effort P et au cube a^3 de son bras de levier.

Si le travail total de la flexion était dû à la force dont nous avons représenté l'intensité finale par R, les points d'application des autres forces finales P et Q ne parcourant alors aucun chemin, on obtiendrait de même, en désignant par F le chemin perpendiculaire à la longueur de la pièce, parcouru par le point d'application de la force variable R :

$$F = \frac{R(ab)^2}{3EIL} \quad \text{et} \quad R = \frac{3LEI}{(ab)^2} \cdot F \quad (57)$$

de sorte que, si R agissait au milieu de la pièce, on aurait, à cause de $a = b = \frac{L}{2}$

$$F = \frac{RL^3}{48EI} \quad \text{et} \quad R = \frac{48EI}{L^3} F \; . \; . \; . \; . \; (58)$$

Substituant ces valeurs (56) (57) et (58) de P et de R, dans les équations (48) (50) et (52), on obtient pour l'expression des travaux respectifs T_P et T en fonction des chemins parcourus par les points d'application de P et de R :

$$T_P = \frac{3EIf^2}{2a^3} = \frac{P}{2} f \quad \text{et} \quad T = \frac{3EILF^2}{2(ab)^2} = \frac{R}{2} F \; . \; . \; (59)$$

et enfin, lorsque l'effort R est appliqué au milieu de la pièce

$$T = \frac{24EIF^2}{L^3} = \frac{R}{2} F \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (60)$$

38. Si l'effort R, capable de maintenir la flèche F, était, dès le commencement de la flexion, remplacé par un poids égal à R et libre de descendre avec le milieu de la pièce, le travail

$$RF = R \cdot \frac{RL^3}{48EI}$$

dû à la descente de ce poids de la hauteur F serait le double de celui (52) qui serait rigoureusement nécessaire pour produire la flexion F. Donc, après avoir produit cette flèche, il conserverait une force vive capable de déterminer un nouvel accroissement de flèche égal à F; mais cet accroissement ne pouvant persister, puisque R est seulement capable de maintenir la pièce fléchie de F, il naîtrait autour de la position de l'axe neutre correspondante à F une série d'oscillations analogue à celle que nous avons étudiée, §§ 22 et suivants. Les ébranlements du sol produisent sur les poutres des planchers chargés des effets de ce genre.

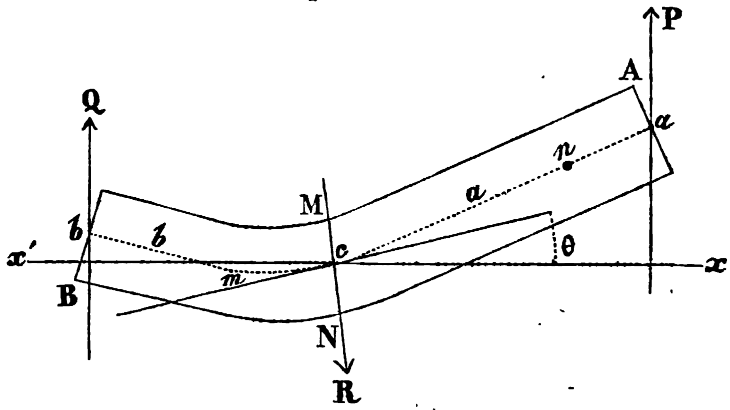
39. *Equation de l'axe neutre d'une pièce fléchie, de section constante.* L'équation (39) nous a donné pour la valeur ρ du rayon de courbure en un point dont l'abscisse est x (*fig.* 1, *pl.* CVIII)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\Sigma(\mathrm{P}x)}{\mathrm{EI}}$$

Au point n pour lequel le bras de la force P qui maintient la pièce fléchie est $(a-x)$: on aura donc

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{P}(a-x)}{\mathrm{EI}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

le point c de l'axe neutre par lequel passe la direction de l'effort R étant pris pour origine des coordonnées et l'axe des abscisses $x\,x'$ parallèle à la longueur de la pièce avant la flexion.



Or l'expression générale du rayon de courbure au point n d'une courbe qui a x et y pour coordonnées est (pag. 433)

$$\rho=\frac{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$\frac{dy}{dx}$ exprime d'ailleurs (pag. 429) la tangente de l'angle formé avec l'axe des abscisses par le prolongement de l'élément de la courbe situé en n ou qui a x et y pour coordonnées. La théorie supposant toujours les flexions extrêmement petites, cet angle sera extrêmement petit; il en sera a peu près de même de sa tangente, et dès lors le carré $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ de cette tangente sera *à fortiori* tellement petit qu'il pourra devenir négligeable devant 1; ce qui permettra de réduire l'expression générale du rayon de courbure à

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots \quad (62)$$

et de transformer (61) en

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(a-x)}{EI} \dots \dots \quad (63)$$

Intégrant une première fois l'équation ci-dessus, appelant θ l'angle formé par la tangente à l'axe neutre, à l'origine c, avec l'axe des abscisses et tang. θ étant dès lors la valeur de $\frac{dy}{dx}$ au point c, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + \text{tang.}\,\theta \dots \quad (64)$$

Intégrant une seconde fois, on a pour *l'équation approchée de la partie de l'axe neutre comprise entre c et* A

$$y = \frac{P}{EI}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + x\,\text{tang.}\,\theta \dots \quad (65)$$

Procédant absolument de la même manière à l'égard de la partie cb de la pièce, x' et y' étant les coordonnées courantes de cette partie pour laquelle tang. θ devient négative, on obtient d'abord :

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Q}{EI}\left[bx' - \frac{x'^2}{2}\right] - \text{tang.}\,\theta \dots \quad (66)$$

puis, pour l'*équation de cette partie de l'axe neutre :*

$$y' = \frac{Q}{EI}\left[\frac{bx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right] - x'\,\text{tang.}\,\theta \dots \quad (67)$$

de sorte que, tant que a et b pourront être considérés comme sen-

siblement égaux aux abscisses X et X′ des points extrêmes *a* et *b* de l'axe neutre, on aura pour les ordonnées de ces points

$$Y = \frac{Pa^3}{3EI} + a \text{ tang.}\theta \quad \text{et} \quad Y' = \frac{Qb^3}{3EI} - b \text{ tang.}\theta. \quad (68)$$

tang.θ deviendrait nulle, si l'une des parties AM ou BM de la pièce était solidement encastrée.

40. *Si les extrémités de la pièce portent sur deux appuis fixes*, les forces P et Q sont les réactions de ces appuis, et l'on a évidemment alors

$$\left.\begin{array}{l} Y = Y' \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{d'où} \quad Y - Y' = 0 = \dfrac{Pa^3 - Qb^3}{3EI} + (a+b)\text{ tang.}\theta \end{array}\right\} \quad (69)$$

or, l'égalité des moments donne

$$PL = Rb \quad \text{et} \quad QL = Ra \quad \text{d'où} \quad Pa^3 - Qb^3 = Rab(a-b) \ldots \quad (70)$$

il en résulte, pour la valeur de tang.θ à cause de $(a+b) = L$

$$\text{tang.}\theta = \frac{Qb^3 - Pa^3}{3EIL} = \frac{Rba(b-a)}{3EIL} \ldots\ldots \quad (71)$$

tangente qui devient nulle, lorsque $b = a$.

41. *Inclinaison des éléments extrêmes de l'axe neutre sur la direction primitive xx' de cet axe.*

α et β désignant respectivement les angles des éléments extrêmes *a b* de l'axe fléchi avec l'axe des abscisses, l'équation (64) donne, par substitution

$$\text{tang.}\alpha - \text{tang.}\theta = \frac{Pa^2}{2EI} \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

et l'on tire de même de l'équation (66)

$$\text{tang.}\beta + \text{tang.}\theta = \frac{Qb^2}{2EI} \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

substituant la dernière valeur (71) de tang.θ dans les équations (72) et (73), il vient, après les réductions indiquées (70), pour les tangentes cherchées :

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang.}\alpha = \dfrac{Rab(a+2b)}{6EIL} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\beta = \dfrac{Rab(b+2a)}{6EIL} \\ \dfrac{\text{tang.}\alpha}{\text{tang.}\beta} = \dfrac{L+b}{L+a} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (74)$$

et si $a = b$, $\text{tang.}\,\alpha = \text{tang.}\,\beta = \frac{RL^2}{16EI}$

42. *Pour déterminer le point m où la tangente à l'axe neutre est parallèle à l'axe des abscisses,* c'est-à-dire à la direction primitive de l'axe neutre avant la flexion, il suffira de faire $\frac{dy^1}{dx^1} = 0$ dans l'équation (66), d'y substituer pour tang. θ sa valeur tirée de (71), d'y exprimer Q en fonction de R (70) et enfin de la résoudre par rapport à x', ce qui donnera pour l'abscisse du point cherché

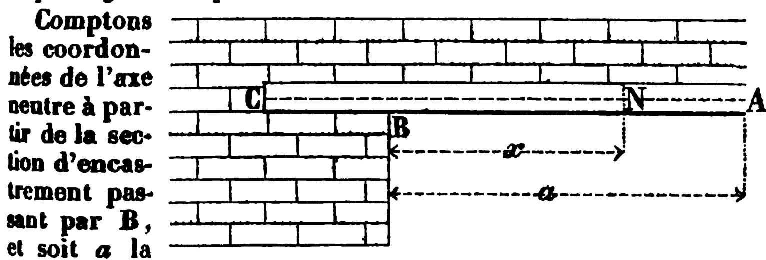
$$x' = b \pm \sqrt{\frac{b}{3}(b + 2a)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (75)$$

abscisse x' qui devient nulle pour $b = a$

Nous allons indiquer maintenant quelques applications générales des méthodes qui précèdent et qui contiennent implicitement la solution des questions pratiques relatives à l'extension, à la compression et à la flexion des solides.

43. *Pièce* ABC *dite encastrée et chargée sur toute sa longueur de* p *kilogrammes par mètre courant.*

Comptons les coordonnées de l'axe neutre à partir de la section d'encastrement passant par B, et soit a la longueur de la partie qui n'est pas encastrée.



Prenons un point quelconque N de l'axe neutre, la portion NA de cet axe porte un poids $p(a - x)$. Ce poids peut être considéré comme réuni au milieu de NA, son moment par rapport à la section verticale passant par N est donc

$$p(a - x)\frac{(a - x)}{2} = \frac{p}{2}(a - x)^2. \quad . \; . \; . \quad (76)$$

Ce moment est égal à la somme des moments des réactions élastiques de cette même section N, et cette somme (39) est $\frac{EI}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de l'axe neutre au point N. Mais (62) on a par approximation $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$; donc

$$\frac{EI}{\rho} = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p(a-x)^2}{2} \ldots \ldots \quad (77)$$

Intégrant une première fois en remarquant qu'à l'origine $x = 0$, $y = 0$ et tangente $= \frac{dy}{dx} = 0$, puisque l'on suppose la partie BC *encastrée*, c'est-à-dire jouissant d'une rigidité parfaite, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p[a^3 - (a-x)^3]}{6EI} \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

44. *Equation de l'axe neutre.* Intégrant l'équation ci-dessus entre $x = 0$ et $x = x$, il vient pour l'équation de l'axe neutre, à partir de la section d'encastrement B

$$y = \frac{p}{24EI}\left[(a-x)^4 + 4a^3x - a^4\right] \ldots \quad (79)$$

45. *Flexion du point extrême* A. On obtiendra évidemment la quantité Y dont le point A s'abaisse en mettant la valeur a de son abscisse à la place de x dans l'équation (79), d'où

$$Y = \frac{pa^4}{8EI} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

relation simple qui permet de régler les dimensions de la pièce, de manière que son point extrême ne s'abaisse que d'une quantité déterminée.

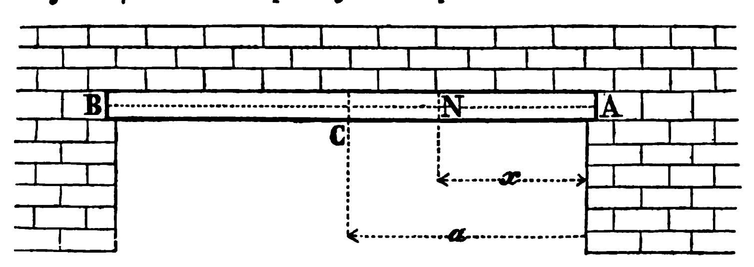
46. Si l'on compare cet abaissement à la déflexion qui a été déterminée (68), on voit que, lorsqu'une charge est uniformément répartie sur la longueur d'un solide encastré par une extrémité, la flexion de l'extrémité libre est précisément celle que causerait un effort P égal aux $\frac{3}{8}$ de la charge pa, et qui serait appliqué à cette extrémité : remarque qui permettra d'introduire facilement l'influence du poids propre du solide dans les problèmes précédents.

47. *Inclinaison de l'élément extrême* A *de l'axe neutre sur l'horizontale.* α étant l'angle formé par cet élément avec l'horizontale, tang. α est l'inclinaison cherchée. Or tang. α est la valeur de $\frac{dy}{dx}$ au point A dont l'abscisse x est a : il suffit donc de faire ces substitutions dans l'équation (78) pour obtenir

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{pa^3}{6EI} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

C'est l'inclinaison que prendrait l'élément extrême s'il était soumis à un effort unique égal au tiers de pa (72).

48. *Pièce de longueur $2a = L$ supportée à ses deux extrémités, et chargée uniformément de p kilogrammes par mètre courant.*



Prenons l'extrémité A pour origine des coordonnées d'un point quelconque N de l'axe neutre. La partie AN de la pièce porte un poids px qui peut être considéré comme appliqué au milieu de NA, ce qui donne $\frac{px^2}{2}$ pour le moment avec lequel la charge ferait tourner NA autour de la section N et de haut en bas; mais la réaction de bas en haut du point fixe A est la charge pa qu'il porte et son bras de levier par rapport à N est x : son moment est donc $= (-pax)$. Egalant cette somme algébrique de moments au moment des forces élastiques développées dans la section N, il vient (62)

$$\frac{E\dot{I}}{\rho} = E\dot{I}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} - pax \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

Intégrant depuis $x = x$ jusqu'à $x = a$, en observant qu'à cette dernière limite la tangente $\frac{dy}{dx} = o$, puisque y atteint évidemment sa valeur maximum Y pour le milieu C de la pièce, on a

$$E\dot{I}\frac{dy}{dx} = \frac{p}{6}(x^3 - a^3) - \frac{pa}{2}(x^2 - a^2) \quad \ldots \quad (83)$$

49. *Equation de l'axe neutre.* On l'obtiendra encore en intégrant (83) entre les limites $x = x$ et $x = a$, ce qui donnera pour l'équation de la moitié de l'axe neutre

$$E\dot{I}y = \frac{p}{6}\left(\frac{x^4}{4} - a^3x\right) - \frac{pa}{2}\left(\frac{x^3}{3} - a^2x\right) \quad \ldots \quad (84)$$

50. *Plus grande déflexion ou flèche Y de la pièce.* On obtiendra évidemment cette flèche en faisant $x = a$ dans l'équation ci-dessus, donc

$$Y = \frac{5}{24}\cdot\frac{pa^4}{E\dot{I}} = \frac{5}{8}\frac{(2pa)L^3}{48E\dot{I}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{RL^3}{48E\dot{I}} \quad \ldots \quad (85)$$

en faisant $R =$ la charge totale $2pa$; ce qui montre que la flèche d'une pièce uniformément chargée est la même que si les $\frac{5}{8}$ de la charge totale étaient réunis en son milieu (58), et permet d'introduire facilement l'influence du poids propre des solides dans les problèmes.

51. *Inclinaison sur l'horizon des éléments extrêmes* A *et* B *de l'axe neutre.* Prenant toujours α pour représenter l'angle de l'élément A avec l'horizon, tang. α sera l'inclinaison cherchée ou la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (83) lorsque l'on y fera $x = o$; donc

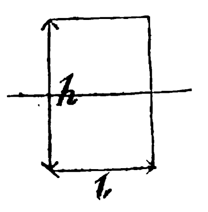
$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{pa^3}{3E\dot{I}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

C'est l'inclinaison que prendrait l'un et l'autre élément extrême si un effort unique égal au $\frac{2}{3}$ de la charge $(2pa)$ uniformément répartie agissait seul au milieu de la pièce (74).

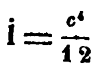
J'en ai dit assez, je l'espère, pour que les ingénieurs à qui cette théorie inspire confiance puissent facilement en faire l'application aux cas particuliers de leur pratique. Il leur suffira alors d'introduire dans ces formules générales, à la place de $\dot{I}$, le *moment d'inertie* de la section constante du solide, et le nombre E ou le module d'élasticité qui convient à sa substance, après l'avoir toutefois déterminé eux-mêmes à l'aide d'observations directes sur les matières mêmes qu'ils emploient. On verra plus loin à quelles erreurs on s'exposerait parfois en prenant les valeurs de E parmi les moyennes que donnent les tables des formulaires.

53. *Moments d'inertie* $\dot{I}$. Les moments d'inertie $\dot{I}$ dont il est ici question ne doivent pas être confondus avec les moments d'inertie de masse qui ont été déterminés page 1162. Bien qu'il soit facile de passer des uns aux autres, j'épargnerai ce calcul pour les cas que l'on rencontre habituellement, on a

Section rectangulaire dont h est l'épaisseur et l la largeur $\dot{I} = \frac{lh^3}{12}$



Section carrée dont le côté est c, et quel que soit l'angle que les côtés font avec l'horizon



$$\dot{I} = \frac{c^4}{12}$$

Section circulaire de rayon r : $\dot{I} = \frac{\pi r^4}{4}$

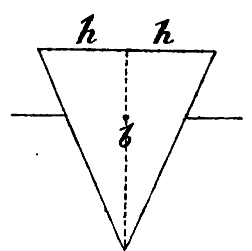
Section triangulaire pouvant se décomposer en deux triangles rectangles dont la base commune est b et la hauteur respective h ; savoir :

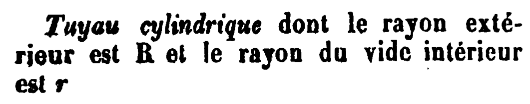
Quand la base est horizontale,

$$\dot{I} = \frac{b\,h^3}{18}$$

Quand la base b commune est verticale,

$$\dot{I} = \frac{h\,b^3}{18}$$



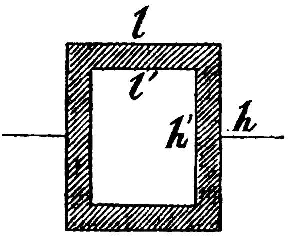


Tuyau cylindrique dont le rayon extérieur est R et le rayon du vide intérieur est r

$$\dot{I} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

Tube rectangulaire

$$\dot{I} = \frac{(l\,h^3 - l'\,h'^3)}{12}$$



Enfin on emploie beaucoup aujourd'hui une poutre dont M. *Hodgkinson* a, le premier, montré tous les avantages et dont la forme générale est indiquée ci-dessous. L'expression théorique du moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par son centre de gravité est

$$\dot{I} = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{12}\left[A\,a^2 + B\,b^2 + C\,c^2\right] \\ + \frac{1}{4}\left[A\,(a+c)^2 + B(b+c)^2\right] \\ - \frac{1}{4}\left[\frac{B\,(b+c) - A\,(a+c)}{S}\right] \end{array} \right)$$

expression dans laquelle A est l'aire du rectangle supérieur, B celle du rectangle inférieur, C celle du rectangle qui réunit les deux premiers ; a, b, c les hauteurs verticales respectives de ces rectangles, et S la section totale A+B+C de la poutre.

Lorsque les épaisseurs ou hauteurs a et b seront très-petites par

rapport à c, on pourra négliger a et b dans les deux derniers termes et il viendra

$$\dot{\mathrm{I}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12}\left[\mathrm{A}a^2+\mathrm{B}b^2+\mathrm{C}c^2\right] \\ +\frac{c^2}{4}\left[\frac{4\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}}{\mathrm{S}}\right] \end{array} \right\}$$

Et enfin, si les rectangles supérieur et inférieur ont des bases égales et des hauteurs égales, on a

$$\dot{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{A}}{6}\left[a^2+3(a+c)^2\right]+\frac{\mathrm{C}c^3}{12}$$

54. Essayons maintenant de soumettre la théorie de la résistance des matériaux au contrôle de l'expérience. Les anciennes observations que nous avons résumées à l'article *Fer et Fonte* indiquaient déjà, quant à ces deux substances, quelques discordances assez importantes entre les faits et les hypothèses fondamentales (§§ 1 à 11). Nous allons voir, à regret, ces discordances non-seulement confirmées en principe, mais encore étendues, amplifiées par les observations et les études si célèbres aujourd'hui des commissaires anglais.

55. On sait que en 1847, sous l'administration de *Lord Grey*, le Gouvernement anglais créa une commission spécialement chargée d'étudier les questions auxquelles pouvait donner lieu l'emploi du fer et de la fonte dans la construction des chemins de fer. Cette commission fut composée de *Lord Wrottesley*, du professeur *Robert Willis*, du capitaine au corps des ingénieurs *Henry James*, des ingénieurs civils *George Rennie* et *William Cubitt*, et enfin de M. *Eaton Hodgkinson*, depuis longtemps connu par les expériences grandioses et sévères dont il avait antérieurement publié les résultats, et dont la Commission elle-même se complaît à reconnaître les éminents services par une mention spéciale. C'est au rapport de cette Commission illustre, publié en 1849, sous le titre de *Report of the commissioners*, par les soins de son secrétaire M. le lieutenant aux ingénieurs *Douglas Galton*, c'est aussi aux *Recherches expérimentales* qui appartiennent en propre à M. *Eaton Hodgkinson* (*experimental Researches*, 1846) que j'emprunte les résultats d'expériences que je vais présenter, et que j'ai tous calculés avec les plus grands soins.

J'indique d'ailleurs les pages de renvoi des deux ouvrages originaux, afin que les ingénieurs qui désirent, avec raison, remonter aux sources, puissent le faire plus facilement.

56. Allongement du fer (*Report*, page 49).

Le fer est de la meilleure qualité. — La barre essayée est ronde. — Son diamètre = 0m.01313 ; sa longueur primitive L = 14m.98698 ; sa section A = 0mm.0001353855. Elle a été chauffée au rouge avant l'essai, puis refroidie lentement.

Rapport des charges.	Charges par mètre carré ou $\frac{P}{A}$	Allongements par mètre = $\frac{e}{L}$. réels.	supposés proportionnels.	Elongations permanentes par mètre.
	kil.	m.	m.	
1	1 875 401.38	0.000 082 2	0.000 082 2	Perceptible.
2	3 750 802.76	0.000 185 6	0.000 164 4	*Id.* après 1 heure.
3	5 626 204.15	0.000 283 9	0.000 246 6	0.000 002 5
4	7 501 605.53	0.000 379 7	0.000 328 8	0.000 003 4
5	9 377 006.90	0.000 475 5	0.000 411 0	0.000 004 6
6	11 252 408.28	0.000 571 2	0.000 493 2	0.000 005 1
7	13 127 809.66	0.000 666 1	0.000 575 5	0.000 006 8
8	15 003 211.04	0.000 766 1	0.000 657 6	0.000 012 7

57. *Défaut d'élasticité.* Ce premier tableau dévoile dans le fer une affection que M. *Hodgkinson* a désignée sous le nom de *défaut d'élasticité*, et qui consiste en ce que, dès les plus petites charges par mètre carré, il se décèle une élongation permanente dont l'étendue par mètre de longueur est portée dans la 5me colonne.

Ainsi, lorsque la barre est déchargée, elle ne reprend pas sa longueur primitive; et, pour me servir de l'expression consacrée par la théorie, la barre atteint sa *limite d'élasticité* (§ 2) sous les plus faibles charges, et dès lors bien avant d'être soumise à l'effort de 12 à 14 kil. par millimètre carré de section que l'on regardait naguère comme celui qui correspondait à cette limite. Cet effet d'élongation permanente n'est pas particulier à cette barre; il s'est constamment reproduit dans toutes les observations de M. *Hodgkinson*, souvent à la plus faible charge, et quelle qu'ait été la substance, fer, fonte, bois ou pierre, qu'il ait soumise à l'expérience. Nous verrons tout à l'heure que la compression donne lieu, aussi bien que l'extension, à une variation permanente de la longueur primitive des solides. L'*altération de l'élasticité* semble être ainsi une conséquence nécessaire de l'action des forces même les plus faibles sur les corps solides, une loi de la nature physique de ces corps précisément contraire à l'hypothèse de la théorie (§ 2). M. *Hodgkinson* a démontré et proclamé cette loi, dès 1843, devant l'association britannique pour l'avancement des sciences (voyez ses *Researches*, page 411 et autres).

58. *Rapport des extensions aux charges.* La troisième colonne du tableau montre, avec évidence, que les quantités dont le fer s'al-

longe sous des charges successives croissent plus rapidement que ces charges. Ce fait est confirmé, *sans aucune exception*, par toutes les expériences consignées dans le *Report*. J'ai indiqué dans la quatrième colonne les valeurs successives que les allongements par mètre auraient dû prendre, si le rapport déduit de la plus faible charge demeurait constant.

59. *Module d'élasticité* E *du fer relatif à l'extension* (§ 7, sixième hypothèse). Les extensions par mètre $\frac{e}{L}$ croissant plus rapidement que les charges $\frac{P}{A}$ par mètre carré de section, il est clair que le module E, qui n'est (2) que le quotient $\frac{P}{A} \cdot \frac{L}{e}$ de ces charges $\frac{P}{A}$ par ces allongements $\frac{e}{L}$ n'aura pas une valeur constante.

Ainsi la première ligne du tableau nous donnera

$$E_1 = 22\,813\,020\,478$$

la deuxième $E_2 = 20\,208\,794\,386$

la troisième $E_3 = 19\,816\,683\,485$

Et, suivant que l'on prendrait pour la valeur du module E le résultat E_1 de la première observation, qui correspond à des charges très-faibles, ou celui E_3, qui correspond à peu près aux plus grands efforts d'extension que l'on fasse habituellement subir au fer dans les constructions, on obtiendrait pour les efforts P (3), capables de produire sur une même barre la même extension par mètre, des valeurs qui seraient entre elles à peu près :: 115 : 100, différence que l'on ne soupçonnerait pas à l'inspection de la courbe tracée *planche* CVIII, et qui est pourtant la traduction graphique du tableau précédent sur une grande échelle.

60. Une moyenne entre les trois valeurs ci-dessus donnerait E = 20 946 166 116 pour ce fer d'excellente qualité (*best*). Des fers moins bons ont donné à M. *Hodgkinson* une moyenne E = 16 778 448 297 (voyez page 172 du *Report*), et l'expérience de M. *Bornet*, que j'ai rapportée (page 753), élèverait la valeur du module d'extension du fer sur lequel il a opéré jusqu'à E = 25 000 000 000. Ces chiffres très-variables justifieront, je crois, la nécessité, signalée plus haut, de déterminer directement le module d'élasticité E des fers qu'on devra employer.

61. *Observations sur la rupture*. En vue d'abréger, je n'ai pas prolongé le tableau ci-dessus jusqu'à la rupture de la barre ; elle a eu lieu sous une charge = 37 507 887^k par mètre carré. La non-proportionnalité des extensions aux charges est devenue de plus en

plus saillante; enfin la charge 35 632 577^k par mètre, qui a précédé celle qui a déterminé la rupture, avait porté l'allongement par mètre à $\frac{e}{L} = 0^m.034959$ et l'élongation permanente à $0^m.03284$.

62. Compression longitudinale du fer (*Report*, page 122).

La barre soumise à la compression longitudinale a : longueur $L = 3^m.04794$, sa section carrée $A = 0^{mm}.00066856795$.

Le mode d'expérimentation adopté rendait complétement impossible la flexion de la barre (voyez le *Report*).

CHARGES par mètre carré $\frac{P}{A}$.	COMPRESSIONS par mètre $\frac{e}{L}$.	MODULES DIVERS de compression C.
kil. 3 467 679.2	m. 0.000 225 0	15 411 911 111
6 516 871.2	0.000 391 7	16 638 573 000
9 565 063.2	0.000 558 3	17 132 480 000
12 613 255.2	0.000 741 7	17 005 872 000
14 137 350.2	0.000 833 3	16 965 498 800
15 661 447.2	0.000 941 7	16 631 000 000
17 185 543.2	0.001 066 7	16 110 943 000
18 709 639.2	0.001 191 7	15 699 957 000
20 233 735.2	0.001 358 3	14 896 367 000

63. *Défaut d'élasticité.* Le rapport constate (p. 122) que la compression a déterminé des raccourcissements permanents; mais il n'en donne pas la valeur, et se contente de les exprimer par une formule (p. 123) qui laisse quelques doutes, non sur le fait des contractions permanentes, mais sur l'étendue de celles-ci. L'élasticité du fer est donc altérée par la compression aussi bien que par l'extension, et nous verrons tout à l'heure qu'il en est de même pour la fonte, sous les plus faibles charges.

64. *Rapport des accourcissements aux efforts, et module de compression.* Le tableau montre d'ailleurs qu'il n'y a point proportionnalité entre les accourcissements et les charges, car les modules de compression C sont variables. On voit, en effet, les quantités dont la barre se comprime croître d'abord *moins rapidement* que les charges, jusques et y compris celle de 9^k.56 par millimètre carré; puis croître ensuite *plus rapidement* que les charges, ainsi que l'indique d'ailleurs la courbe ou traduction graphique de cette expérience à la *planche* CVIII.

65. Cette courbe des compressions est, en outre, parfaitement séparée de celle des extensions, ce qui semble indiquer que, dès les premiers efforts, la loi de la compression du fer est autre que la loi de son extension.

Il en résulte que, s'il n'y a pas d'erreur trop forte à craindre, en supposant que les très-faibles variations de longueur du fer sont *proportionnelles* aux efforts (§§ 3 et 9, deuxième et septième hypothèses), il y a lieu toutefois de distinguer le cas de l'extension de celui de la compression : car ils n'offrent pas la même proportionnalité. En d'autres termes, la théorie paraît devoir être amenée à distinguer le module d'extensibilité E du fer de son module de compressibilité C qu'elle confond aujourd'hui (§ 11), en vue de simplifier les formules de flexion qui deviennent ainsi doublement inexactes.

66. Flexions du fer forgé (*Report*, page 39).

La barre placée horizontalement et de champ porte par ses deux extrémités sur des rouleaux. L'effort qui la fléchit agit *horizontalement* en son milieu. La distance L entre les appuis $=4^{m}.114726$. Dimensions de la barre rectangulaire dans le sens de l'effort $h=0^{m}.038481$, et dans l'autre sens $l=0^{m}.140284$.

	EFFORTS au milieu = R.	FLÈCHES F après 5 minutes.	Flèches permanentes après 5 minutes.	Flèches supposées proportionnelles.
	k.	m.	m.	m.
1	12.6996	0.001 295	0	0.001 295
2	25.3992	0.002 845	0	0.002 591
4	50.7985	0.005 893	0	0.005 182
6	76.1977	0.008 737	0.000 025 4	0.007 770
8	101.5970	0.011 633	0.000 050 8	0.010 360
10	126.9962	0.014 503	0.000 076 2	0.012 95
	. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
20	253.9921	0.028 549	0.000 203 2	0.025 90

67. Ainsi les flèches F croissent un peu plus rapidement que les efforts R de flexion : ce qui semble indiquer que, dans ce genre de déformation, l'extension des fibres a plus d'influence que la compression. La tendance des flèches à croître plus rapidement que les efforts est très-manifeste dans toutes les expériences consignées au *Report*. Quant à l'altération de l'élasticité indiquée par les flèches permanentes qui persistent après l'enlèvement des charges, elle ne se décèle pas habituellement sous les charges très faibles; mais il faut remarquer que ces charges n'ont, en général, agi que durant cinq minutes.

68. Si l'on essayait de tirer de la première expérience du tableau ci-dessus un coefficient ou *module de flexibilité* E, on trouverait en partant de la formule (58), après y avoir introduit le moment d'inertie $\frac{lh^3}{12}$ qui convient à la section de la barre

$$E=\frac{1}{4l}\left(\frac{L}{h}\right)^3\cdot\frac{R}{F}$$

et

$$E=18\ 217\ 285\ 182$$

La seconde observation donnerait

$$E = 16\ 584\ 449\ 733$$

La première valeur de E tirée de la flexion apparaît comme une sorte de *résultante* des deux modules E et C d'extensibilité et de compressibilité trouvés plus haut, et semble indiquer encore la nécessité de reconnaître en eux deux quantités distinctes.

Passons à l'étude de la fonte.

69. Extensions et compressions de la fonte.

Les barreaux soumis à l'extension et à la compression sont de même fonte, de même longueur $L = 3^{m}.0479$, et de même section carrée $A = 0^{mm}.0006451366$.

Extensions (*Report*, pages 107 et 59).

	CHARGES par mètre carré $\frac{P}{A}$	Allongements par mètre $\frac{e}{L}$ réels.	Allongements par mètre $\frac{e}{L}$ supposés proportionnels.	ALLONGEMENTS permanents par mètre.
	k.	m.	m.	m.
1	740 842.46	0.000 075	0.000 075 0	
1.5	1 111 263.69	0.000 114	0.000 112 5	0.000 001 833
2	1 481 684.92	0.000 155	0.000 150	0.000 004 542
3	2 222 527.38	0.000 239	0.000 225	0.000 008 917
4	2 963 369.84	0.000 326	0.000 300	0.000 014 583
5	3 704 212.30	0.000 417	0.000 375	0.000 022 083
6	4 445 054.77	0.000 511	0.000 450	0.000 031 000
7	5 185 897.23	0.000 612	0.000 525	0.000 043 083
8	5 926 739.68	0.000 716	0.000 600	0.000 055 333
9	6 667 582.15	0.000 829	0.000 675	0.000 070 333
10	7 408 424.61	0.000 947	0.000 750	0.000 088 500

70. Compressions (Fonte) (*Report*, pages 107 et 67).

	CHARGES par mètre $= \frac{P}{A}$.	Compressions par mètre $= \frac{c}{L}$ réelles.	Compressions par mètre $= \frac{c}{L}$ supposées proportionnelles.	ACCOURCISSEMENTS permanents par mètre.
	k.	m.	m.	m.
1	1 451 598.32	0.000 156	0.000 156	0.000 003 917
2	2 903 196.65	0.000 323	0.000 312	0.000 018 833
3	4 354 794.97	0.000 498	0.000 469	0.000 033 333
4	5 806 393.30	0.000 657	0.000 625	0.000 053 750
5	7 257 991.62	0.000 829	0.000 781	0.000 070 583
6	8 709 589.95	0.001 003	0.000 938	0.000 090 625
7	10 161 188.27	0.001 180	0.001 094	0.000 117 083
8	11 612 786.60	0.001 362	0.001 250	0.000 142 666
9	13 064 387.92	0.001 542	0.001 406	0.000 170 917
10	14 515 983.25	0.001 719	0.001 563	0.000 207 000

71. Nous voyons ici le *défaut d'élasticité* se manifester encore, dès les plus faibles charges, sous la forme d'*allongements permanents* dans le cas de l'extension, et de *raccourcissements permanents* dans le cas de la compression. On voit de même dans le premier tableau les allongements réels croître plus rapidement que les charges, et cet effet est plus sensible dans la fonte que dans le fer. Les compressions par mètre croissent aussi avec plus de rapidité que les charges, mais suivant une loi différente de celle qui régit les extensions. Bien que les courbes tracées *planche* CVIII, et qui représentent les deux tableaux précédents, se confondent assez bien en une seule et même droite tant que les efforts ne dépassent pas $2^k.50$ par millimètre carré, il paraît que, en général ou mieux en moyenne, il n'en est pas ainsi.

En effet, la discussion générale de toutes ses expériences sur la fonte a conduit M. *Hodgkinson* à deux lois différentes, l'une pour l'extension, l'autre pour la compression, lois qui se trouvent exprimées avec une grande approximation par les formules suivantes.

72. *Lois de l'extension de la compression de la fonte.* Soit K_e l'effort en kilogrammes capable de maintenir allongé d'une quantité absolue e un prisme de fonte de longueur et de section primitives L et A, toutes les dimensions étant exprimées en mètres, on a

$$\frac{K_e}{A} = m\left(\frac{e}{L}\right) - n\left(\frac{e}{L}\right)^2$$

et $m = 9\ 805\ 383\ 948$ $n = 2\ 045\ 959\ 898\ 400$

De même K_c étant l'effort en kilogrammes capable de maintenir raccourci d'une quantité absolue c un prisme de fonte de longueur et section primitives L et A, on a

$$\frac{K_c}{A} = p\left(\frac{c}{L}\right) - q\left(\frac{c}{L}\right)^2$$

et $p = 9\ 099\ 938\ 772$ $q = 368\ 020\ 463\ 040$

73. Si l'on calculait les modules E et C d'extensibilité et de compressibilité de ces fontes, en partant d'une variation de longueur par mètre $= \pm\ 0.0001$, on trouverait, en négligeant les derniers chiffres :

$E = 9\ 600\ 000\ 000$ et $C = 9\ 063\ 000\ 000$

ou environ $E = 1.06\ C$ et $C = 0.943\ E$

Les deux formules de M. *Hodgkinson* s'appliquent du reste, avec beaucoup d'approximation, depuis les plus faibles charges jusqu'à celle qui avoisine la rupture de ces fontes *par extension.*

74. *Rupture.* La rupture par extension a eu lieu en moyenne sous un effort par mètre carré $= 11\,045\,745^k$, et la moyenne des extensions par mètre la plus voisine de la rupture s'est élevée à

$$\frac{e}{L} = \frac{1}{600} = 0^m.001666...$$

La compression moyenne par mètre s'est élevée à

$$\frac{c}{L} = \frac{1}{775} = 0^m.001290$$

sous la charge de $11\,045\,745^k$ par mètre qui avait déterminé la rupture par extension.

Les formules ci-dessus s'appliquent donc jusqu'à ces extensions et compressions par mètre.

75. *Module d'élasticité* E *de ces fontes.* Les extensions et compressions de la fonte dans les tableaux précédents croissant plus rapidement que les efforts, il est évident que les modules d'élasticité E qu'on en déduira diminueront à mesure que les charges seront plus élevées. Limitant ces charges à celle de 2 à 3 kil. par millimètre carré, on tirera des cinq premières lignes du tableau relatif aux extensions, en négligeant les derniers chiffres, et des deux premières lignes de celui des compressions, savoir :

$\frac{P}{A} \cdot \frac{L}{e} = E$	$\frac{P}{A} \frac{L}{c} = C$
9 877 800 000	9 290 200 000
9 712 800 000	8 983 500 000
9 559 200 000	9 136 850 000 = C
9 292 700 000	
9 094 700 000	
9 507 440 000 = E	

En attendant que la théorie ait séparé le module d'extension E du module de compression C, on pourra se contenter d'introduire dans les formules le module moyen $E = 9\,322\,145\,000$ pour les fontes du genre de celles qui ont été essayées ; ou mieux encore, on prendra C pour les calculs relatifs aux compressions et E pour ceux relatifs aux extensions. Malheureusement, nous allons voir la flexion donner au module de la fonte encore une autre valeur, mais pour une autre fonte, il est vrai. Ce qui montrera une fois de plus la nécessité imposée aux ingénieurs d'étudier les fontes qu'ils emploient.

76. Flexion de la fonte (*Report*, pages 68 et 70).

La distance L des appuis fixes $= 4^m.1147$; la largeur l des barres $= 0^m.077875$; leur dimension dans le sens de l'effort R appliqué au milieu et qui les fléchit est $h = 0^m.038658$.

Remarquez que l'appareil est disposé de telle sorte que l'effort de flexion agit *horizontalement* sur la barre, placée elle-même *horizontalement* et de champ (*).

	Effort R au milieu.	Flèches F observées au bout de 5 minutes.	Flèches supposées proportionnelles à R.	Flèches permanentes après 5 minutes.
	k.	m.	m.	m.
1	12.6996	0.004 617	0.004 617	0.000 041
2	25.3992	0.009 535	0.009 346	0.000 173
4	50.7985	0.019 522	0.018 468	0.000 488
6	76.1977	0.030 074	0.027 703	0.001 189
8	101.5970	0.041 452	0.036 938	0.002 322
10	127.1962	0.053 467	0.046 172	0.003 774
12	152.7955	0.066 142	0.055 406	0.005 756
14	178.3947	0.080 493	0.064 641	0.008 362
16	203.9940	0.095 402	0.073 876	0.011 618

77. Nous voyons encore ici l'*altération de l'élasticité* se manifester dès les plus faibles charges et les flèches permanentes croître très-rapidement. Quant aux flèches totales de la troisième colonne, elles croissent, comme pour le fer, plus rapidement que les charges, de sorte que les modules d'élasticité E que l'on déduirait des observations successives diminueraient sans cesse. Ainsi la première

charge $12^k.6996$ donnerait $E = 10\,647\,790\,722$
et la charge $76^k.19$ $E = 9\,808\,037\,490$

pour la même barre; de sorte qu'il devient bien difficile de fixer un module unique E applicable à la fois, sans trop d'erreur, à l'extension, à la compression et à la flexion d'*une seule* et même espèce de fonte. Quant à l'impossibilité de trouver un module unique qui convienne à la substance *fonte* en général, j'espère la rendre évidente en consignant ici les valeurs si variables de E qui ont été déduites d'expériences sur la flexion seulement.

On a trouvé :

Fonte grise.	$E =$	9 029 000 000
Fonte douce.		10 653 000 000
Fonte de Carron (vent chaud), n° 2.		11 300 000 000
Id. *id.* (vent froid), n° 2.		12 123 000 000
Fonte de Devon (vent chaud), n° 3.		15 770 000 000
Id. *id.* (vent froid), n° 3.		16 070 000 000

(*) Il n'y a donc pas lieu de corriger les résultats de l'influence due au poids de la barre.

78. Je remarque que le millième des nombres ci-dessus exprime assez exactement en kilogrammes l'effort par mètre carré qui déterminerait la rupture de ces fontes par extension.

Il n'a point été trouvé de rapport constant entre ce dernier effort et celui qui romprait les fontes par compression. Le premier est au second tantôt :: 1 : 4.337, tantôt :: 1 : 8.493, et en moyenne :: 1 : 6.595.

On trouvera à l'article *Fer et Fonte* (pages 745 et 751 de cet *Aide-Mémoire*) le résumé des expériences de M. *Hodgkinson* sur la rupture par compression des *colonnes* en fonte et en fer.

79. *Module d'élasticité des bois*. On s'accorde à prendre les valeurs suivantes pour les modules d'élasticité des bois

$$E = 1\,178\,000\,000 \text{ pour le chêne,}$$
$$E = 1\,300\,000\,000 \text{ pour le sapin,}$$
$$E = 1\,500\,000\,000 \text{ pour le pin,}$$

et on ne les soumet pas habituellement à des efforts supérieurs à 800 000^k par mètre carré,

80. *Torsion*. Je ne rappellerai pas ici comment les hypothèses théoriques ont conduit aux formules suivantes par lesquelles on a coutume d'exprimer les résistances à la torsion, et qui supposent toujours que la limite d'élasticité n'est pas atteinte, et je me contente de reproduire ces formules très-incertaines.

θ est la longueur de l'arc de cercle d'un mètre de rayon qui mesure le déplacement angulaire de l'effort de torsion, dans le plan où il agit.

P est cet effort.

a la distance de son point d'application à l'axe de figure du solide tordu.

L la distance de la section fixe d'encastrement du solide au plan du moment Pa.

G ce qu'on appelle le *module de torsion*.

On a, dans le cas d'un cylindre dont r est le rayon :

$$\theta = \frac{2a}{\pi G} \cdot \frac{PL}{r^4}$$

et dans le cas d'un prisme à section rectangulaire dont b et c sont les côtés :

$$\theta = \frac{3\,P\,L\,a\,(b^2 + c^2)}{G\,b^3\,c^3}$$

La plus grande incertitude règne en outre sur les valeurs numériques de G ; les uns font en général $G = \frac{2}{5}E$, d'après M. *Cauchy* ;

E étant le module d'extensibilité de la substance, les autres prennent :

G = 6 612 300 000 pour les fers ronds,

G = 5 510 600 000 pour les fers carrés,

d'après les anciennes expériences de *Duleau* (page 756 de l'article *Fer et Fonte*), ou encore d'après l'ingénieur anglais *Bevan* :

G = 7 504 628 602 pour le fer comme pour l'acier,

et G = 4 014 077 184 pour la fonte.

81. *De la théorie de la rupture.* Je ne m'occuperai pas de cette théorie, qui n'est aujourd'hui qu'une extension démesurée des hypothèses, déjà trop contestables, sur lesquelles repose la théorie de la résistance élastique; l'expérience suivante, due à M. *Hodgkinson*, suffira pour donner une idée de la confiance qu'elle mérite.

Deux pièces de même fonte et de même forme, dont la section commune est indiquée ci-dessous, ont été successivement soumises aux mêmes efforts R agissant au milieu de leur longueur L, l'une ayant la nervure de renfort en dessous et l'autre en dessus. Ces deux pièces qui, d'après la théorie de la rupture, auraient dû rompre sous la même charge, ont, ainsi qu'on le voit, offert des résistances réelles qui ont été entre elles :: 165:507 ou :: 1 : 3.07. Cette expérience souvent répétée a toujours donné des résultats analogues.

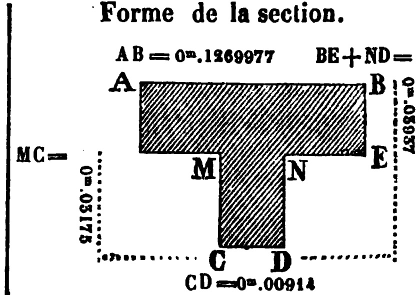
82. Flexions et rupture de deux pièces de même fonte et de même forme (*Researches*, page 380).

Fonte de Carron n° 2.

Distance L des appuis = 1m.98116.

Charge R appliquée au milieu.

Forme de la section.



	Charges R au milieu.	T		⊥	
		Flèches correspondantes.	Flèches permanentes.	Flèches F.	Flèches permanentes.
	k.	m.	m.	m.	m.
1	3.1749	0.000 381 0	Visible.	....	Invisible.
2	6.3498	0.000 812 8	0.000 025 4	0.000 635 0	Visible.
3	9.5247	0.001 168 4	0.000 050 8	0.001 143 0	0.000 050 8
4	12.6996	0.001 625 6	0.000 101 6	0.001 651 0	0.000 076 2
8	25.3993	0.003 302 0	0.000 127 0	0.003 403 6	0.000 127 0
16	50.7985	0.006 934 1	0.000 508 0	0.006 858 0	0.000 381 0
24	76.1977	0.011 277 6	0.000 889 0	....	....
32	101.5970	0.015 697 2	0.001 473 2	0.014 732 0	0.001 473 2
40	126.9962	0.020 650 2	0.002 362 2	....	....
48	152.3955	0.026 162 0	0.003 302 0	0.022 733 0	0.002 565 4
52	165.0951	Rupture au	....	....	....
64	203.194	moment où la	....	0.031 089 6	0.003 937 0
80	253.992	flèche extrême	....	0.040 259 0	0.005 969 0
96	304.791	était =	....	0.048 419 0	0.008 382 0
112	355.589	$0^m.0289$.	....	0.061 214 0	0.012 446 0
128	406.388	....	....	....	0.018 338 8
144	457.186	....	....	0.105 156	0.026 416
152	482.585	....	....	....	....
160	507.985	....	....	Rupture, la flèche extrême ayant atteint $0^m.127$. Un coin de la forme AB = 0.0742, CD = $0^m.097$, s'est détaché de la nervure supérieure.	

83. *Conclusions.* Il semble résulter de cet exposé : — que, contrairement à ce que prescrivait *d'Alembert*, « *la géométrie, qui ne doit* « *qu'obéir à la physique quand elle se réunit avec elle, lui commande* « *quelquefois*, » ici, — que l'élasticité des corps solides paraissant altérée dès les plus faibles efforts, l'expression *limite d'élasticité* n'a plus de sens et doit disparaître, avec le temps, du langage de la science ; — que si, sans avoir à redouter de trop fortes erreurs, la théorie peut encore prendre pour base la proportionnalité des efforts aux variations de longueur dans les solides, il convient que ces variations et ces efforts soient encore plus limités qu'on ne l'admet généralement ; — qu'il y a lieu surtout de distinguer la proportionnalité qui se manifeste dans le cas de l'extension de celle qui convient à la compression, et de faire dès lors deux quantités distinctes des modules E et C d'extensibilité et de compressibilité. Il en résul-

tera évidemment que l'axe neutre d'un solide fléchi ne passera plus par le centre de gravité de sa section transversale, et que les formules relatives à la flexion deviendront ainsi un peu plus compliquées; elles n'en seront que plus exactes, et la pratique, avec raison, tient plus à la vérité qu'à l'élégance des résultats. Enfin la théorie importante de la rupture, qui comprend la recherche des solides de plus grande résistance, est à refondre tout entière. C'est aux hommes dont le nom fait autorité dans la science qu'il appartient d'imposer ces réformes, sans lesquelles la théorie de la résistance des solides ne saurait prétendre, désormais, à la confiance des praticiens.

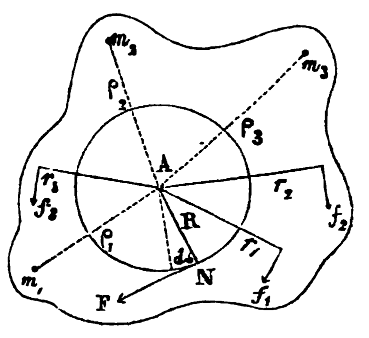
REVÊTEMENT. Voyez l'article *Murs*, à la page 1194.

RHUMB DE VENT, ou encore *rumb de vent* (les marins prononcent *ron* de vent). C'est un angle de 11° 15′ embrassant dès lors la 32e partie de la circonférence de l'horizon. Huit rhumbs forment donc un angle droit. M. *Parisot* pense que *rhumb* est une corruption de *rhombe*, lozange, cette figure géométrique étant celle qu'on traçait autrefois sur les cartes pour y figurer l'aiguille d'une boussole.

RICOCHET. Voyez *Pénétrations*, pag. 1249.

ROMAINE. Voyez *Balances*, pag. 109.

ROTATION. Un corps d'une forme quelconque tourne autour d'un axe fixe A, en vertu de forces $f_1\,f_2\,f_3\ldots$ appliquées à des distances respectives de l'axe fixe désignées par $r_1\,r_2\,r_3\ldots$ Chaque force agit tangentiellement au cercle décrit par son point d'application, et le plan de ce cercle est perpendiculaire à l'axe fixe. Nous supposerons, en outre, que cet axe A est vertical.



En vertu de l'équivalence des moments, la somme algébrique des moments de toutes les forces f peut être remplacée par le moment FR d'une force unique F agissant à une distance R de l'axe fixe, moment qu'on déterminera par la relation

$$FR = f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 + \ldots = \Sigma\,(f\,r). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en ayant égard aux signes des moments partiels.

Soit supposée nulle la vitesse angulaire ω_0 dont le corps était animé au moment où les forces ont commencé à agir, appe-

lons $d\omega$ l'accroissement de vitesse angulaire que lui communique à chaque instant dt la force F, chacune des petites masses $m_1\, m_2\, m_3 \dots$ m prenant un accroissement de vitesse $\rho_1 d\omega$, $\rho_2 d\omega$, $\rho_3 d\omega \dots$, $\rho\, d\omega$ proportionnel à sa distance ρ à l'axe opposera à l'accélération $\frac{\rho d\omega}{dt}$ une force d'inertie $\frac{m\rho\, d\omega}{dt}$ dont le moment par rapport à l'axe A sera $\frac{m\rho^2 d\omega}{dt}$. La somme Σ de tous les moments semblables étendue à toutes les parties matérielles du corps ou $\frac{d\omega}{dt}\Sigma\,(m\rho^2)$ sera donc égale au moment des forces f, en vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction, donc

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma\,(m\,\rho^2) = \Sigma\,(fr) = \mathrm{F\,R}. \quad \dots\dots \quad (2)$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma\,(fr)}{\Sigma\,(m\rho^2)} = \frac{\mathrm{F\,R}}{\mathrm{I}}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Ainsi, *l'accélération angulaire* $\frac{d\omega}{dt}$ *s'obtiendra en divisant le moment résultant* F R *des forces mouvantes et résistantes par le moment d'inertie* $\mathrm{I} = \Sigma\,(m\,\rho^2)$ *de la masse tournante* (pag. 1160), tous les moments étant pris par rapport à l'axe fixe.

Cette accélération serait nulle, et le corps tournant conserverait sa vitesse angulaire primitive, quelle qu'elle fût, si l'on avait

$$\mathrm{F\,R} = f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 \dots = 0. \quad \dots\dots \quad (4)$$

c'est-à-dire si la somme des moments des forces mouvantes était égale à celle des moments des forces résistantes.

Si au contraire la première somme excède la seconde d'une quantité constante, le corps tournant acquerra en un nombre t de secondes une vitesse angulaire ω que l'on obtiendra en multipliant la valeur (3) de l'accélération angulaire par ce nombre t

$$\omega = \frac{\mathrm{F\,R}}{\Sigma\,(m\,\rho^2)}\,t. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

et il est clair qu'en vertu de son inertie, le corps tournant conservant la vitesse angulaire quelconque ω_0 qu'il pouvait avoir au moment où les forces f lui ont été appliquées, il jouit en général, au bout du temps t, d'une vitesse angulaire totale $= \omega + \omega_0$.

Equation du travail. Soit ds le petit arc décrit à la distance R de l'axe de rotation par le point d'application N de $\mathrm{F} = \frac{\Sigma\,(fr)}{\mathrm{R}}$ pendant

le petit temps dt, la vitesse angulaire du système ayant à cet instant la valeur quelconque ω; $\frac{ds}{dt}$ vitesse du point N aura encore pour son expression ωR, d'où

$$ds = R\omega dt \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

multipliant par ces petits chemins l'expression de F tirée de l'équation (3), il vient pour le travail élémentaire des forces constantes f

$$F ds = \omega d\omega \Sigma (m\rho^2) \ldots\ldots\ldots (7)$$

de sorte que, si Ω est la vitesse angulaire acquise par le système, pendant que le point d'application de F a décrit l'arc quelconque S, on a

$$FS = \frac{\Omega^2}{2} \Sigma (m\rho^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Ainsi *le travail résultant* FS *est numériquement égal à la moitié du produit du moment d'inertie du corps tournant par le carré de la vitesse angulaire* Ω *qu'il a acquise.*

Force vive de rotation. Si l'on remarque que la vitesse v d'une petite masse quelconque m du corps tournant est le produit $\omega\rho$ de la vitesse angulaire ω par sa distance ρ à l'axe; que dès lors sa force vive mv^2 égale $m\omega^2\rho^2$, et que la somme de toutes les forces vives du système $\Sigma (mv^2) = \omega^2 \Sigma (m\rho^2)$, on voit d'une part que *la force vive d'un corps qui tourne est le produit du carré de sa vitesse angulaire par son moment d'inertie pris par rapport à son axe de rotation;* de l'autre que, dans les mouvements de rotation comme dans les mouvements de transport parallèle, *le travail résultant de toutes les forces appliquées au corps mobile est numériquement égal à la moitié des forces vives qu'il a acquises.*

Si le mobile était animé à la fois d'un mouvement de transport parallèle et d'un mouvement de rotation, le travail des forces qui l'animent devrait évidemment être égalé à la moitié de sa force vive de translation plus la moitié de sa force vive de rotation. C'est le cas des corps qui *roulent* sur les plans inclinés, voyez pag. 1279.

Si l'on suppose maintenant que l'axe A du corps tournant est horizontal, et que le corps n'est soumis qu'à son propre poids P, le moment résultant FR (3) deviendra le produit du poids P du corps par la projection horizontale, à l'instant que l'on considère, de la distance D de son centre de gravité à l'axe fixe. Ainsi, α étant l'angle de D avec la verticale à cet instant, on aura pour l'accélération angulaire (3)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{P\,D\,sin.}\,\alpha}{\Sigma\,(m\rho^2)} = \frac{\mathrm{M\,D}\,g\,\mathrm{sin.}\,\alpha}{\Sigma\,(m\rho^2)} \ldots\ldots\ldots (9)$$

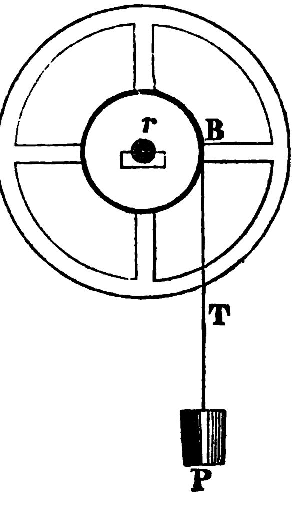
et l'on retombera sur le cas étudié à la pag. 1143.

Enfin, si le corps se réduit à une seule molécule matérielle dont la masse $m = \frac{p}{g}$ agit à la distance L d'un axe horizontal, on a pour l'accélération angulaire, variable avec l'angle α

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m\,g\,\mathrm{L\,sin.}\,\alpha}{m\,\mathrm{L}^2} = \frac{g\,\mathrm{sin.}\,\alpha}{\mathrm{L}} \ldots\ldots\ldots (10)$$

et l'on revient au cas du *pendule* simple qui a été traité page 1251.

Applications. La formule (8) donnerait immédiatement les conditions du travail de la machine ci-jointe, en y remplaçant FS par le produit du poids P multiplié par la hauteur H dont il est descendu : ainsi l'on aurait



$$\mathrm{P\,H} = \frac{\Omega^2}{2}\,\Sigma\,(m\rho^2) \ldots (11)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\mathrm{PH}}{\Sigma\,(m\rho^2)}}$$

et $$\mathrm{H} = \frac{\Omega^2\,\Sigma\,(m\rho^2)}{2\,\mathrm{P}} \ldots (12)$$

en observant bien que le moment d'inertie $\Sigma\,(m\rho^2)$ doit comprendre celui du poids P par rapport à l'axe fixe, comme si ce poids était appliqué en B.

Si l'on voulait obtenir la tension T du cordon pendant le mouvement, on remarquerait que le centre de gravité du poids se meut alors comme un corps libre soumis à la force (P — T). L'accélération pendant son mouvement de transport parallèle est donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g(\mathrm{P}-\mathrm{T})}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{Force}}{\mathrm{masse}} = \frac{r\,d\omega}{dt} \ldots\ldots (13)$$

d'où, pour la tension T du cordon, en faisant $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}}{g}$

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} - \mathrm{M}\,\frac{r\,d\omega}{dt} \ldots\ldots\ldots (14)$$

c'est-à-dire que la tension est égale au poids P diminué de sa force

d'inertie ou de la force avec laquelle il résiste à l'accélération : or nous avons, en vertu de la relation (3)

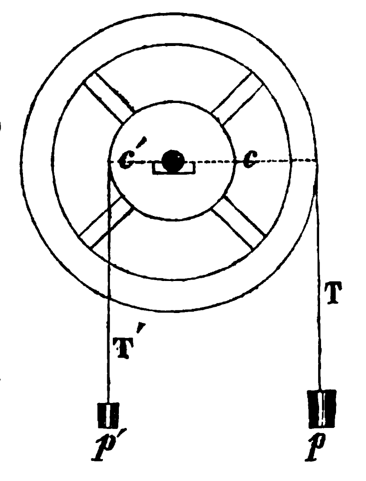
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{Pr}{\Sigma(m\rho^2)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Substituant dans l'équation (14) cette valeur de l'accélération angulaire de la machine, on a encore

$$T=P\left[1-\frac{Mr^2}{\Sigma(m\rho^2)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

forme sous laquelle on reconnaît plus facilement 1° que la tension T du cordon est constante, puisqu'elle ne dépend que de quantités qui ne changent pas ; 2° que pendant le mouvement, la pression sur l'axe, résultante W + T du poids W du volant et de la tension du cordon, est toujours moindre que le poids total du système W + P.

Si l'on supposait maintenant qu'un poids $p=mg$ agît à la circonférence du volant pendant qu'un autre poids $p'=m'g$ agirait à la circonférence de l'arbre pour faire tourner le système en sens contraire, la formule (3) nous donnerait encore pour l'accélération angulaire



$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{g(mc-m'c')}{\Sigma(m\rho^2)}=\frac{pc-p'c'}{\Sigma(m\rho^2)} \quad (17)$$

à cause de

$$FR=pc-p'c'=g(mc-m'c'),$$

et remarquant que

$$\Sigma(m\rho^2)=Mk^2+mc^2+m'c'^2$$

comprend ici le moment d'inertie du volant dont le poids est $P=Mg$, plus celui du poids p plus celui du poids p'.

On aurait donc pour la vitesse angulaire ω acquise par le système au bout de t secondes

$$\omega=\frac{(mc-m'c')}{\Sigma(m\rho^2)}gt. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

L'équation (8) du travail deviendrait, en y faisant $FS=ph-p'h'$

$$ph-p'h'=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma(m\rho^2)=\frac{1}{2}\omega^2[Mk^2+mc^2+m'c'^2]. \quad (19)$$

c'est-à-dire que le travail des poids est égal à la moitié de la somme des forces vives de toutes parties mobiles du système.

Quant aux tensions T, T' des cordons, on les obtiendra facilement en raisonnant comme dans le premier cas ; on trouverait

$$T = p - m\frac{c\,d\omega}{dt} \quad \text{et} \quad T' = p' + m'\frac{c'\,d\omega}{dt} \ldots (20)$$

ou en remplaçant l'accélération angulaire par sa valeur (17)

$$T = p - \left[\frac{pc - p'c'}{\Sigma(m\rho^2)}\right]\frac{pc}{g} \quad \text{et} \quad T' = p' + \left[\frac{pc - p'c'}{\Sigma(m\rho^2)}\right]\frac{p'c'}{g}. \ (21)$$

les tensions T et T' sont donc constantes.

Appelant Π la pression de l'axe sur son coussinet pendant le mouvement, on a, P étant le poids du volant,

$$\Pi = P + T + T' = P + p + p' - \frac{(pc - p'c')^2}{g\,\Sigma(m\rho^2)} \ldots (22)$$

et pc étant plus grand que $p'c'$, le dernier terme sera toujours soustractif et la pression sur le coussinet toujours moindre que la somme des poids $P + p + p'$ du système. Le coussinet est ainsi déchargé, pendant le mouvement, de la différence des forces d'inertie des poids mobiles.

En faisant $c' = c$ dans la figure et dans les formules (17 à 22), on obtiendrait la théorie entière de l'ingénieuse machine d'*Atwood*, déjà esquissée à la page 803.

Voyez encore l'article *Centre spontané de rotation*, pag. 261.

ROUES HYDRAULIQUES. Quelles que soient les dispositions et les formes des roues hydrauliques, l'action de l'eau qui les anime présente en général les circonstances suivantes ou quelques-unes d'entre elles :

1. Un certain poids P de liquide, dont nous désignerons toujours la masse par $M = \frac{P}{g}$ et le volume par Q, sort dans chaque seconde du bief supérieur à la roue, et descend, après avoir agi sur celle-ci, jusques au bief qui lui est inférieur.

H désignant la distance verticale des positions inférieure et supérieure du centre de gravité du poids P, le produit PH est le *travail absolu de la chute* en une seconde, et dès lors, la limite supérieure du travail qui puisse être transmis à la roue dans le même temps.

2. Avant que la masse M atteigne le système de la roue (*pl.* CX), on la laisse souvent descendre d'une certaine hauteur h et acquérir ainsi une vitesse V plus grande que la vitesse v du point de la roue

qu'elle va choquer. Cette vitesse d'affluence V ne pourrait être égale à la vitesse $\sqrt{2gh}$, due à la hauteur h, qu'autant que l'on aurait su éviter les frottements et les contractions ; mais, en général, la vitesse réelle d'affluence V sera plus petite que $\sqrt{2gh}$, et pourra être approximativement calculée par les formules de l'article *Ecoulement* (pag. 567); et la demi-force vive $\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2$, avec laquelle le liquide s'introduit dans le système de la roue, sera moindre que le travail Ph de la gravité sur le poids P.

3. Parvenue au contact de la *palette* de l'*aube* ou de l'*auget*, la masse liquide perdra à leur rencontre, en bouillonnements et tourbillonnements, une vitesse w que nous déterminerons pour chaque cas particulier, et qui dépendra de l'intensité de la vitesse d'affluence V, de celle de la vitesse v de la roue, et de l'angle α que ces vitesses forment entre elles, ou des angles A et B qu'elles forment avec le plan de l'aube.

$\frac{1}{2}\frac{P}{g}w^2$ représentera donc généralement la demi-force vive perdue par l'effet du choc, ou le travail dissipé en ébranlements et en tourbillonnements (pag. 327) ; et comme on admet ici que la vitesse v de la roue ne change pas au moment du choc, w se réduira, en vertu du théorème de *Carnot*, à la seule vitesse que le liquide a perdue.

4. Après le choc, il pourra arriver que la masse M quitte la roue et si u est la vitesse absolue qu'elle prend alors dans l'espace, elle emportera avec elle une demi-force vive $\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2$ qui sera désormais entièrement perdue pour le système..

5. Enfin, la forme, la grandeur et la position de la roue (*pl.* CX), sont le plus souvent telles que, entre son point d'introduction et son point de sortie, le centre de gravité du poids P du liquide introduit parcoure, en pressant les aubes, augets ou palettes, un certain chemin dont nous désignerons la projection verticale par h', et développe ainsi un travail moteur Ph'.

6. Supposant toutes ces diverses circonstances réunies et le mouvement de la machine parfaitement uniforme, appelant F la résistance constante tangentielle qui s'oppose au mouvement de la roue et que l'on suppose appliquée au point qui parcourt circulairement v mètres par seconde, on aura pour le travail résistant Fv dont la roue est capable, ou pour son *effet utile théorique* exprimé en kilogrammètres par seconde.

$$Fv = Ph' + \frac{1}{2}\frac{P}{g}[V^2 - w^2 - u] \quad \ldots\ldots (1)$$

Cet effet n'égalerait donc le travail absolu PH de la chute d'eau (1) que sous les conditions : 1° ($u^2 = o$) que l'eau sortît de la roue sans vitesse ; 2° ($w^2 = o$) qu'il n'y eût aucune vitesse dissipée en ébranlements et tourbillonnements, c'est-à-dire qu'il n'y eût pas de choc ; 3° ($V^2 = 2gh$) qu'il n'y eût ni frottement du liquide, ni contractions.

7. Nous n'avons plus, pour former l'équation particulière applicable à chaque système, qu'à introduire dans l'équation générale (1) les valeurs de h', V, u et w, qui lui sont propres ; et la recherche de la vitesse perdue w et de la vitesse absolue de sortie u pouvant être facilitée par la détermination de la *vitesse relative* W ; nous allons d'abord nous occuper de celle-ci.

8. *De la vitesse relative* W. Soient (*fig.* 2, *pl.* CX) $b\,a$ un petit élément plan d'une palette ou d'une face d'auget, MH la grandeur et la direction de la vitesse uniforme v dont il est animé au moment où il est atteint par la masse liquide ; soit MD la grandeur et la direction de la vitesse absolue V de cette masse, α l'angle aigu compris entre les directions de V et de v. Il est bien évident que les effets du choc ne dépendent que de la vitesse de l'un des corps par rapport à l'autre corps, et que les actions et réactions *mutuelles* de la palette et du liquide ne seraient en rien altérées, si ces deux corps étaient entraînés dans l'espace d'un mouvement commun uniforme en quelque sens qu'il ait lieu. Or, nous n'avons qu'à réaliser cette hypothèse pour obtenir très-facilement leur vitesse *relative*. Imaginons que, à l'instant du choc, le milieu dans lequel il s'opère soit emporté avec le liquide et la palette en sens inverse du mouvement de celle-ci avec sa propre vitesse $MH' = -v$; et considérons alors l'élément $b\,a$ de la palette. Nous voyons qu'ainsi animé de deux vitesses égales et contraires MH et MH', il est *en repos* dans l'espace. Quant à la masse liquide, elle s'y trouve maintenant animée et de sa vitesse primitive $MD = V$ et de la vitesse MH' du milieu ; elle a donc dans l'espace une vitesse absolue $W = AE$, résultante en intensité et direction des composantes MD et MH'. Or, cette vitesse absolue dans l'espace est la vitesse du liquide *relativement* à la palette, puisque celle-ci y est maintenant en repos. On a donc (*Géom.*, B. 32)

$$W^2 = V^2 + v^2 - 2\,V\,v\cos.\alpha \ldots\ldots \quad (2)$$

9. On aurait encore pour la vitesse relative W en fonction de ses composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse du point choqué (*fig.* 2, *pl.* CX).

$$W^2 = \overline{HC}^2 + \overline{CD}^2 = (MC - MH)^2 + \overline{CD}^2 = (V\cos.\alpha - v)^2 + V^2\sin.^2\alpha \quad (3)$$

Enfin, il est souvent plus commode d'exprimer cette vitesse relative en fonction de ses composantes perpendiculaire et parallèle *au*

plan ba de la palette ; A et B étant alors les angles aigus respectivement formés par les directions de V et de v avec le plan de la palette, on a facilement, en décomposant ces vitesses perpendiculairement et parallèlement à ce plan et cherchant leur résultante W,

$$W^2 = (V \sin. A - v \sin. B)^2 + (V \cos. A + v \cos. B)^2 . \quad (4)$$
$$= V^2 + v^2 + 2 V v \cos. (A + B)$$
$$= V^2 + v^2 - 2 V v \cos. \alpha$$

en remarquant que $A + B = 180° - \alpha$

d'où $\cos. (A + B) = \cos. (180° - \alpha) = - \cos. \alpha$;

Si A ou B était obtus son cosinus devrait prendre le signe — dans la formule (4).

Il devient assez facile maintenant d'obtenir la plupart des équations particulières; commençons par celle des *roues à augets*, et supposons d'abord que la roue ait un grand diamètre et se meuve lentement.

10. *Roues à augets, lentes* (*fig* 1, *pl.* CX). On appelle ainsi les roues d'un grand diamètre dont la vitesse à la circonférence extérieure est comprise entre 1^m et 2^m au plus. On admet que les augets ne sont jamais qu'à moitié remplis. La force centrifuge ayant alors peu d'influence sur le *versement* des augets inférieurs, on suppose que le liquide descend tout entier jusqu'au point le plus bas de la roue, et h' représente alors la distance verticale de ce point K au centre de gravité du liquide contenu dans le *premier* auget M*no*. Il règne, il est vrai, une légère incertitude sur la vraie position de ce centre de gravité, origine de la hauteur h'. On pourrait l'évaluer approximativement, mais, en vue de simplifier, les auteurs s'accordent à prendre pour la limite supérieure de h' le point M où la lame d'eau atteint la circonférence extérieure.

11. Ils supposent en outre que le liquide en quittant la roue au point K, y est animé d'une vitesse absolue u égale à celle v de la roue. Cette supposition

$$u = v$$

manque un peu d'exactitude, en ce que le liquide à la sortie prend généralement ici en coulant sur la face de l'auget, une vitesse dirigée en sens inverse de la vitesse v de la roue, et acquiert dès lors une vitesse absolue u qui diffère de v. Mais cette hypothèse compensant un peu la précédente, on la laissera d'abord subsister.

12. L'eau une fois introduite dans le *premier* auget et n'en pouvant plus sortir, n'a bientôt plus que la vitesse v de celui-ci ; donc, la vitesse w qu'elle a perdue contre la face de l'auget ou contre son

fond, ou contre le tambour de la roue, est sa *vitesse relative* tout entière, et dès lors (2),

$$w^2 = W^2 = V^2 + v^2 - 2\,V\,v\cos.\alpha$$

13. Mettant ces diverses valeurs dans l'équation (1), il vient pour l'expression théorique généralement admise de l'effet utile approximatif de ces roues,

$$Fv = Ph' + \frac{1}{2}\frac{P}{g}[V^2 - V^2 - v^2 + 2\,V\,v\cos.\alpha - v^2]$$

ou $$Fv = Ph' + \frac{P}{g}[V\cos.\alpha - v]v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Mais il importe de ne pas perdre de vue les hypothèses sur lesquelles elle est fondée.

14. Le MAXIMUM de cette expression correspondrait à

$$v = \frac{V\cos.\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et le travail transmis à la roue, lorsqu'elle prendrait cette vitesse, deviendrait

$$Fv = Ph' + \frac{P}{g}v^2 = Ph' + \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2\cos.^2\alpha. \quad . \quad . \quad (7)$$

Mais on peut, dans la pratique, s'éloigner toujours notablement de la condition (6) que ce maximum impose. D'une part, en effet, ce qui intéresse la pratique, c'est moins la vitesse qui rendra maximum le travail *transmis* à la roue que celle qui rendra maximum le travail que cette roue *transmettra* aux pièces qu'elle conduit et ces vitesses sont différentes (voy. pag. 1093, § 26). D'autre part, l'équation (5) suppose que la vitesse absolue de sortie u est précisément celle v de la roue, tandis que l'on parvient souvent, à l'aide de certaines dispositions à rendre la vitesse de sortie u à peu près nulle dans les roues à augets lentes. Or, si l'on supposait u réellement nulle, l'équation générale (1) deviendrait après les substitutions indiquées,

$$Fv = Ph' + \frac{P}{g}\left(V\cos.\alpha - \frac{1}{2}v\right)v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

et cette nouvelle valeur du travail de la roue à augets, parfois aussi approximative que celle qui est exprimée par l'équation (5), devient *maximum* à la condition

$$v = V\cos.\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

qui fixe à la vitesse v de la roue une valeur justement double de celle déjà trouvée (6) et élève Fv à

$$Fv = Ph' + \frac{P}{2g} V^2 \cos.^2 \alpha \ldots\ldots\ldots (9)$$

Il y a donc lieu en général d'examiner attentivement quel est celui des cas dans lequel on se trouve, ou dont on se rapproche, avant de fixer la vitesse v qu'il convient de donner à la roue pour obtenir le maximum d'effet.

15. *Du tracé de l'auget.* En outre, ces équations supposent essentiellement que le poids P de liquide qui est sorti du bief supérieur dans chaque seconde est effectivement entré tout entier dans la roue. Or, c'est ce qui évidemment n'aurait pas lieu, si les composantes de v et V perpendiculaires à la face de l'auget (4) étaient telles que l'on eût

$$v \sin. B > V \sin. A \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

En effet, la face extérieure ou *aval* de l'auget choquerait alors la lame liquide de dessous en dessus; chaque face d'auget à la rencontre de la lame *ferait battoir*, comme disent les charpentiers, et projetterait au loin, en dehors de la roue, une partie notable du liquide moteur; de plus, ce travail de projection étant essentiellement négatif, une roue ainsi tracée (et l'on en voit !) emploierait une partie de sa puissance à dilapider l'autre, et le calcul d'une pareille machine serait à peu près impossible.

16. Si l'on avait au contraire (4)

$$V \sin. A > v \sin. B \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ce serait alors le liquide qui frapperait perpendiculairement la face intérieure ou *amont* de l'auget, avec l'excès de la première vitesse sur la seconde, ce qui pourrait causer quelques légers rejaillissements qu'il est bon d'éviter, bien qu'ils soient loin d'avoir ici les inconvénients très-graves du choc de la face d'aval sur le liquide, que nous avons signalés plus haut.

17. La composante v sin. B de la vitesse de la roue ne pouvant être convenablement plus petite, et surtout ne devant jamais être plus grande que la composante V sin. A du liquide, la face de l'auget devra donc être tracée de manière à satisfaire à la condition

$$v \sin. B = V \sin. A \quad \text{ou} \quad \frac{\sin. B}{\sin. A} = \frac{V}{v} \ldots\ldots (12)$$

ce qui est facile. Tracez, en effet, par la méthode indiquée page 592, la trajectoire du filet *supérieur* de la lame liquide. Par le point M (*fig.* 1, *pl.* CX), où cette trajectoire rencontre la circonférence de

la roue, menez d'une part une tangente MD à cette trajectoire, de l'autre une tangente MH à la circonférence. Sur la première tangente, portez à une grande échelle une longueur MD qui représente la vitesse réelle d'affluence V; sur MH, à la même échelle, portez une longueur MH égale à la vitesse de la circonférence extérieure de la roue; par les points D et H ainsi déterminés, menez une droite DHp, et par le point M une parallèle ME à cette droite, ME sera la direction que doit recevoir la face Mn du *premier* auget; car les projections Mp des vitesses V et v sur la perpendiculaire à la face de l'auget sont évidemment égales, et l'on a :

$$Mp = v \sin.B = V \sin.A, \quad \text{ou} \quad (\textit{Géom. N. 1}) \quad \frac{v}{V} = \frac{\sin.A}{\sin.B}. \quad (13)$$

18. Quant au fond *on* de l'auget, il prend habituellement la direction du rayon de la roue, et on lui donne pour hauteur la moitié environ de l'intervalle qui sépare la circonférence intérieure de la circonférence extérieure de la roue.

19. Si les augets sont en métal (tôle, zinc, cuivre), on arrondit légèrement le coude *n* de l'auget; s'ils sont en bois, le biseau doit être pris sur la face interne comme en *ab*, *fig.* 1, et son bord renforcé par une lame de tôle; le couper suivant *di*, c'est donner à la roue une surface *faisant battoir* qui, pour une roue de 24 augets seulement, s'élèverait à plus de $1^m,20$ multiplié par la largeur de la roue, pour chaque tour.

20. *Dispositions générales.* Il y a avantage à réduire la tête d'eau à $0^m.20$ s'il est possible, et à augmenter d'autant le diamètre de la roue.—La hauteur de la couronne mesurée dans le sens du rayon peut être réduite elle-même à $0^m.25$, $0^m.30$ au plus, afin que le centre de gravité de l'eau affluente ne s'abaisse pas trop avant qu'elle agisse sur la roue par son poids. L'écartement des augets mesuré sur la circonférence extérieure égale au moins la hauteur de la couronne. Ces deux conditions fixent suffisamment le nombre des augets qui doit toujours être pair. Le tambour de la roue doit être assemblé et calfaté avec beaucoup de soin. Ses joints longitudinaux donnent bientôt lieu, sans cette précaution, à des fuites considérables. La longueur des augets dans œuvre doit déborder le petit coursier d'amenée ou la largeur de la vanne de $0^m.05$ à $0^m.06$ de chaque côté pour faciliter la sortie de l'air qui ne s'opère jamais très-bien.

21. Ces dispositions satisfaites, et l'auget tracé comme il a été dit plus haut, on peut compter qu'une roue à augets d'un grand diamètre, dont la circonférence parcourra de $1^m.30$ à $1^m.50$ par seconde, pourra convenablement dépenser de 70 à 100 kilogrammes d'eau par seconde par chaque mètre de sa largeur, et transmettre un tra-

vail égal aux trois quarts et même aux quatre cinquièmes du travail absolu PH de la chute (1).

22. Quant au coefficient par lequel il convient de multiplier le second membre de l'équation (5) pour obtenir ce qu'on appelle l'effet utile *pratique*, on le fait $=0.78$, d'après quelques observations déjà anciennes de M. *Morin* (1828 à 1834) dont il est bon d'indiquer les éléments principaux.

23. *Roue de Guebwiller* (*fig.* 6, *pl.* CIX), estimée de 55 chevaux, entièrement en fer et en fonte, construite par *Aitken* et *Steel*. — Poids total, 25000 kil.—Diamètre, $9^m.10$.—Largeur dans œuvre, $3^m.155$.—96 augets en tôle espacés de $0^m.30$ à la circonférence extérieure.—Hauteur de la couronne dans le sens du rayon, $0^m.30$. — Entrée de l'eau à 50 degrés au-dessous du sommet. — Vannage incliné de 40 degrés sur l'horizon.—La vanne démasque un orifice garni de cloisons dirigées suivant le prolongement de la face des augets, système qu'on fera bien de ne pas imiter. — Chute totale $H=7^m.70$ à $7^m.80$, les niveaux étant un peu variables.—Dépense assez incertaine, calculée en appliquant aux orifices indiqués ci-dessus un coefficient $=0.754$.

M. *Morin* conclut de sa série d'observations sur cette roue que l'on peut faire varier le rapport $\frac{v}{V}$ de 0.25 à 0.80, et donner à la circonférence extérieure de ces grandes roues une vitesse $v=2^m$ sans diminuer leur effet utile, pourvu que les augets ne soient remplis qu'à moitié. On aurait alors pour l'expression de cet effet :

$$Fv=0.78\,Ph'+\frac{P}{g}(V-v)v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

le coefficient 0.78 portant seulement, d'après M. *Morin*, sur le travail Ph' de la descente.

24. *Roue de Senelles* (*fig.* 5, *pl.* CIX), diamètre $=8^m.425$. — M. *Morin* a fait h' égale à ce diamètre — trente augets à face un peu courbe — largeur dans œuvre $=2^m.21$ — capacité totale de chacun $=0^{mmm}.106$, — elle reçoit l'eau au sommet par une espèce de buse inclinée de 30 degrés sur l'horizon, et munie d'un clapet.— M. *Morin* a calculé la dépense de l'orifice en multipliant par 0.59 le produit de la section de la veine d'eau perpendiculaire à sa vitesse de sortie par la charge sur son centre de gravité. On peut conclure de la série des observations que la formule précédente (14) serait encore applicable à cette roue.

25. *Roue de Fleur-Moulin* (*fig.* 4, *pl.* CIX), chute totale $H=2.56$ —diamètre $2^m.28$. On a fait h' égale à ce diamètre— 24 augets en tôle de $0^m.004$ épaisseur, courbés en arcs de cercle de $0^m.325$ rayon, tangents à la circonférence extérieure.—La vitesse v a été moyen-

nement de $1^m.50$. Bien que α ne fût pas très-petit, on a supposé cos. $\alpha = 1$ et obtenu 0.76 pour le coefficient pratique qui doit multiplier Ph' dans la formule (5).

26. *Des coefficients de réduction.* On peut remarquer que la grandeur un peu arbitraire des coefficients pratiques dépend surtout de la manière dont on les obtient, et il ne me paraît pas douteux qu'avec un peu de sévérité dans le calcul et les observations, on n'arrive bientôt à les faire disparaître des formules. Il n'est pas difficile, en effet, d'évaluer avec assez d'approximation la valeur réelle de V (pag. 567), et dans les roues à augets lentes, on peut parvenir aussi facilement à estimer les positions du centre de gravité du liquide, tant à son entrée qu'à sa sortie. Si on ne le fait pas, ne peut-on pas au moins retrancher de h' une perte de chute h_0 très-évidente, et qui a toujours nécessairement lieu dans ce système de roue ? N'est-il pas clair, par exemple, qu'un auget dont la face FL est devenue *horizontale* est entièrement à sec ? Or, si δ est l'angle aigu LFG de la face et du fond de l'auget, celui-ci étant dirigé suivant le rayon, il y a une perte de chute *minimum* $HK = h_0$, telle qu'on a :

$$h_0 = HK = OK - OH = R - r \sin.\delta. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

en appelant R le rayon extérieur de la roue et r la distance OF du coude de l'auget au centre de celle-ci. Il semble donc que, sans prétendre à une grande rigueur, l'équation des roues lentes pourrait du moins mettre en évidence cet effet certain et influent, et être écrite comme suit (5) :

$$Fv = Ph' + \frac{P}{g}[V \cos.\alpha - v]\, v - P(R + r \sin.\delta) \quad (16)$$

27. On pourra prendre, au reste, une idée de l'influence de ce terme négatif, en supposant, ce qui a lieu à peu de chose près en pratique, $\delta = 60°$, d'où sin. $\delta = 0.866$; et r étant habituellement $= R - 0^m.15$, on aurait :

$$h_0 = 0.134\, PR + 0.13\, P$$

Ainsi, sur une chute de 5^m, une roue de $4^m.50$ diamètre perdrait par ce seul effet, dont la formule admise ne tient aucun compte, plus du douzième du travail absolu PH de la chute totale, et à peu près le dixième de l'effet utile que l'équation (5) lui attribue; ce qui modifierait notablement le coefficient pratique à appliquer à la formule de roues analogues. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment on pourrait tenir compte, au besoin, des effets de la force centrifuge sur le versement dans ces roues lentes.

28. *Roues à augets, à grande vitesse.* La théorie de ces roues ne différerait pas de celle qui précède si le *versement* du liquide ne

commençait pas à s'y opérer beaucoup plus tôt que pour les roues lentes. M. *Poncelet* a très-heureusement expliqué ce versement par l'effet combiné de la force centrifuge du liquide et par la pente de la face de l'auget qui le contient, et enseigné, comme il suit, à déterminer approximativement la forme que le liquide affecte.

29. *Courbure de la surface de l'eau dans les augets* (*fig.* 3, *pl.* CX), soit m une masse élémentaire du liquide contenu dans un auget quelconque, r la distance de m à l'axe de rotation de la roue, ω la vitesse angulaire uniforme de celle-ci, $m\omega^2 r$ sera (pag. 808) la force centrifuge qui tend à éloigner la molécule m de l'axe O. D'une autre part, cette molécule est sollicitée verticalement par son poids mg. Faisant ici abstraction de tout mouvement propre de cette molécule dans l'auget, mR sera en direction et en intensité la résultante des forces qui la sollicitent; or, la similitude des triangles donne :

$$\mathrm{O\dot{I}} : mg :: r : m\omega^2 r \quad \text{d'où} \quad \mathrm{O\dot{I}} = \frac{mgr}{m\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2} \,.\, . \,(17)$$

et $\mathrm{O\dot{I}}$ ne dépendant que des quantités g et ω qui sont constantes, aura ainsi la même valeur pour toutes les molécules liquides contenues dans tous les augets de la roue. Le point, ou mieux l'axe $\dot{\mathrm{I}}$, déterminé par la valeur précédente (17), est donc comme un axe de répulsion unique dont toutes ces molécules tendent à s'éloigner avec une intensité mR qui, pour chacune d'elles, deviendrait $m\omega^2\rho$, en appelant ρ sa distance $m\dot{\mathrm{I}}$ à l'axe $\dot{\mathrm{I}}$. On a en effet :

$$\overline{m\mathrm{R}} : m\omega^2 r :: \rho : r \quad \text{ou} \quad \overline{m\mathrm{R}} = m\omega^2\rho \,.\,.\,.\,.\,. \,(18)$$

30. Or, la surface d'une masse liquide est nécessairement normale aux forces qui la sollicitent; les couches du liquide dans tous les augets affecteront donc la forme de cylindres ayant un axe horizontal commun $\dot{\mathrm{I}}$ et des rayons ρ égaux à leurs distances respectives à cet axe. Par conséquent, en décrivant du centre $\dot{\mathrm{I}}$, situé sur la verticale $\mathrm{O\dot{I}}$ à une distance de $\mathrm{O} = \frac{g}{\omega^2}$, des arcs de cercle concentriques passant par les bords des augets, ces arcs ac (*fig.* 3) traceront des limites aux quantités d'eau qui peuvent être contenues dans chacun d'eux.

31. *Perte de travail par l'effet du versement.* On déterminera donc très-facilement par ce tracé, et à l'aide de quelques tâtonnements la position de l'auget dont le versement est sur le point de commencer. On déterminera de même la position de celui que le versement vient de mettre à sec et h_t étant la distance verticale de ces positions,

$$-\frac{1}{2}Ph_1 \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

exprimera toujours assez exactement le travail perdu entre elles.

32. Continuant à désigner par h_0 la distance du point le plus bas de la roue à l'auget qui vient d'être mis à sec, on a pour la perte de travail due au versement

$$-\left(\frac{1}{2}Ph_1 + Ph_0\right) \ldots \ldots \ldots (20)$$

33. Ainsi, h' désignant toujours la hauteur au-dessus du bas de la roue du centre de gravité du liquide admis dans le *premier* auget; supposant, ce qui est à peu près exact ici, que la vitesse absolue de sortie du liquide ou u égale la vitesse v de la roue, on a pour l'effet utile Fv des roues à augets à grande vitesse

$$Fv = \frac{P}{g}[V\cos.\alpha - v]v + P\left[h' - \frac{1}{2}h_1 - h_0\right]. \quad . \quad (21)$$

et comme on a apporté ici quelque modération dans les hypothèses, il ne paraît pas qu'il y ait lieu d'appliquer à la formule aucun coefficient, pourvu que V y désigne la vitesse *réelle* d'affluence et non celle qui serait due à la hauteur h (*fig.* 1).

Voici encore une ancienne observation de M. *Morin* sur ce genre de roue.

34. *Roue de Framont* (*fig.* 7, *pl.* CIX) diamètre de la roue $= 2^m.74$.—On a fait h' égale à ce diamètre — vingt augets — vingt-quatre tours et $\frac{1}{4}$ par minute — dépense calculée en prenant le coefficient $m = 0.669$ et la charge d'eau sur le centre de l'orifice $= 0^m.90$ —la largeur de l'orifice $= 1^m.27$, sa hauteur $= 0^m.11$. On a trouvé la vitesse d'affluence $V = 5^m.04$, $\cos.\alpha = 0.98$, $v = 3^m.478$, et enfin $Fv = 867^{km}.7$.

Cette roue menait un marteau de forge dont un lever exact a été fait par M. *Virlet*, et dont les effets ont été calculés par cet officier, en appliquant à ses données la théorie des marteaux de M. *Poncelet*, résumée pag. 1119. On a trouvé pour le travail dépensé sur ce marteau par la roue en question, 866^{km}, nombre qui diffère à peine du travail Fv transmis à cette roue par la chute $= 867^{km}.7$.

35. *Roue de côté à palettes planes, emboîtées dans un coursier circulaire* (fig. 4, pl. CXI). Ces roues reçoivent l'eau *de côté*, au-dessous de leur diamètre horizontal soit par un déversoir, soit par une vanne ordinaire, et elles tournent dans un coursier dont le rayon est de 0^m01 environ plus grand que le rayon R de la roue, et qui emboîte latéralement les palettes de celle-ci en laissant un *jeu* de

0^m01 égal au jeu inférieur. Ce jeu, nécessaire au libre mouvement des palettes, donne nécessairement lieu à une perte d'effet notable.

36. D'après cette disposition, on voit qu'à son entrée dans la roue, l'eau choque la palette, puis elle descend avec celle-ci jusqu'au bief inférieur, et sort de la roue vers l'extrémité de son diamètre vertical avec une vitesse qui est ici sensiblement égale à celle de la roue. Afin de faciliter le dégagement de l'air, on laisse des jours au tambour de la roue vers la partie supérieure de l'intervalle des aubes.

37. Conservant toutes les notations ci-dessus, on a donc encore ici (1) et (2),

$$u^2 = v^2 \text{ et } w^2 = W^2 = V^2 + v^2 - 2Vv \cos.\alpha,$$

et en mettant ces valeurs dans l'équation générale (1), il vient pour l'effet utile théorique,

$$Fv = Ph' + \frac{P}{g}[V \cos.\alpha - v]v. \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

en ne tenant aucun compte des pertes toujours importantes dues au jeu.

38. Le maximum théorique de cet effet utile correspond à une vitesse de roue telle qu'on ait

$$v = \frac{V \cos.\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Il augmenterait encore un peu si l'on diminuait α, c'est-à-dire en disposant la prise d'eau de manière que la vitesse d'affluence V fût dirigée autant que possible suivant la vitesse v du point de la palette atteint par le liquide. Si α pouvait être considéré comme nul, on aurait donc

$$v = \frac{V}{2}$$

pour la condition du maximum d'effet qui deviendrait ainsi :

$$Fv = \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2 + Ph' = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + Ph' - \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2. \quad . \quad (24)$$

c'est-à-dire qu'il s'en faudrait de $\frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2$ que l'effet utile atteignît le travail total $P(h + h')$ de la chute, en supposant $V^2 = 2gh$, et toujours en négligeant l'effet des pertes d'eau.

39. On peut voir sur les figures 3 et 5 de la planche CXI, qu'on augmentait encore naguère ces pertes de travail en pratiquant, aux dépens de la chute totale $H = h + h'$, un ressaut destiné, disait-on, à faciliter le dégorgement des eaux. M. *Belanger*

est le premier, je crois, qui ait proposé non-seulement de supprimer ce ressaut, mais encore d'abaisser le bas du coursier au-dessous du niveau du bief inférieur, et d'utiliser ainsi une partie de la force vive des eaux de sortie pour refouler les eaux d'aval, conformément d'ailleurs à une curieuse remarque de *Venturi*, que je crois devoir consigner ici, parce qu'elle est peu connue.

40. *Observation de Venturi.* « Dans les chutes artificielles que « l'on procure dans les canaux pour mettre en mouvement des « moulins, lorsque l'eau se précipite dans une conduite rectangu- « laire de planches de bois DBCF (*fig. 4, pl.* CX), située presque « horizontalement au milieu du canal inférieur, la surface de l'eau « en K est d'un ou deux pieds au-dessous du courant inférieur FL(*). « L'eau en F tend à refluer et à descendre par FK, mais le cou- « rant. . . . . l'emporte continuellement et ne lui permet pas de se « glisser jusqu'en K. . . . . .La conduite rectangulaire DBFC doit « être prolongée d'une certaine quantité le long du canal inférieur, « autrement l'eau pourra refluer de F en K. . . . . .Les meuniers « connaissent l'utilité de ce prolongement; l'expérience leur a ap- « pris que ce prolongement empêche dans les crues que les eaux « ne regorgent aussitôt dans la conduite et n'arrêtent le mouve- « ment de la roue. . . . .; pour cela, ils construisent le bord de la « conduite DF à la hauteur des eaux que le moulin peut supporter. « La ville de Final, dans le Modenais, m'ayant chargé de donner « à une partie des eaux du Panaro un changement de cours. . . . . « j'ai profité de ce prolongement du coursier DF, combiné avec « d'autres artifices, pour soutenir l'action des moulins dans le nou- « veau canal; j'ai réussi non-seulement au delà de ce que le peu- « ple croyait, mais au delà de ce que j'avais moi-même espéré. » (*Recherches expérimentales du citoyen Venturi*, 1797, pages 50 à 52.)

41. *Conditions d'établissement.* Il conviendra donc dans les cas où la roue aura une vitesse assez grande, d'établir le bas du coursier au-dessous du niveau moyen du bief d'aval d'une quantité un peu moindre que la hauteur des palettes,—de prolonger ce coursier d'environ $1^m.50$ au delà de la verticale du centre de la roue,—de munir ce prolongement de joues verticales dont le bord supérieur devra dominer le plus haut niveau des eaux d'aval,—et de se fier ainsi à la vitesse de sortie pour refouler ces eaux. — Quelques auteurs recommandent encore de donner au prolongement du coursier une pente de 0.1 environ, afin, disent-ils, d'entretenir la vitesse de sortie *u*. Cette pratique ne nous paraît justifiée ni par l'ex-

(*) On avait déjà remarqué cet abaissement de niveau en K. (*Guillielmini; della natura dè Fiumi*, cap. 7.)

périence ni par le raisonnement. Dans le cas de roues tournant lentement, l'immersion du coursier ne devra pas s'élever à plus de la moitié de la hauteur des palettes.

42. En général, les roues de côté reçoivent et doivent recevoir l'eau au-dessous de leur diamètre horizontal.—La partie de l'aube qui reçoit le choc du liquide doit être sensiblement parallèle à la vitesse relative W du liquide par rapport à l'aube (§ 17). On donne habituellement à ces roues une vitesse à la circonférence extérieure de $1^m.30$ à $1^m.50$.—Le vannage en déversoir de la fig. 4, pl. CXI, convient plus particulièrement aux roues lentes et l'épaisseur de la lame d'eau sur le seuil reçoit alors de $0^m.20$ à $0^m.25$, quand la chute totale excède 1 mètre. Les vannages inclinés de la fig. 1, même planche, s'appliquent aux roues plus vives. L'eau admise entre deux aubes consécutives ne doit pas excéder les $\frac{2}{3}$ de la capacité qu'elles laissent entre elles. On donne environ $0^m.35$ de hauteur aux palettes, et on les espace à peu près de la même quantité.

Suivent les analyses de quelques calculs et observations dus à M. *Morin* sur diverses roues de cette catégorie, qui ne sauraient d'ailleurs être proposées pour modèles; voyez les *Expériences sur les roues hydrauliques*, 1834, de ce professeur distingué.

43. *Roue de la fonderie de Toulouse* (fig. 1, pl. CXI). Diamètre extérieur, 6^m.—Nombre d'aubes, 36. Hauteur des aubes, 0^m50, dans le sens du rayon. —Largeur, $1^m.60$. — Vannage incliné de 34° 30′ sur la verticale. — Le plan qui suit la vanne a longueur $0^m.78$, il est incliné de 9° 25′.—Le coursier circulaire qui emboîte la roue laisse sur le fond et les côtés un jeu de $0^m.01$.—L'eau atteint la roue à $0^m.50 = h'$ au-dessus de son point inférieur; la largeur de l'orifice d'écoulement $= 1^m.55$; on a calculé la dépense en employant le coefficient 0.75, supposé $\alpha = 0$ et trouvé ainsi que le second membre de la formule (22) devait être multiplié par 0.74 pour exprimer l'effet utile réel de cette roue, toutes les fois que la levée de la vanne ne dépassait pas $0^m.10$.—Le rapport le plus convenable de v à V a paru être $\frac{v}{V} = 0.40$ à 0.45.

44. Le coefficient moyen 0.74 indiqué ci-dessus s'est abaissé à 0.60, lorsque la vanne a été levée de $0^m.15$ à $0^m.30$ et $\frac{v}{V}$ compris entre 0.5 et 0.8. Dans ce cas, le quotient moyen du travail de la roue par le travail P H de la chute s'est abaissé à 0.33.

La charge sur le centre de l'orifice a varié dans ces expériences de $1^m.10$ à $1^m.46$.

45. *Roue de la poudrerie de Metz* (fig. 2, pl. CXI). Diamètre extérieur, $3^m.96$.—Nombre d'aubes, 24.—Écartement des aubes mesuré à la circonférence extérieure $0^m.518$.— Hauteur dans le sens

du rayon $0^m.30$. — Emboîtement exact dans son coursier en pierres de taille qui réduit le jeu à $0^m.005$. — Vanne verticale dont le seuil est singulièrement raccordé par un plan horizontal et un arc de cercle avec le fond du coursier. — A $0^m.80$ en aval de l'aplomb de l'axe, il a été établi un inutile ressaut de $0^m.10$. — On a pu faire varier la chute totale H de $0^m.77$ à $0^m.84$, et la charge sur le centre de l'orifice de $0^m.15$ à $0^m.36$. On a dans le calcul supposé $\alpha = 0$, évalué la dépense à l'aide de coefficients un peu incertains et retrouvé ainsi 0.74 pour le coefficient pratique de la formule (22), tant que $\frac{v}{V}$ a été compris entre 0.55 et 0.80.

46. *Roue de Châtellerault* (fig. 3, pl. CXI). Diamètre $= 2$ R et autres données que je n'ai pas su découvrir. — Jeu très-faible. — Vannage incliné à 45°. — Largeur de l'orifice, $1^m.28$. — Coefficient employé pour évaluer la dépense 0.75. — $\alpha = 25°$, $\cos.\alpha = 0.90$. Le maximum d'effet a paru correspondre à un rapport de $\frac{v}{V}$ compris entre 0.40 et 0.67, et l'on a trouvé 0.75 pour le coefficient pratique du second membre de la formule (22).

47. *Roue de la cristallerie de Baccarat* (fig. 4, pl. CXI). Construite, en 1816, par *Aitken* et *Steel*. — Diamètre extérieur, $4^m.006$. — Largeur égale à celle de la vanne en déversoir $= 3^m.90$. — Nombre d'aubes, 32. — Jeu très-faible. — La chute totale a varié dans ces expériences de $2^m.008$ à $2^m.079$, et les abaissements de la vanne au-dessous du niveau général ont été successivement $0^m.112$, $0^m.175$, 0^m220 et $0^m.260$. — On a calculé la dépense par la formule des déversoirs (pag. 584), en faisant $\mu = 0.393$, 0.390, 0.385 et 0.385, et trouvé ainsi que le coefficient, qui devait multiplier le second membre de la formule (22), s'élevait à 0.788, tant que la vitesse v de la roue mesurée à la circonférence est restée comprise entre $0^m.48$ et $1^m.80$ et $\frac{v}{V \cos.\alpha}$ entre 0.47 et 1, le volume d'eau introduit dans les augets ne dépassant pas la moitié de leur capacité.

48. *Roues des meules de Baccarat* (fig. 5, pl. CXI). Données que je n'ai pas su compléter. 40 aubes espacées de 0^m384. — Vannage incliné à 71° sur l'horizontale. — Charge d'eau moyenne sur le côté supérieur de l'orifice $0^m.35$. — Dépense calculée en fonction de la charge sur le centre de l'orifice en adoptant le coefficient 0.70. — On a trouvé ainsi pour le coefficient pratique qui devait multiplier le second membre de la formule (22) le chiffre 0.792, tant que les augets n'étaient qu'à moitié remplis et que le rapport $\frac{v}{V \cos.\alpha}$ était compris lui-même entre 0.37 et 2.

49. *Roues à palettes planes, non emboîtées.* On prendra une idée

suffisamment exacte de ces anciennes roues, en relevant par la pensée la roue de la figure 1, planche CXI, et en prolongeant le coursier rectiligne qui suit la vanne et qui deviendra ainsi à peu près tangent à la circonférence extérieure dans la verticale de son centre. Les palettes avaient habituellement $0^m.30$ à $0^m.40$ dans le sens du rayon et leur écartement était à peu près égal à cette hauteur. On donnait ou on ne donnait pas de pente au coursier ; le jeu qui pouvait être réduit à $0^m.01$ ou 0.02, s'élevait quelquefois à $0^m.05$ et $0^m.06$; et le vannage rarement incliné (*fig.* 1) était plus souvent vertical (*fig.* 2), et même assez éloigné de la roue.

50. Avec ces dispositions et V étant toujours la vitesse réelle avec laquelle l'eau atteint la roue, et qui peut être approximativement calculée par les formules de l'article *Ecoulement* (pag. 567) et v la vitesse uniforme du centre d'immersion des aubes, on peut admettre qu'une fois engagé entre deux aubes consécutives, le liquide perd toute vitesse relative à la capacité mobile qu'elles laissent entre elles, qu'il n'a plus dès lors, en quittant la roue, qu'une vitesse absolue u qui est sensiblement égale à v. Remarquant en outre que $h'=0$ et que les vitesses V et v étant parallèles, $\alpha=0$ et $\cos.\alpha=1$, on a pour obtenir la vitesse perdue w (§ 8),

$$w^2=W^2=V^2+v^2-2Vv=(V-v)^2. \quad . \quad . \quad (25)$$

51. Substituant ces valeurs dans l'équation générale (1) et faisant les réductions, on a pour l'effet utile théorique de ces roues,

$$Fv=\frac{P}{g}(V-v)v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

effet qui deviendra théoriquement *maximum* à la condition

$$v=\frac{1}{2}V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

que la vitesse du centre d'impression des aubes soit la moitié de la vitesse d'affluence du liquide, et s'élèvera alors à

$$Fv=\frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Cet effet utile atteindra donc au plus la moitié du travail dépensé sur le système.

52. L'eau, en quittant la roue, et emportant avec elle un travail $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2=\frac{1}{8}\frac{P}{g}V^2$, on pourrait, il est vrai, en utiliser une partie par une disposition analogue à celle qui a été étudiée aux §§ 39 et 40, incliner et disposer le vannage de manière à diminuer les frottements, les contractions et les pertes de vitesse, mais cet accroissement de dépense n'augmenterait que de peu l'effet utile pratique.

53. Quelques expériences de *Smeaton* et de *Bossut*, assez peu concluantes en ce qu'elles ont été faites sur un *modèle* de roue, donnent 0.60 pour le coefficient pratique qui doit multiplier l'effet utile, lequel se trouverait ainsi réduit à

$$F v = 0.6 \frac{P}{g} [V - v] v. \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

et qui, dans le cas du maximum d'effet, correspondant, d'après ces expériences, à $v = 0.4$ V, s'élèverait au plus à

$$F v = 0.288 \frac{P V^2}{2g} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

la roue ayant très-peu de jeu.

54. Ces anciennes roues ont l'avantage d'être simples, très-peu coûteuses tant en frais d'entretien que de premier établissement. Peut-être, en dépit de leur faible rendement, satisfont-elles, sur les usines où on les voit encore, à la condition d'y *produire l'effet déterminé pour le moindre prix*, caractère qui, en dehors du domaine de l'art, sera toujours celui d'après lequel, avec raison, on jugera une MACHINE (page 1094).

55. *Roues pendantes sur bateaux*. Ces roues ne diffèrent de celles qui précèdent qu'en ce qu'elles sont habituellement montées entre deux bateaux portant leur axe, et laissant entre eux une section de liquide beaucoup plus grande que la surface des palettes ; il en résulte que celui-ci peut se détourner en partie de la voie suivie par les palettes, et que l'on ne sait plus bien alors quel est le poids P de liquide qui les atteint dans chaque seconde.

56. Cependant, si l'on remarque que A étant la section plongée de la palette verticale, $\Pi = 1000$ kil., le poids du mètre cube d'eau, et U la vitesse *moyenne* du liquide que l'on croit être (pag. 451) les 0.8 à peu près de la vitesse V de la surface, on aura tout au moins par approximation,

$$P = 1000\,A\,U = 1000\,A\,(0.8\,V). \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Substituant cette valeur de P dans la formule (26) des roues à palettes planes non emboîtées, il viendra pour l'effet utile des roues pendantes, v étant la vitesse du centre d'impression des aubes,

$$F v = 0.8 \times \frac{1000\,A\,V}{g} (V - v)\, v \ldots \ldots \quad (32)$$

57. Il résulte des observations de M. *Poncelet* sur trois moulins du Rhône que l'expression ci-dessus exprime, en effet, le travail réellement transmis en une seconde au centre des aubes, et qu'il

n'y a pas lieu dès lors de la corriger par aucun coefficient, pourvu cependant que le rapport $\frac{v}{V}$ s'éloigne peu de 0.40.

58. *Conditions d'établissement*. On donne habituellement aux aubes de ces roues une hauteur égale au quart ou au cinquième du rayon de la roue. Sur le Rhône, leur hauteur varie de 0^{m}50 à 0^{m}80, et de plus, leur bord supérieur est plongé au-dessous du niveau, ce que M. *Poncelet* motive en remarquant que le fleuve étant très-profond, la plus grande vitesse du courant répond à un point situé à une distance assez grande de sa surface. La longueur des aubes croît à peu près proportionnellement au travail que l'on veut transmettre. — Leur nombre ne dépasse pas douze. Cependant, *Navier* conseille de faire leur écartement égal à leur hauteur, de porter leur nombre à vingt au moins, et, en outre, de les incliner sur le rayon de manière à ce qu'elles forment avec son prolongement un angle de 30° quand la roue plonge du quart de son rayon et de 15° seulement quand elle plonge du tiers, ce qui est, d'après Navier, la plus grande profondeur à laquelle la roue doive jamais être immergée. Toutefois, *Navier* rapporte lui-même, d'après le *Manuel du meunier* de *Béguillet*, qu'une roue à aubes inclinées sur le rayon, essayée sur un moulin à bateau de Paris, n'a pas réussi, ce qu'il attribue à ce que, vraisemblablement, l'inclinaison n'était pas en rapport avec la hauteur des aubes.

59. *Roues à aubes courbes* de M. *Poncelet*. Nous avons vu (30) que les roues à aubes planes mues par-dessous et généralement employées sur les basses chutes n'utilisaient pas le tiers du travail absolu P H du moteur. Dès 1827, M. *Poncelet* a proposé d'en modifier la forme de manière à leur faire produire un effet utile qui s'approchât du *maximum* absolu, sans leur faire perdre l'avantage qui les distingue de pouvoir être animées d'une grande vitesse. Toute la question consistant, comme on le sait, à faire en sorte que l'eau, n'exerçant aucun choc à son entrée dans la roue ni dans son intérieur, la quitte également sans vitesse sensible, M. *Poncelet* a remplacé les aubes droites (*Pl.* CXII) par des aubes cylindriques se raccordant à peu près tangentiellement avec la circonférence extérieure. L'eau arrivant ainsi sur ces courbes suivant une direction à peu près tangente à leur élément extrême, s'y élève sans les choquer, et le centre de gravité de la lame d'eau introduite y atteint théoriquement une hauteur due à la vitesse relative de cette lame par rapport à celle de l'aube. La lame redescend ensuite en acquérant de nouveau, mais en sens contraire du mouvement de la roue, une vitesse relative égale à celle qu'elle avait en entrant, et dans certaines conditions, sort ainsi de la roue avec une vitesse absolue qui est nulle.

60. Ainsi, V étant toujours la vitesse de l'eau au moment où elle atteint la roue, et v la vitesse uniforme de la circonférence extérieure de celle-ci, la vitesse relative du liquide à l'entrée sera $(V - v)$, et la hauteur à laquelle le centre de gravité de la lame introduite s'élèvera sur l'aube sera, abstraction faite du frottement,

$$\frac{(V-v)^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Il acquerra de nouveau, en descendant le long de l'aube, la vitesse relative $-(V-v)$ en sens contraire du mouvement de la roue, et comme il est d'ailleurs animé de la vitesse $+v$ de la roue, il quittera celle-ci avec une vitesse absolue.

$$u = -(V-v)+v = 2v - V. \;.\;.\;.\; (34)$$

il suffira donc, pour que la vitesse de sortie u soit nulle, de satisfaire à la condition :

$$u = 2v - V = o, \text{ ou } v = \frac{V}{2} \ldots\ldots (35)$$

c'est-à-dire que la roue devra prendre une vitesse v égale à la moitié de la vitesse d'affluence V du liquide. La vitesse perdue par le choc étant nulle aussi bien que la vitesse de sortie, l'équation générale (1) se réduit à

$$Fv = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

c'est-à-dire que la roue utiliserait le travail total PH de la chute, si la vitesse d'affluence V pouvait être la vitesse due à la hauteur H de cette chute. L'effort F exercé à la circonférence extérieure s'élèverait lui-même, dans les mêmes conditions, à

$$F = \frac{P}{g}V \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

il serait donc le double de celui qu'exercerait une roue à palettes planes pour les mêmes vitesses; avantage précieux dans tous les cas où la résistance à vaincre au départ est considérable.

61. Mais, ainsi que le remarque l'illustre auteur de ce système, « différentes circonstances empêchent que les choses se passent tout à fait ainsi dans la pratique ». En effet, s'il convient, pour que l'eau sorte de la roue sans vitesse absolue, que la partie inférieure de l'aube soit tangente à la circonférence extérieure, la condition de n'avoir point de choc à l'entrée exige, au contraire, que cette même partie inférieure de l'aube soit parallèle (*fig.* 2, *pl.* CXII) à la vitesse relative W ou soit dirigée (§§ 8 et 17) suivant la résultante

des vitesses $(-V)$ et $+v$. Or, ces vitesses composantes ne peuvent être toutes deux tangentielles, car alors le liquide n'entrerait pas dans la roue : elles doivent donc faire entre elles un angle α qui ne soit pas nul, et dès lors l'inclinaison de la partie extrême de l'aube sur la tangente à la roue ne peut être nulle. M. *Poncelet* a fixé les limites convenables de cette inclinaison de 24° à 30°.

62. Supposons cette inclinaison de 24°; si l'on a fait prendre à la roue la vitesse $v=\frac{V}{2}$ qui convient à son maximum d'effet, cette même vitesse $\frac{V}{2}$ sera celle qu'elle reprendra par rapport à l'aube en quittant celle-ci : or, cette vitesse $\frac{V}{2}$ formant avec la vitesse $v=\frac{V}{2}$ de la circonférence un angle de 156° supplément de l'inclinaison 24°, la vitesse absolue de sortie u sera la résultante de ces composantes égales, et l'on aura :

$$u=2\left(\frac{V}{2}\cos. 78^\circ\right)=V\sin. 12^\circ=0.208\,V. \quad (38)$$

et pour la demi-force vive emportée par l'eau de sortie en une seconde

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}(0.208\,V)^2=0.043\left[\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2\right]$$

de sorte que le travail que l'on perdrait par cette disposition ne serait pas le vingtième de la demi-force vive totale possédée par le liquide, avant qu'il ait agi sur la roue.

63. *Effet utile pratique.* Il a été fait sur la roue de M. *Poncelet* un très-grand nombre d'observations qui ne permettent aucun doute sur ses excellents résultats. Toutefois, je ne connais qu'une série d'expériences vraiment complètes, et je les appelle ainsi, parce que, au lieu d'évaluer la dépense à l'aide de formules assez incertaines, l'auteur de ces expériences, M. *Marozeau*, a reçu dans un vaste bassin et a pu ainsi directement jauger ces dépenses (Voyez *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, tome 21, n° 101, année 1848). Or, sous une chute H de 1m.47, et les dépenses P ayant varié de 633k à 940k, l'effet utile moyen s'est élevé à 0.67 P H, c'est-à-dire que cette roue dont M. *Poncelet* a si noblement jeté la propriété dans le domaine public, donne un rendement effectif pratiquement équivalent à celui des *turbines* de toute espèce de modèle, dont l'industrie s'est éprise et qu'elle paie au prix exorbitant des produits de luxe et de mode, en dépit de leur ancienne origine.

64. *Tracé de la roue.* Le diamètre de la roue se détermine d'a-

près les convenances de localités et de travail. Il importe qu'il ne soit jamais trop petit. — En amont de la verticale du centre de la roue, on prendra sur sa circonférence extérieure un point o' (*fig.* 1 et 2, *pl.* CXII), tel que l'angle au centre o' C Z $=$ 4° 45′ environ. Par ce point o', on mènera une tangente $o'\ t'$ qui sera la direction générale du fond du coursier, l'épaisseur e de la lame d'eau lorsqu'elle atteint la roue étant sensiblement les $\frac{3}{4}$ de la levée verticale E de la vanne, et celle-ci ne devant pas dépasser convenablement 0m.20 à 0m.25, e se trouve ainsi connu. Elevant sur $o'\ t'$ une perpendiculaire égale à e et menant par son extrémité une parallèle $o\ t$ à $o'\ t'$, on aura à peu près le point o où le filet supérieur de la lame rencontrerait la circonférence extérieure, s'il se mouvait parallèlement à $o'\ t'$. Nous allons voir qu'en vertu du tracé suivant, que j'emprunte à M. *Morin*, il s'éloigne un peu de cette voie.

Par ce point o et par le centre C de la roue, on tirera un rayon C o que l'on prolongera jusques à la tangente $o'\ t'$; on partagera d'une part l'arc oo', et de l'autre l'excès $o4$ du rayon en un même nombre de parties égales; on mènera des rayons indéfinis par les points de divisions de l'arc, et prenant successivement sur les

rayons	C4,	C3′,	C2′,	C1′,	Co'
des distances	C4,	C3,	C2,	C1,	Co
on obtiendra les points	4	3′	2′	1′ et	o'

par lesquels on fera passer une courbe qui, en lui laissant un petit jeu vers o', sera la forme du fond du coursier dans cette partie. Elle se raccordera vers l'amont avec la direction de la tangente $o'\ t'$ et vers l'aval par un petit arc de cercle concentrique à la roue, terminé lui-même par un ressaut brusque ayant son arête supérieure, au niveau moyen du bief d'aval, un peu en arrière de la verticale du centre de la roue.

Par le point o', on mènera une tangente à la spirale 4 3′ 2′ 1′ 0′ et sur cette tangente on portera à une échelle convenable la vitesse d'affluence V de la lame d'eau; sur une tangente en o' à la circonférence extérieure, on portera à la même échelle la vitesse $v = \frac{V}{2}$ de cette circonférence.

Joignant par la droite W les extrémités de V et v, on aura la vitesse relative W. Menant par o' une parallèle à W, cette parallèle sera la direction que doit prendre l'élément inférieur de l'aube : ainsi, élevant en o' une perpendiculaire à cette direction, elle contiendra le centre c de l'aube circulaire, centre que l'on choisira arbitrairement, mais de telle sorte cependant que la partie supé-

rieure de l'aube coupe la circonférence intérieure à peu près à angle droit.

65. *Hauteur de la couronne*. Le tracé que nous venons d'indiquer suppose que l'on connaît le rayon R′ de la circonférence intérieure ou la hauteur (R — R′) de la couronne.

Or, on peut remarquer que, avec la condition $v = \frac{V}{2}$ théoriquement exigée pour le maximum d'effet et que nous supposons satisfaite, la hauteur à laquelle le *centre de gravité* de la lame d'eau s'élèvera sur l'aube (33) deviendra, abstraction faite des frottements,

$$\frac{1}{4}\frac{V^2}{2g}$$

c'est-à-dire au plus égale au quart de la hauteur H de la chute. Mais il faut bien remarquer que, si la partie postérieure de la lame introduite s'élève beaucoup moins, la partie antérieure s'élève par compensation beaucoup plus que le centre de gravité de l'ensemble. Bien que nous ne sachions pas calculer les effets du frottement de la lame sur l'aube, nous pensons que le raisonnement d'accord avec l'expérience exige, pour éviter tout jaillissement dans la roue, qu'on porte la hauteur de la couronne jusqu'à

$$(R - R') = \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

c'est-à-dire que la hauteur de la couronne pourra être convenablement prise égale à la moitié au plus de la chute; peut-être pourrait-elle être réduite à $\frac{1}{3}$ H, si l'arc embrassé par la lame affluente sur conférence extérieure avait très-peu d'amplitude, ou, en d'autres termes, si la lame d'eau introduite avait peu de *longueur*.

66. On inclinera d'ailleurs le vannage à 45°, s'il est possible, ou tout au moins à un de base sur deux de hauteur, et les côtés du pertuis étant arrondis, le coefficient de la dépense pourra être fait $= 0.80$ pour la première inclinaison, et 0.72 ou 0.73 pour la seconde. Enfin, on donnera à la roue une largeur dans œuvre d'environ 0^{m}.10 plus grande que la largeur de la vanne. Voyez au reste l'édition du *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes* de M. *Poncelet*, qui contiendra les additions que l'illustre ingénieur a faites à ses mémoires de 1827, et qui sera prochainement publiée.

67. *Roue horizontale à palettes planes* (*fig.* 6, *pl.* CXI). Ces roues ont habituellement une épaisseur assez faible pour qu'il soit permis de négliger le travail Ph' transmis par le liquide pendant sa descente h' sur les palettes. On suppose donc que l'eau n'agit sur ces roues que par le choc; V étant alors la vitesse réelle d'affluence

du liquide, A l'angle aigu formé par le plan de la palette avec la direction de V, v la vitesse de la palette et B l'angle aigu du plan de la palette avec la direction de son mouvement, on a V sin. A et v sin. B pour les composantes des vitesses perpendiculaires au plan de la palette, et dès lors, pour la vitesse perdue w perpendiculairement au même plan,

$$w^2 = [V \sin. A - v \sin. B]^2 \ldots\ldots \quad (39)$$

68. Après le choc, l'eau est supposée avoir conservé une vitesse parallèle au plan de la palette, dirigée de haut en bas, et dès lors $= V \cos. A$. De son côté, la palette fuit de bas en haut parallèlement à son plan avec une vitesse $= v \cos. B$. Les choses se passent donc comme si, la palette étant en repos, le liquide glissait parallèlement au plan de celle-ci avec une vitesse

$$v' = V \cos. A + v \cos. B \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

69. Mais, en outre, le liquide a conservé au moins la vitesse v de la palette, il quitte donc la roue avec une vitesse absolue u résultante de v et de v', et dès lors on a

$$u^2 = v^2 + v'^2 - 2\,v v' \cos. B \ldots\ldots \quad (41)$$

70. Mettant ces valeurs de w^2 et de u^2 dans l'équation générale (1), y faisant $h' = o$, et simplifiant, on a pour l'équation du travail de ces roues

$$Fv = \frac{P}{g}[V \sin. A - v \sin. B]\, v \sin. B. \quad . \quad (42)$$

c'est-à-dire que le travail de la roue est le produit de la vitesse v du point choqué par la quantité de mouvement relative du liquide estimée dans la direction de v.

71. L'effet utile Fv augmentera évidemment avec sin. A, et dès lors le premier terme sera le plus grand possible pour $A = 90°$, c'est-à-dire que le liquide devra frapper la palette perpendiculairement à son plan.

Cette première condition supposée satisfaite, on augmentera encore l'effet utile théorique en faisant

$$v = \frac{V}{2 \sin. B} \quad \text{ou} \quad v \sin. B = \frac{V}{2} \ldots \quad (43)$$

et toutes ces conditions satisfaites n'élèveront l'effet utile qu'à la valeur

$$Fv = \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2 \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

de sorte que ces roues bien établies ne sauraient utiliser plus de la

moitié de la demi-force vive du liquide affluent. Or, en pratique, elles sont loin d'atteindre cette extrême limite, et, d'après MM. *Tardy et Piobert*, leur effet utile et pratique peut être approximativement exprimé dans le cas général par la relation

$$Fv = 0.7 \frac{P}{g} [V \sin. A - v \sin. B] v \sin. B.. \quad (45)$$

72. *Roues horizontales à palettes courbes* (*fig.* 7, *pl.* CXI). Raisonnant ici comme au § 67, on aura de même pour la vitesse perdue w normalement à la courbe de l'aube au point M où le filet moyen de la lame liquide vient l'atteindre

$$w^2 = [V \sin. A - v \sin. B]^2 \ldots\ldots \quad (46)$$

73. Quant à la vitesse dans la direction de l'aube que nous avons désignée par v', elle se compose de l'excès de V cos. A sur v cos. B, mais B étant obtus en vertu de la position de l'aube, son cosinus deviendra négatif, et, comme on ne peut plus négliger ici la partie h' de la chute, on a pour la vitesse que le liquide a acquise au point N dans la direction du dernier élément de l'aube

$$v'^2 = (V \cos. A + v \cos. B)^2 + 2gh' \ldots \quad (47)$$

à cause de $-(-v \cos. B) = +v \cos. B$.

74. Ainsi, en désignant par φ l'angle *obtus* des vitesses v' et v, il vient pour la vitesse absolue u que le liquide conserve en quittant la roue

$$u^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos. \varphi \ldots\ldots \quad (48)$$

L'équation générale (1) devient donc

$$Fv = Ph' + \frac{1}{2}\frac{P}{g}[V^2 - (V \sin. A - v \sin. B)^2 - u^2] \quad (49)$$

75. Si l'on pouvait rendre nuls les carrés soustractifs compris dans la parenthèse, l'effet utile de cette roue atteindrait donc la valeur

$$Fv = Ph' + \frac{1}{2}\frac{P}{g} V^2 \ldots\ldots \quad (50)$$

c'est-à-dire qu'il s'élèverait au travail absolu de la chute totale $H = (h + h')$, si la vitesse d'affluence V pouvait jamais être la vitesse $\sqrt{2gh}$ due à la hauteur du niveau supérieur au-dessus du point d'introduction.

76. Or, on parviendrait à rendre nul le second terme de la parenthèse, si l'on faisait

$$v \sin. B = V \sin. A \quad \text{ou} \quad \frac{v}{V} = \frac{\sin. A}{\sin. B} \ldots \quad (51)$$

et nous avons déjà vu (15) que cette condition serait satisfaite, si l'élément de l'aube au point d'introduction suivait la direction de la résultante des vitesses ($-v$) et $+V$.

77. Quant à la vitesse de sortie u (48), elle deviendrait nulle, si l'on avait

$$v^2 + v'^2 = -2\,v\,v' \cos.\,\varphi. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (52)$$

condition qui se réaliserait, si l'on avait à la fois

$$v' = v \quad \text{et} \quad \cos.\,\varphi = (-1). \;.\;.\;.\;.\; (53)$$

c'est-à-dire que le dernier élément de l'aube devrait être horizontal et dirigé en sens inverse de la vitesse de la roue, et que de plus la vitesse v' doit être égale à v.

78. Mais nous avons déjà trouvé pour v une valeur obligatoire (51); égalant cette valeur à celle de v' (47), on déduira de l'équation obtenue la hauteur h' à laquelle il faudra élever le point d'affluence au-dessus du plan inférieur de la roue. On trouvera ainsi après quelques simplifications, α étant l'angle de v et V, et $\sqrt{2gh}$ supposé $=$ V,

$$h' = \frac{V^2}{2g}\left[1 - \frac{2\cos.\,A \sin.\,\alpha}{\sin.\,B}\right] = h\left[1 - \frac{2\cos.\,A \sin.\,(A+B)}{\sin.\,B}\right] \quad (54)$$

En sorte que, si l'angle α était très-petit ou nul, et si le point d'affluence était situé dans le plan supérieur de la roue, son épaisseur h' devrait être à peu près égale à la moitié de la chute totale H.

79. En pratique, le liquide se dégagerait très-difficilement de la roue, si le dernier élément des aubes était rigoureusement horizontal. On l'incline sur l'horizon de 25° environ, c'est-à-dire que l'on y fait $\varphi = 155°$: d'où résulte une perte de travail facile à évaluer. On donne d'ailleurs à la lame d'eau et aux aubes peu de largeur dans le sens du rayon, parce qu'il n'y a que le point de l'aube placé sur le filet moyen qui puisse prendre la vitesse exigée (51).

Lorsque ces roues sont établies dans les conditions du maximum d'effet, elles utilisent environ les sept dixièmes du travail absolu de la chute

$$F\,v = 0.7\,P\,H. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (55)$$

80. *Euler*, qui s'est occupé de cette roue (Académie de Berlin, 1754), avait proposé, dans le cas où l'on aurait à dépenser un grand volume d'eau, de recevoir l'eau motrice dans un réservoir cylindrique d'un diamètre égal à celui de la roue, placé verticalement au-dessus d'elle, au travers duquel l'axe de la roue passerait librement et d'où l'eau s'échapperait par un grand nombre d'ajutages inclinés distribués à la circonférence.

On reconnaît ici très-exactement le principe de plusieurs *turbi-*

nes modernes et notamment de celle qui porte le nom de *turbine-Fontaine*.

Des brevets d'invention ayant fait tomber dans le domaine privé la propriété de la plupart de ces turbines, je ne m'en occuperai pas ici, et je renverrai à la *Théorie des effets mécaniques de la turbine-Fourneyron*, qui a été donnée par M. *Poncelet* en 1838 (Compte rendu de l'Académie des sciences).

ROULEMENT. Voyez pages 825 et 826.

S

SABLE VERT. On appelle ainsi dans quelques fonderies un mélange de sable sortant de la carrière avec un douzième environ de son volume de poussier de houille ou de charbon.

SABLES BOUILLANTS. Sables mêlés d'eau qui, lorsqu'on les enlève, sont à l'instant remplacés par d'autres sables qui s'élèvent du fond en bouillonnant. Il est difficile, mais il n'est pas impossible d'établir des fondations sur ces terrains.

SAISONS. Voy., pag. 79, l'explication du phénomène des saisons.

SCIAGE. Les évaluations du travail exigé par le sciage d'un mètre carré de bois sont incertaines et souvent contradictoires ; ce qui ne surpendra pas sans doute, si l'on considère l'influence très-complexe du degré de siccité du bois, de la largeur du *trait*, de la vitesse de la scie, de sa qualité propre, de la forme de ses dents, etc.

Voici quelques-unes de ces évaluations : j'appelle surface de sciage le produit de l'épaisseur de la pièce par la longueur du chemin que la lame a parcouru horizontalement.

Scieurs de long ; chêne. D'après *Hassenfratz*, trois scieurs de long bien exercés donnent 50 coups de scie par minute dans une pièce de bois de chêne encore vert de $0^m.30$ épaisseur ; et dans une heure, ils scient cette pièce sur une longueur de $3^m.60$; d'où il suit que leur scie avance de $0^m.0012$ à chaque coup et qu'ils font $1^{mm}.08$ de sciage à l'heure. Hassenfratz porte à 12 heures la durée du travail journalier.

Je trouve au *Cours de machines* de MM. *Migout* et *Bergery* les nombres suivants déduits, dit-on, d'observations spéciales :

Surface de sciage obtenue d'un bon scieur de long, en douze heures, et travaillant à la tâche. L'épaisseur des pièces est médiocre et la largeur du trait est de $0^m.003$ à $0^m.005$.

		mm.			mm.
Chêne	vert.	6.6	Bois blanc	vert.	7.72
	sec.	4.4		sec..	5.00
Orme	vert.	6.0	Noyer. . .	vert.	7.00
	sec.	4.0		sec.	5.00

Scieurs de long; pin maritime des Landes. D'après M. l'ingénieur *Lefebvre*, un atelier de scieur de long dans les Landes occupe quatre ouvriers dont trois scient constamment du matin au soir; le quatrième aiguise les dents des scies, les creuse, coupe l'arbre en billots et équarrit ceux-ci à la hache. En été, ces ouvriers font 50 planches par jour, et en hiver 40 seulement. — Les planches ont longueur, 2m.27, largeur, 0m.22. Ce qui donne en nombres ronds pour la surface de sciage journalière obtenue par l'atelier en été 25mm., en hiver, 20mm. L'atelier reçoit 15 fr. pour 100 planches.

Les planches de 2m.60 de long et 0m.18 d'épaisseur sont payées 11 fr. le 100; on n'en obtient que 70 ou 56 par jour, suivant la saison.

Celles de 2m.92 longueur, et 0m.22 épaisseur, sont payées 19 fr. le 100. On en fait 40 ou 32 par jour, suivant la saison.

Au-dessus de cette longueur, on paie 4 fr. en sus du dernier prix pour chaque excédant de longueur de 0m.33.

Ces planches sont généralement d'épaisseur égale et par suite présentent à l'emploi peu de déchet; elles ont une valeur commerciale plus grande que les planches de même dimension données par les scieries hydrauliques.

Scieries hydrauliques; pin maritime. Ces scieries à une seule lame sont desservies par deux ouvriers travaillant l'un pendant le jour l'autre pendant la nuit. Chacun d'eux rend communément par post de 12 heures 30 à 40 planches qu'on leur paie à raison de 3 fr. 50 c. le 100.

A ce prix, ils équarrissent les billots, aiguisent et creusent les dents de la scie; ce qui exige pour l'aiguisage $\frac{1}{2}$ heure pour douze heures de travail de la scie et pour le creusage, trois heures pour six postes composant la durée du travail d'un ouvrier par semaine.

Ces scieries coûtent environ 400 fr., plus les bois nécessaires à la construction, mais les planches qu'elles donnent sont fort mal faites, à surfaces gauches, d'inégale épaisseur, et présentent à l'emploi un grand déchet.

Scierie hydraulique à lames verticales. Le châssis porte quatre lames, et la scierie est mue par une roue de M. *Poncelet*. Pour mouvoir le mécanisme à vide, le châssis faisant 90 oscillations par minute, on a dû dépenser 202 kilogrammètres par seconde, à quoi il faut ajouter 135km. par seconde, lorsque les quatre lames, mues à la même vitesse, mordaient dans du chêne sec de 0m.315 épaisseur, le chariot avançant de 0m.001158 à chaque oscillation du châssis. Il en résulte environ 61600 kilogrammètres pour le seul sciage d'un mètre carré de chêne sec.

Scie circulaire. D'après M. *Bineau*, à la vitesse de 1500 tours par minute, une scie circulaire de 0m.40 diamètre débiterait en

24 heures 20 stères de bois cordé en morceaux de $0^m.16$ de longueur. Elle exige l'emploi de deux hommes assistés de deux enfants pour présenter le bois à la scie et donner les bûches. Le travail nécessaire pour faire marcher cette scie s'élèverait à environ 45 kilogrammètres par seconde. Elle fait en 12 heures environ trois fois l'ouvrage d'un scieur à la main. La largeur du trait de scie qu'elle laisse est de $0^m.004$, celle du scieur à la main est de $0^m.002$ seulement.

Sciage de la pierre. D'après *Navier*, le travail résistant mesuré sur la scie s'élève à 295000 kilogrammètres par mètre carré de surface de sciage pour la pierre de roche des environs de Paris, et à 2069000 kilogrammètres pour le granit. J'ajouterai ici, d'après M. *Morizot*, le nombre d'heures nécessaire au sciage d'une *toise carrée* des matériaux suivants, nombre qui, à l'aide des données ci-dessus, pourra conduire à une approximation des quantités de travail.

	heures.
Pierre de roche (pierre calcaire assez dure et un peu coquilleuse)	72
Lambourde (calcaire tendre)	4.5
Pierre franche (calcaire moyennement dur)	45
Pierre de liais (calcaire à grains fins)	67
Albâtre des Pyrénées	56
Marbre blanc statuaire	72
Granit gris de Normandie	504
——— des Vosges	700
Porphyre rouge et vert	1177

SÉRIE. Suite de termes croissants ou décroissants suivant une certaine loi; la suite ou série est dite *finie*, si le nombre des termes nécessaires pour exprimer la quantité dont la série est le développement est naturellement limité; la série est *infinie*, si le nombre de ses termes est infini; elle est *divergente* tant que ses termes successifs vont en augmentant; elle est *convergente* lorsqu'ils vont en décroissant; et la suite ou série *diverge* ou *converge* d'autant plus que chaque terme croît ou décroît plus rapidement à l'égard de celui qui le précède. Enfin on appelle, d'après *Moivre*, séries *recurrentes* celles où chaque terme dépend de celui qui le précède.

On réduit souvent en séries les quantités que l'on ne peut décomposer sans reste : tels sont les quotients des termes qui ne sont pas multiples du diviseur, et les racines des quantités qui ne sont pas des puissances exactes. On obtient ainsi des approximations souvent suffisantes. Ainsi, en s'efforçant d'appliquer les règles ordinaires de la division aux quantités suivantes, on obtient les séries :

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{a}{b^3}x^2-\frac{a}{b^4}x^3+\frac{a}{b^5}x^4-\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\ldots\ldots$$

cette dernière série sera évidemment *convergente* lorsque x sera plus grand que l'unité.

$$\frac{a}{1-x}=a(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)$$

En poussant quelque division algébrique que ce soit comme on vient de le faire, on parviendra toujours à en exprimer le quotient par une suite infinie de monomes ; et, si la série est convergente, la somme de quelques-uns de ses premiers termes pourra être considérée comme un quotient suffisamment approché dans les applications.

Les extractions de racines continuées de la même manière sur les restes successifs conduisent de même à des séries. Ainsi :

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}-$$

Mais, en considérant les racines comme des puissances fractionnaires (p. 715), on parvient à les développer beaucoup plus facilement que par le procédé de l'extraction, à l'aide d'une autre série très-usuelle, connue sous le nom de *binome de Newton*.

Binome de Newton. Il exprime, en général, le développement d'une puissance quelconque m d'un binome $(x+a)$.

m étant d'abord supposé entier et positif, on a

$$(x+a)^m=x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}\cdot\frac{(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{3\ \ldots\ldots\ n}a^nx^{m-n}$$

la série a $(m+1)$ termes — le dernier terme est le terme général du $(n+1)^{\text{ème}}$ rang — la somme de tous les coefficients $=2^m$, on trouvera leurs valeurs numériques à la page 355 pour tous les cas usuels.

La même formule servirait encore au développement du trinome $(x+a+b)$. On ferait d'abord $(a+b)=c$, on développerait $(x+c)^m$, puis on remettrait $(a+b)$ à la place de c et l'on effectuerait les calculs indiqués.

m étant toujours supposé entier et positif, on a encore :

$$(x-a)^m = x^m\left(1-\frac{a}{x}\right)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$$

$$-\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}\cdot\frac{(m-3)}{3}a^3x^{m-3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{3\qquad\qquad n}a^n x^{m-n}$$

c'est le même développement que celui de $(x+a)^m$, à cela près, que les signes des seuls termes de rang pair sont changés, l'exposant de a étant impair dans chacun de ces mêmes termes.

On aurait donc, m étant toujours supposé entier :

$$(1\pm y)^m = 1 \pm \frac{m}{1}y + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}y^2 \pm \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}y^3 + \ldots +$$

et la série s'arrêtera lorsqu'on parviendra au terme du rang $(m+1)$, car le suivant contiendrait le facteur $(m-m)$ ou zéro.

m étant entier et négatif, on a pour le développement de

$$(x\pm a)^{-m} = \frac{1}{(x\pm a)^m}$$

Savoir :

$$\frac{1}{(x\pm a)^m} = \frac{1}{x^m}\left\{1 \mp \frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x} + \frac{m\ (m-1)}{1\ .\ 2}\frac{a^2}{x^2}\right.$$

$$\mp \frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \ldots\ldots$$

$$\left.\ldots\ \frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\qquad\qquad n}\frac{a^n}{x^n}\right\}$$

$(n+1)$ exprimant le rang d'un terme quelconque.

L'exposant du binome étant fractionnaire et égal à $\frac{m}{n}$, m et n étant premiers entre eux, on a :

$$(x\pm a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\left[1 \pm \frac{m}{n}\cdot\frac{a}{x} + \frac{m\ (m-n)}{n\ .\ 2n}\frac{a^2}{x^2};\right.$$

$$\left.\pm\frac{m\ (m-n)\ (m-2n)}{n\ .\ 2n\ .\ 3n}\frac{a^3}{x^3} + \frac{m\ (m-n)\ (m-2n)\ (m-3n)}{n\ .\ 2n\ .\ 3n\ .\ 4n}\frac{a^4}{x^4} \pm \ldots\right]$$

ce sont les mêmes développements que ci-dessus, en y remplaçant l'exposant m par $\frac{m}{n}$. Mais ce développement ne s'arrête pas, parce que m et n étant supposés premiers entre eux, aucun des coefficients ne peut devenir nul.

Enfin, l'exposant $\frac{m}{n}$ étant supposé à la fois fractionnaire et négatif, on a pour le développement de

$$(x \pm a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(x \pm a)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(x \pm a)^m}}$$

savoir :

$$\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\left[1 \mp \frac{m}{n}\frac{a}{x} + \frac{m(m+n)}{n\,.\,2n}\frac{a^2}{x^2} \mp \frac{m(m+n)(m+2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\frac{a^3}{x^3} + \ldots\right]$$

Nous appliquons ces séries générales à quelques cas particuliers qu'on rencontre souvent :

$$\sqrt{1 \pm x^2} = 1 \pm \frac{x^2}{2} - \frac{1\,.\,x^4}{2\,.\,4} \pm \frac{1\,.\,3\,.\,x^6}{2\,.\,4\,.\,6} - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} \pm \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}} = 1 \mp \frac{x^2}{2} + \frac{1\,.\,3\,.\,x^4}{2\,.\,4} \mp \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^6}{2\,.\,4\,.\,6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} \mp \ldots$$

$$\sqrt{a^2 \pm x^2} = a\left[1 \pm \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1\,.\,x^4}{2\,.\,4\,.\,a^4} \pm \frac{1\,.\,3\,.\,x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,a^6} - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,a^8} \pm \ldots\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a}\left[1 \mp \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,x^4}{2\,.\,4\,.\,a^4} \mp \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,a^6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,a^8} \mp \ldots\right]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1\,.\,x^2}{2\,.\,4} + \frac{1\,.\,3\,.\,x^3}{2\,.\,4\,.\,6} - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^4}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots (n+1)x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots\ldots$$

$$\frac{a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2}\left[1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \ldots\ldots\right]$$

Enfin on réduit encore une quantité en série en l'égalant à la suite

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$$

adoptée comme forme générale et commune de développement. A, B, C, D, sont des coefficients qui ne doivent en aucune manière renfermer x et dont on détermine les valeurs, d'abord inconnues, par autant d'équations, ainsi qu'on va le voir sur un exemple simple.

Soit proposé de développer en série la fraction $\frac{a}{b+x}$, on pose par convention,

$$\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

Multipliant les deux membres de cette équation conventionnelle par le dénominateur de la fraction et transposant tout dans un seul membre, il vient :

$$0 = (bA - a) + (A + bB)x + (B + bC)x^2 + (C + bD)x^3 + \ldots$$

et cette équation devant être satisfaite pour toutes les valeurs de x, et même pour $x = o$, exige que l'on ait

$$bA - a = 0;\ A + bB = 0;\ B + bC = 0;\ C + bD = 0;\ D + bE = 0\ldots$$

équations d'où l'on tire successivement

$$A = \frac{a}{b};\ B = -\frac{A}{b} = -\frac{a}{b^2};\ C = -\frac{B}{b} = +\frac{a}{b^3};$$

$$D = -\frac{a}{b^4};\quad E = +\frac{a}{b^5}\ldots\ldots$$

On a ainsi pour le développement cherché

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}x + \frac{a}{b^3}x^2 - \frac{a}{b^4}x^3 + \ldots\ldots$$

ainsi qu'on l'a trouvé plus haut. On obtiendrait de même la série *recurrente :*

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \ldots\ldots$$

Suivent quelques séries d'un emploi fréquent :

x étant la longueur d'un arc pris dans le cercle dont le rayon est 1, on a

$$\sin.\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\cos.\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$x = \sin.\, x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin.^3 x}{.\,3} + \frac{1.3 \sin.^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin.^7 x}{.\,7} + \ldots$$

$$x = \text{tang.}\, x - \frac{\text{tang.}^3 x}{3} + \frac{\text{tang.}^5 x}{5} - \frac{\text{tang.}^7 x}{7} + \ldots$$

séries attribuées à *Newton* et à *Leibnitz*.

On trouverait encore pour le carré x^2 de l'arc x en fonction des puissances du sinus de cet arc,

$$x^2 = \sin.^2 x + \frac{\sin.^4 x}{4} + \frac{4 \sin.^6 x}{3.5.6} + \frac{4.6. \sin.^8 x}{3.5.7.8} + .$$

et pour la valeur du quart de la circonférence (*Wallis*, Arithmetica infinitorum).

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2.\ 4^2.\ 6^2.\ 8^2.\ 10^2.\ \ldots}{1^2.\ 3^2.\ 5^2.\ 7^2.\ 9^2.\ \ldots}$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, on a

$$e = 2.718281828459$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} - \ldots$$

$$e^x + e^{-x} = 2 \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \right\}$$

$$e^x - e^{-x} = 2 \left\{ x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots \right\}$$

et si l'on désigne par *log*. le logarithme hyperbolique de *a*, on a encore

$$a^x = 1 + x \log.\, a + \frac{x^2}{2} \log.^2 a + \frac{x^3}{2.3} \log.^3 a + \ldots$$

L'abréviation *log* désignant encore un logarithme *hyperbolique*, on a

$$\log. x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + \ldots$$

$$\log. (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\log. (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

$$\log. \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right]$$

Voici une démonstration assez simple d'un lemme souvent invoqué dans l'emploi des séries.

Lemme.—Si dans la série $Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots$. ABC. .... sont des quantités qui ne contiennent pas u, on peut toujours prendre u assez petit pour que le premier terme Au surpasse la somme S de tous ceux qui le suivent. Soit en effet N le plus grand des coefficients ABC. . . ., on aura nécessairement,

$$S < N(u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + \ldots) \quad \text{ou} \quad S < Nu^2(1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \ldots)$$

qui revient à $S < \frac{Nu^2}{1-u}$

en prenant $u < 1$. Mais N étant un nombre fini qui ne contient pas u, il est clair que l'on peut toujours donner à u une valeur assez petite pour avoir

$$A > \frac{Nu}{1-u} \qquad \text{d'où} \qquad Au > \frac{Nu^2}{1-u} \qquad \text{ou enfin} \qquad Au > S$$

$$Au > Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots$$

SERLIO, architecte, né en 1475, mort en 1552. Il a travaillé avec le Primatice au château de Fontainebleau.

SEXTANT.—Voy. l'article *Instruments de l'ingénieur*, pag. 973.

SILICE-SILICIUM. La silice constitue, et presque à l'état de pureté parfaite, le caillou vulgairement connu sous le nom de pierre à fusil, ou *silex*, le cristal de roche.

Elle est formée de

1 at.	silicium	92.6	48.04
1 at.	oxygène	100	51.96
1 at.	silice	192.6	100

Le *silicium*, qui n'est connu que depuis quelques années, se présente sous la forme d'une poudre brune foncée, sans le moindre éclat métallique. Il n'est ni fusible ni volatil, il est plus pesant que l'eau, il ne se dissout pas dans ce liquide et ne le décompose pas. On peut chauffer le silicium au rouge et au contact de l'air sans qu'il s'oxyde; il ne s'oxyde même que très-lentement et très-difficilement au rouge dans l'oxygène pur. Le silicium se combine très-facilement avec le fer. Lorsque le fer est en contact avec de la silice et du charbon, le silicium sous l'influence de la chaleur peut s'unir au fer comme le carbone. Il forme une partie essentielle de la fonte; 0.0037 de silicium allié au fer suffisent, d'après M. Karsten, pour diminuer considérablement la ténacité du métal.

La silice pure et préparée par l'art forme une poudre blanche qui craque sous la dent: en masse elle est transparente; en poudre elle est d'une blancheur parfaite. Elle n'est ni fusible ni volatile à la plus haute température de nos fourneaux. Elle devient tout à fait insoluble dans l'eau, et même dans les acides, excepté l'acide hydrofluorique, quand elle a été chauffée au rouge; mais, à l'état d'hydrate, elle se dissout. Son action sur les bases et sur l'oxyde de fer en particulier ne permet pas de douter qu'elle agisse comme acide; aussi prend-elle souvent le nom d'*acide silicique;* elle forme avec les oxydes de fer des silicates d'oxyde de fer dont se composent en majeure partie les laitiers et les scories de forges. Le fer réuni au charbon peut décomposer la silice à une haute température; il se forme de l'oxyde de carbone et le silicium se combine avec le fer.

Dans les analyses chimiques, la silice se sépare à l'état de gelée transparente et incolore lorsqu'elle était combinée, et, dans cet état, elle se dissout très-facilement dans les solutions chaudes de potasse ou de soude caustique, à moins qu'elle n'ait été fortement calcinée; toutefois, elle se dissoudrait encore, mais avec moins de facilité. Elle est au contraire inattaquable par ces dissolutions lorsqu'elle entrait dans le composé à l'état de mélange. Il est donc très-important d'indiquer dans une analyse que la silice s'est séparée à l'état de gelée ou de poudre.

SILOS. Constructions ordinairement souterraines dans lesquelles on conserve les *blés* (page 144). Leur établissement est plus économique que celui des magasins, si surtout l'on ajoute au prix de ceux-ci les frais de *pellage* qu'ils nécessitent (voy. *Blé*).

Dans aucun cas, un silo ne doit être établi dans un terrain noyé par les eaux.

Il faut les revêtir en bonne maçonnerie de briques ou de moellons faite soit avec un mortier hydraulique, soit avec du mastic bitumineux, enduire le parement des maçonneries avec autant de soin à l'extérieur qu'à l'intérieur, ou même revêtir de plomb le pare

ment intérieur.—Mettre entre le pourtour des silos et les terres une couche de gros sable, ou de menues recoupes de pierre, de $0^m.30$ à $0^m.40$ d'épaisseur.

L'épaisseur propre des parois d'un silo sera ordinairement variable sur toute sa hauteur avec l'effort dû à la poussée auquel elles doivent résister et avec le plus ou moins d'humidité dont ces terres pourront s'imbiber.

Les silos les plus grands sont les plus économiques, parce que la capacité augmente dans un plus grand rapport que les surfaces. Les plus avantageux seront ceux de forme cylindrique ou cubique recouverts par un plafond ou par une voûte.

Les silos de forme cylindrique à égalité d'épaisseur de revêtement seront plus solides que ceux de forme cubique, mais ils prendront plus de place et seront d'une exécution plus coûteuse et plus difficile. Il faut pouvoir vider les silos avec facilité et l'on ne doit y renfermer les blés que quand la maçonnerie, les parois et l'air intérieur seront parfaitement secs, résultat que l'on hâte en plaçant de la chaux vive dans les fosses et en la renouvelant de temps en temps. Il faut d'ailleurs que les blés soient parfaitement secs au moment de l'ensilage; on peut les amener sans danger à cet état, en les exposant pendant plusieurs jours, soit à un soleil ardent, soit dans une étuve chauffée à 60°. Consultez un Mémoire de M. le capitaine du génie *Moreau*, au tome IX du Mémorial de cette arme. Je ne sais si l'on a jamais essayé d'établir des silos en fonte.

SOLEIL.—Voy. *Astronomie*, pag. 68.

SON. La vitesse de la *lumière* (pag. 1070) est tellement grande que pour toutes les distances terrestres on peut regarder son passage comme instantané ; celle du son est infiniment moindre. Ce qui fait que la lumière d'une arme à feu s'aperçoit d'une grande distance longtemps avant qu'on entende le bruit de l'explosion.

Des expériences faites avec un soin extrême ont donné pour la vitesse du son dans les régions inférieures de l'atmosphère $340^m.88$ par seconde à la température de 16 degrés centigrades. Elle varie légèrement avec la densité et la température de l'air, et s'abaisse par exemple à 337^m. à la température de 10°.

Enfin, elle augmente ou diminue d'environ 10^m. par seconde par un vent ordinaire suivant le sens dans lequel il souffle, et de 30^m environ pendant les ouragans.

Il suffit donc de compter le nombre des secondes qui s'écoulent entre l'apparition de la lumière d'un canon et l'instant où le bruit vient frapper l'oreille pour connaître avec assez d'approximation la distance d'une batterie, celle d'un navire à la mer, etc. On peut mesurer le nombre de secondes écoulées à l'aide d'une montre ordi-

naire en comptant 5 battements pour une seconde, et si on évalue les distances en lieues marines de 20 au degré, la vitesse du son est de $\frac{1}{4}$ lieue pour 4 secondes ou 20 battements.

On porte la vitesse du son dans l'*eau* à 1453^{m},—dans le *mercure* à 1484, dans le *noyer*, le *laiton* et le *chêne* à 3624,—dans le *cuivre rouge* à 4080, dans le charme, l'orme, l'aune et le bouleau à 4896,—dans le tilleul et le cerisier à 5100, dans le saule et le pin à 5440,—dans le fer, l'acier et le verre, à 5664,—dans le sapin à 6180, où elle est ainsi 18 fois plus grande que dans l'air. Mais ces résultats sont un peu incertains.

Sous terre, le son se transmet d'autant mieux à travers le sol que les terrains sont plus denses et plus secs, et ceux dont la cohésion a été rompue par des explosions ou qui sont humides, ne le transmettent que très-imparfaitement. A Montpellier, dans un terrain de sable très-dur et très-adhérent, coupé par des bancs de roc vif, on entend les coups de pioche du mineur jusqu'à 15 et 20^{m} et les coups de dame jusqu'à 60 ou 70^{m}, et lorsque les mineurs travaillent avec une pelle ou un grand ciseau plat sans piocher, on les entend encore à 8 ou 10^{m}. A Metz, devant le fort Bellecroix, et à Arras, devant la citadelle, on n'entend pas le travail du mineur à plus de 20 ou 25 mètres. Le moyen le plus commode pour percevoir les sons souterrains consiste à appuyer l'oreille en plein contre un des montants ou contre une des semelles de la galerie si elle est boisée, ou enfin contre le roc sec si elle ne l'est pas.

Le son peut être concentré à l'aide de surfaces concaves, et la voile étendue d'un navire rendue concave par une légère brise est un très-bon collecteur de sons. A une distance de cent milles marins de la côte du Brésil, on a entendu d'un certain point du pont d'un navire le carillon de toutes les cloches de *San-Salvador*, mises en branle à l'occasion d'une réjouissance publique.

Au reste et sans appareil spécial, le canon tiré à Florence s'entend quelquefois du vieux château du *Monte-Rotondo*, près Livourne, à 82000^{m} ou 20 lieues $\frac{1}{2}$; et lorsqu'on tire le canon à Livourne, on l'entend quelquefois de *Porto-Ferrajo*, à 20 lieues $\frac{1}{4}$. Enfin, à l'époque où les Français faisaient le siége de Gênes, le bruit de leur canonnade était entendu de Livourne à la distance de 147000^{m} ou 36 lieues $\frac{3}{4}$.

Or, non-seulement le son se réfléchit comme la lumière et peut ainsi, à l'aide d'appareils convenables, être concentré sur certains points, mais encore il paraîtrait, d'après quelques expériences récentes de M. *Sondhauss*, qu'il se *réfracte*. M. *Sondhauss* a expérimenté avec des réservoirs lenticulaires formés tantôt de la membrane d'une vessie, tantôt de baudruche et même de papier d'environ 0^{m}.30 diamètre et de 0^{m}.06 à 0^{m}.07 de flèche; et il a constaté que le bruit d'une montre placée à une distance convenable sur l'axe

de la lentille pouvait être entendu sur le prolongement de cet axe de l'autre côté de celle-ci, et qu'il cessait d'être perçu par une oreille placée en dehors de cet axe. En traversant la lentille, le son ne change ni d'acuité ni de timbre.

On ne paraît pas avoir suffisamment cherché à tirer parti de l'emploi du son comme moyen de correspondre à distance. A ce titre, je crois utile de rappeler ici quelques expériences déjà anciennes (1841) de M. *Daniel Colladon.*

A l'aide d'un appareil hydro-acoustique décrit tome V des savants étrangers, M. *Colladon* a pu, malgré le bruit de vagues assez fortes, entendre à la distance de 13500^{m} le son d'une cloche du poids de 65 kilog. vibrant sous l'eau.

Les vases formés de lames métalliques très-minces et fermés par le bas, lui paraissent les appareils hydro-acoustiques les plus convenables, mais tous les corps solides plongés en partie dans l'eau et contre lesquels on appuie la tête pour écouter, peuvent transmettre à l'oreille les sons qui se propagent sous l'eau.

Une grosse cloche de métal entièrement submergée donne, sous l'influence d'un choc, un son qui dure plusieurs secondes, et en plongeant à peu de distance de la cloche une barre que l'on tient en même temps avec la main, on ressent un mouvement vibratoire très-violent qui est transmis à la barre.

Les intonations parlées peuvent se transmettre à quelque distance sous l'eau; mais si la personne qui parle est placée sous une cloche de plongeur, on n'entend que des sons confus sans pouvoir distinguer les articulations, à une distance de quelques mètres.

Le choc d'une chute d'eau ou celui des palettes d'un bateau à vapeur de cent chevaux et plus, en marche, ne produisent sous l'eau qu'un bruit faible et confus à 50^{m}. A 1000^{m} on n'entend aucun bruit distinct.

Quoique les sons transmis à l'aide de l'appareil de M. *Colladon* soient beaucoup plus brefs que ceux qui sont transmis par l'air, cependant on reconnaît avec la plus grande facilité non-seulement le degré d'acuité du son et sa valeur musicale, mais encore le timbre du corps frappé; très-souvent on peut deviner sa nature et jusqu'à un certain point ses dimensions et la manière dont il est frappé. Le bruit d'une chaîne agitée sous l'eau se distingue si bien qu'on reconnaît lorsqu'une barque, distante de 3 à 4000 mètres, lève son ancre.

Les écrans diminuent l'intensité du son transmis, mais cette influence n'est pas absolue et si les vibrations sont énergiques, elles se transmettent au delà des obstacles solides qu'ils rencontrent. Dans une expérience faite avec une grosse cloche, on a compté chaque coup frappé, dans une maison bâtie au bord de l'eau sur un terrain remblayé, à une distance de 3000 mètres de la cloche, quoique

celle-ci fût séparée de la maison par un promontoire ; le son paraissait sortir des fondations et des piliers des murailles.

Il paraît démontré à l'auteur de ces intéressantes expériences qu'on pourra, dans certaines localités favorables, par le moyen de de coups très-énergiques et d'appareils bien combinés, correspondre sous la mer à une distance de quelque cent mille mètres. Il lui paraît probable que, dans les mers d'une profondeur à peu près uniforme, l'intensité du son, loin de diminuer proportionnellement au carré de la distance, ne diminue que proportionnellement à la distance simple ou à peu près, les ondes sonores se réfléchissant entièrement dans la masse fluide, lorsqu'elles rencontrent la surface sous un angle très-aigu.

On peut donc prévoir que, dans le fond des golfes, les vibrations refoulées et concentrées sur certains points pourront y produire un bruit très-intense. Il est d'ailleurs facile de concevoir une foule de dispositions et de constructions artificielles qui faciliteront ces essais télégraphiques dont les administrations maritimes tireront parti tôt ou tard. L'agitation des vagues ne trouble que fort peu le silence presque absolu qui règne sous l'eau de la mer, ce silence doit encore favoriser les communications qu'on tentera d'établir sous l'eau. Consultez les essais de M. *Bonnycastle* (1838), n° 316 du journal l'*Institut*, et la lettre de M. *Colladon* à la Bibliothèque de Genève, août 1841.

SONNETTE. Dans les machines à battre les pilots, on évalue à 18 ou 20 kil. le poids que chaque manœuvre peut élever verticalement, avec la vitesse correspondante à quatre minutes et demie par volée de trente coups, à $1^{m}.20$ de hauteur, y compris les repos.

D'après *Sganzin*, l'expérience et la pratique des grands travaux auraient conduit à considérer un pieu comme arrivé à un terrain résistant susceptible de porter une charge permanente de 25000 kil., quand ce pieu n'enfonce plus que de $0^{m}.01$ par volée de dix coups d'un mouton de 600 kil, tombant de $3^{m}.60$ ou par volée de 30 coups d'un mouton de même poids tombant de $1^{m}.20$.

On appelle *refus* la quantité dont le pieu a pénétré dans le terrain pendant une volée.

SOUDE. Protoxyde de *sodium* formé de sodium 74.42 + oxygène 25.58 ; alcali blanc très-caustique, ayant la plus grande ressemblance avec la potasse. Sa dissolution dans l'eau s'en distingue cependant en ce que, étendue, ni la dissolution concentrée d'acide tartrique en excès, ni la dissolution de chlorure platinique n'y produisent de précipité.

SOUDURE. On soude le *fer* en chauffant fortement les deux piè-

ces et en les martelant après les avoir débarrassées de tout oxyde et toutes scories.

On soude le *cuivre* avec une soudure formée de 2 cuivre + 1 zinc, ou encore de 1 étain fin + 1 plomb.

La soudure des plombiers se compose de 2 étain + 1 plomb.

Les soudures doivent se faire au charbon de bois.

SPIRALES. Famille nombreuse de courbes que nous ne pouvons point étudier ici d'une manière générale. Nous nous bornerons aux *spirales* qu'on peut rencontrer dans la pratique.

Spirale d'Archimède (*fig.* 3, *pl.* CXII) *génération*. Pendant que le rayon A t_0 du cercle *régulateur* décrit avec une vitesse angulaire uniforme un cercle entier $t_0 t_1$ . . . t_6, un point mobile parti du centre A parcourt uniformément aussi le rayon At_0, mais avec la condition qu'il parvient en t_0 au moment où le rayon achève sa révolution complète.

Tracé. Cette génération indique clairement le tracé de la courbe. Partagez le rayon a du cercle régulateur et sa circonférence en un même nombre de parties respectivement égales, 6 par exemple.

Tirez en partant de A des droites indéfinies par les points de division $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$, portez respectivement sur ces droites et à partir de A les distances A1 A2 A3 A4 . . A6, les points de la courbe 1, 2, 3, 4, 5 6, se trouvent ainsi déterminés. Si vous voulez une *spire* de plus, prolongez le rayon At_0 d'une quantité égale à At_0, divisez ce prolongement, puis portez sur les droites indéfinies correspondantes les longueurs A7, A8, A9 . . A12. Vous aurez ainsi la seconde spire 6, 7, 8, M' 9, 10, 11, 12. On pourrait continuer indéfiniment de la même manière.

Equation de la spirale d'Archimède. Il est très-commode ici d'employer les coordonnées polaires. R étant le rayon vecteur, a celui du cercle régulateur, t la longueur de l'arc de cercle compris entre la droite qui sert d'origine et le rayon vecteur, cette longueur d'arc étant prise dans le cercle dont le rayon = 1 , on a

$$R = \frac{at}{2\pi} \qquad \text{et l'équation différentielle } dR = \frac{a\,dt}{2\pi}$$

Sous-tangente, tangente, sous-normale, normale. Ces lignes s'obtiennent facilement en partant de leur équation générale (Voyez *Courbes*). Ainsi, par exemple, on aurait

$$\text{sous-tangente} = \frac{R^2\,dt}{dR} = \frac{2\pi R^2}{a} = \frac{at^2}{2\pi},$$

ce qui suppose toujours que cette ligne AT est prise sur une droite AT partant du pole A et conduite perpendiculairement au rayon vecteur.

Lorsque l'arc $t = 2\pi$ ou une circonférence entière, on a sous-tangente $= 2\pi a =$ circonférence rectifiée du cercle régulateur.

Si l'arc $t = m$ circonférences entières, on a sous-tangente $= 2\pi a m^2 = m$ fois la circonférence dont le rayon serait m fois celui du cercle régulateur.

Soit $t = \frac{2\pi}{3}$ comme dans la figure, on a sous-tangente

$$AT = \frac{2\pi}{9} . a = 0.698\, a.$$

Tracé des tangentes, sous-tangentes, normales. Le tracé le plus simple consiste encore à calculer la *sous-tangente* pour le point donné M comme nous venons de le faire, puis à conduire la *tangente* MT. Quant à la *normale,* elle est perpendiculaire à la tangente au point donné.

La spirale d'Archimède est une courbe qui peut, en théorie, servir de *camme* pour guider une tige droite. La spirale, tournant autour de A avec un mouvement uniforme, donnera au bouton a de la tige un mouvement également uniforme; la vitesse d'ascension de la tige et la vitesse de rotation de la spirale seront dans un rapport constant.

STABILITÉ. M. *Moseley* a proposé de prendre pour la mesure de la stabilité d'un corps solide, reposant librement sur un plan horizontal, le *travail* qu'il faudrait dépenser pour l'amener à sa position d'instabilité.

Ainsi, soit h la hauteur du centre de gravité d'un parallélipipède rectangle au-dessus de la base horizontale sur laquelle il repose, k la distance horizontale de la verticale du centre de gravité à l'arête autour de laquelle le corps tournerait, si on essayait de le renverser, il est facile de voir que, pour amener ce corps à une position instable à partir de laquelle le renversement s'opérera de lui-même, il faudra que son centre de gravité en tournant autour de l'arête de contact s'élève de $\sqrt{(h^2+k^2)} - h$, de sorte que P étant le poids du corps, et T le travail de renversement, on a pour la mesure de la stabilité :

$$T = P\,[\sqrt{(h^2+k^2)} - h] \text{ kilogrammètres.}$$

Voyez pour la *stabilité des constructions* les articles *Murs,* page 1176, et *Lignes de résistance,* page 1040.

SURBAISSEMENT d'une arche, quotient de la *montée* divisée par l'*ouverture :* si l'arche est elliptique, le surbaissement est, dès lors, le quotient du demi-petit axe par le grand axe.

T

TALUS NATURELS. *Voyez* la page 1195.

TEMPÉRATURE.—Voy. *Calorique*, pag. 181 et suiv.

TERRAIN. Voyez *Relief du terrain*, page 1391, et *Levés de terrains*, page 1013.

TERRAINS. Les géologues divisent l'écorce du globe en groupes auxquels ils donnent le nom de *formations* et dont plusieurs réunis constituent un *terrain*; et les formations comprennent elles-mêmes certaines séries de *roches*. Si, par une comparaison très-ingénieuse due à M. *Constant Prevost*, on voulait donner une idée de la valeur relative que l'on doit attacher à ces expressions : *Roches*, *Formations*, *Terrains*, si fréquemment employées dans le langage géologique, on pourrait jusqu'à un certain point le faire, en prenant pour exemple un *livre*. Les *minéraux* deviendront ainsi comparables aux *lettres* alphabétiques, les *roches* auront pour analogues les *syllabes* d'une ou de plusieurs lettres, et dont l'importance, la fréquence et le nombre seront déterminés par le génie de la langue et non par le hasard; les *formations* seront représentées par les *mots* et les *terrains* par les *phrases*. Enfin, les grands groupes de ceux-ci correspondront aux différents chapitres. Et de même que cette série de lettres, de syllabes, de mots, de phrases, peut initier aux pensées de l'auteur, de même aussi l'étude successive des *minéraux*, des *roches*, des *formations* et des *terrains*, peut conduire à connaître les causes et la nature des révolutions qui ont eu lieu à la surface terrestre.

En Angleterre, en Allemagne et en France, on divisait encore naguère toute l'écorce du globe en cinq grands *terrains* qui, en allant du plus nouveau au plus ancien, se succédaient de la manière suivante :

1° Terrain diluvien ou de transport;
2° Terrain tertiaire;
3° Terrain secondaire;
4° Terrain intermédiaire ou de transition;
5° Terrain primitif.

Mais il paraît que cette division, qui est à peu près celle du célèbre ingénieur saxon *Werner*, a cessé d'être l'expression exacte de la science, et que le terrain *primaire*, qui comprenait toutes les roches qui n'offrent aucune trace d'êtres organisés comme les *granits*, les *gneiss*, les micaschistes, par exemple, n'existe plus ou n'existe qu'en partie, le *granit* étant considéré aujourd'hui comme une

roche d'origine ignée qui se montre à différentes époques, et les *gneiss* et les *micaschistes* comme des roches modifiées par l'action ignée que quelques géologues classent dans le terrain *intermédiaire* auquel ils donnent d'ailleurs le nom de *primaire*.

Entre les classifications nombreuses et les sous-divisions qui ont été proposées, j'adopte ici celles de M. *Huot*, *Manuel de géologie*, parce que leur correspondance avec la série wernérienne modifiée, et encore très-répandue, y est nettement établie, et parce qu'elle offre, en outre, à l'esprit des distinctions claires, définies et bien limitées.

Ainsi que l'indique le tableau suivant, l'ensemble des terrains est divisé en deux grandes classes ou séries : la *série plutonique*, qui comprend les roches d'origine ignée, et la *série neptunienne*, qui comprend les terrains formés par voie aqueuse, parmi lesquels il se trouve toutefois des roches qui ont été plus ou moins modifiées par le feu; l'ensemble de ces séries forme *neuf* groupes principaux que le tableau présente en allant du plus nouveau au plus ancien. Les fossiles indiqués se trouveront parmi ceux esquissés *pl.* LXXII à LXXVI.

(*Voir le tableau, page suivante.*)

***TABLEAU** de la classification des Terrains, avec leur puissance, les fossiles qui les caractérisent et les roches plutoniques qui en font partie.*

CLASSIFICATION wernérienne modifiée.	CLASSIFICATION de M. Huot.		NATURE DES DÉPOTS.	ROCHES plutoniques.	PUISSANCE.	FOSSILES CARACTÉRISTIQUES. (*planch.* LXXII à LXXVI).
	SÉRIE NEPTUNIENNE.		*Différents détritus produits par des causes qui agissent encore.*			
ALLUVION	TERRAIN RÉCENT.	Dépôts tritonien.	Rochers de madrépores. Bancs de sable, de galet, de coquilles. Dunes, etc.	Cendres. Pépérine.	Très-variable.	Ossements de chevaux, de bœufs, de cerfs, de chiens, etc. Coquilles vivantes.
		Dépôt nymphéen.	Alluvions fluviatiles. Dépôts de cailloux, de gravier, de limon. Tuf calcaire, etc.	Téphrine.		
		Dépôt terrestre.	Tourbe. Humus ou terre végétale. Eboulis. Dépôts salins, etc. . . .	Trachyte.		
			Dépôts qui paraissent en général avoir été formés par des causes plus puissantes que celles qui agissent aujourd'hui.			
DILUVIUM et anciennes	[illegible]	Dépôt moderne.	Tourbières anciennes. Calcaire du Val di Noto. Dépôts coquilliers d'Uddevalla, du Spitzberg, des environs de Nice, etc. Brèches ferrugineuses de la Morée. Plages soulevées en Amérique, en Océanie, etc. Brèches osseuses marines et d'eau douce.	Tuffus. Pépérine.	Depuis 1	Ossements d'animaux qui ne vivent plus dans les contrées où l'on trouve leur dépouilles. Débris d'éléphants, de mastodon-

TERRAIN QUATERNAIRE. alluvions.	TERRAIN		Dépôts des cavernes à ossements. *Lehm* et *Loess* des bords du Rhin et des vallées de l'Allemagne. .		jusqu'à 20 et 30 mètres.	tes, de rhinocéros, etc., et quelquefois des ossements humains.
		Dépôt ancien.	Dépôts limoneux et caillouteux d'eau douce et d'eau marine. Dépôts ferrifères et brèches ferrugineuses. Dépôts limoneux métallifères et gemmifères. . . . . Cailloux roulés et blocs erratiques.	Vake. Téphrine. Basalte.		Coquilles identiques avec celles qui vivent encore.
TERRAIN SUPERCRÉTACÉ.			*Un petit nombre de fossiles identiques avec les espèces existantes.*			
			Dépôts d'eau marine et d'eau douce.	Pépérine.	18 à 20 mètr.	Mastodonte, hippopotame, éléphant, rhinocéros.
	ÉTAGE SUPÉRIEUR.	Groupe nymphéen.	Galets et lignites de la Bresse et de l'Auvergne. Grès à hélices d'Aix. Galets et sables du val d'Arno supérieur..	Basalte.	6, 15, 30, 40 et 60 mètres.	
		Groupe tritonien.	Marnes subapennines de l'Italie et de la Morée. *Crag* de l'Angleterre (contenant 40 pour cent de coquilles identiques avec des espèces vivantes). Marnes subatlantiques. Grès et calcaire de la Galicie. Calcaire d'Odessa.	. . . .	10, 20, 30, 40, 60, 100, 200 et 500.	Dans le *Crag*, le *Fusus contrarius*, la *Voluta Lamberti*, le *Buccinum Dalei*, etc.
	ÉTAGE MOYEN.	Groupe supérieur.	Calcaire des environs de Nantes. Calcaire de Doué. Bassins de Dax et de Bordeaux (environ 20 pour cent d'espèces qui vivent encore). Faluns de la Touraine. Calcaires-moellons de Montpellier. Marnes bleues et mollasses du bassin de Vienne (environ 26 pour cent d'espèces vivantes).	Basalte.	2, 4, 15, 20.	Dans les Faluns : *Arca diluvii*, *Pectunculus pulvinatus*, etc. Dans le calcaire-moellon : *Ostrea undata*.

CLASSIFICATION wernérienne modifiée.	CLASSIFICATION de M. Huot.		NATURE DES DÉPOTS.	ROCHES plutoniques.	PUISSANCE.	FOSSILES CARACTÉRISTIQUES (*planch.* LXXII *à* LXXVI).
TERRAIN TERTIAIRE.	TERRAIN SUPERCRÉTACÉ. ÉTAGE MOYEN.	Groupe moyen.	Calcaire d'eau douce du midi de la France. Mollasse d'eau douce du midi de la France. Marnes et gypse d'Aix et de Narbonne. Mollasse et nagelflue de la Suisse. Mollasse et poudingues de la Morée. Marnes du plateau de Trappes. Meulières des hauteurs de Versailles.	Trachite. Basalte.	mètres. 10,20,30 et 40.	Dans les marnes et les meulières : *Potamides Lamarkii*, *Planorbis rotundatus*, *Limnœa cornea*, etc.
		Groupe inférieur.	Lignites du midi de la France. Grès à lignites de la Galicie. Argile à lignites des bords de la Baltique. Sables et grès de Fontainebleau.	. . . .	20, 30 et 50.	Dans le grès : *Ostrea flabellula*, *Cerithium mutabile*, etc.—Dans les lignites, un grand nombre d'insectes.
	ÉTAGE [IN]FÉRIEUR.	Groupe supérieur.	Dépôts marins et lacustres : Marnes, sables et grès. Calcaire siliceux. Marnes vertes. Gypse de Montmartre. Calcaire siliceux et meulières de la Brie.	. . . .	40 à 50.	Dans le gypse, plusieurs espèces de *Palæotherium*, d'*Anoplotherium*, etc.
		Groupe moyen.	Calcaire grossier parisien (environ 5 pour cent d'espèces vivantes), se subdivisant en trois assises. Calcaire grossier du midi de la France. Argile de Londres (environ 5 pour cent d'espèces vivantes). Calcaire à nummulites de la Krimée.	. . . .	30 à 60.	*Cyclostoma mumia*, *Cerithium lupidum*, *Lucina Saxorum*; *Turritella imbricataria*, *Cardita avicularis*. *Cerithium giganteum*. *Nummulites complanata*.

		ÉTAGE I	Groupe inférieur.	Argile à lignites. Argile plastique de Paris et de Londres. Poudingues et cailloux roulés de Paris, du Soissonnais, de la Touraine et de l'Angleterre. Sables glauconieux.	. . . .	10 à 100 mètres sur le continent ; plus de 300 en Angleterre.	*Planorbis rotundatus, Limnæa longiscata. Cytherea nitidula. Neritina conoidea. Nummulites planulata.*
			Groupe infra-inférieur.	Calcaire pisolithique de Meudon. Sables micacés. Calcaire lacustre inférieur.	. . . .	8 à 70 mètres.	*Crassatella tumida. Cucullæa crassatina.*
Tous les fossiles appartiennent à des espèces éteintes et diffèrent de ceux des terrains supercrétacé et clysmien.							
TERRAIN SECONDAIRE	TERRAIN CRÉTACÉ.	ÉTAG. SUP.	Groupe supérieur.	Craie blanche. Craie sublamellaire.	Basalte. Porphyre. Ophiolithe ou Ophite. Pépérine. Trachyte. Syénite. Serpentine. Diorite.		Reptiles, poissons, végétaux. *Inoceramus sulcatus. Gryphæa columba. Ostrea vesicularis. Catillus Cuvieri. Catillus Lamarkii. Pecten lamellosus. Terebratula carnea. Terebratula octoplicata. Pecten quinquecostatus Ammonites rhotomagensis. Belemnites mucronatus. Turrulites costatus. Baculites anceps. Scaphites æqualis. Ananchites ovatus.*
			Groupe inférieur.	Craie marneuse; craie glauconieuse. Craie tufacée (Tufau).		180 à 200 mèt.	
		ÉTAGE MOYEN.	Groupe supérieur.	Grès vert supérieur (sable vert rempli de fossiles).			
			Groupe moyen.	*Gault* (Marne bleue ou argile). . .		25 à 85.	
			Groupe inférieur.	Grès vert inférieur (sables vert ou ferrugineux). . . . . — Grès viennois (alternance de grès, de marne et de calcaire). . .		70 à 260	
		ÉTAGE INFÉRIEUR.	Groupe supérieur.	Argile wealdienne.		90	
			Groupe moyen.	Sable de Hastings (sable et grès ferrugineux) . . . . — Format. néocomienne (calcaire, marnes et sables). . .		75	
			Groupe inférieur.	Calcaire de Purbeck (argile et calcaire).			

CLASSIFICATION wernérienne modifiée.	CLASSIFICATION de M. Huot.		NATURE DES DÉPOTS.	ROCHES plutoniques.	PUISSANCE.	FOSSILES CARACTÉRISTIQUES (*planch.* LXXII *à* LXXVI).
TERRAIN JURASSIQUE.	FORMATION OOLITHIQUE.	Étage supérieur.	*Groupe supérieur :* Oolithe de Portland (calcaire et sable)......		30 à 40.	Polypiers. *Ammonites Lamberti.* *Trigonia gibbosa.* *Gryphœa virgula.* *Ostrea deltoidea.* *Nerinæa Goodhallii.* *Astrea.*
			Groupe moyen : Argile de Kimmeridge (argile avec rognons calcaires)...............		150	
			Groupe inférieur : Couches de Weymouth (calcaire et marne)....		20 à 30.	
		Etage moyen ou corallien.	*Coralrag.* *Groupe supérieur*..... calcaire compact..... *Groupe moyen* calcaire oolithique.... *Groupe sous-moyen*.... calcaire siliceux.....			
			Groupe inférieur : (*Calcareous grit*) (sables et grès calcarifères)...			
		Etage sous-moyen ou marneux.	*Groupe supérieur* (*Oxford clay*) (marnes argileuses et calcaires marneux)............		100 à 180.	*Turbinolia.*
			Groupe inférieur : (*Kelloway rocks*) (calcaire marneux et argile)...	Porphyre. Ophiolithe. Basalte. Trapp. Syénite. Dolerite. Granit.		*Meandrina.* *Sarcinula.* *Nerinæa elegans.* *Gryphœa dilatata.* *Trigonia costata.* *Terebratula media.* *Ostrea acuminata.*
			Assise supérieure (*Cornbrash*) (calcaire oolithique et marne)...		30 à 40.	
			Groupe [...] Assise moyenne (*Forest marble*) (calcaire à polypiers et marnes).		30, 50 à 200. 100 à 200.	

TERRAIN secondaire. (*Suite.*)	TERRAIN JURASSIQUE.	Étage inférieur.				Assise inférieure (*Bradford clay*) (marne argileuse bleue ; calcaire sableux)..			
				Groupe moyen.		Assise supérieure (grande oolithe) (calcaire oolithique).			*Belemnites giganteus.*
						Assise inférieure (terre à foulon) (marnes argileuses bleues). . . .			*Ammonites Bucklandi.*
				Groupe inférieur	Assise supér. Assise inférieure.	Oolithe ferrugineuse (calcaire oolithique chargé d'ox. de fer).			
		FORMATION LIASIQUE.	Etage supér. Etage moyen. Etage infér.	Lias. . .		Calcaire coquillier et marne.			*Plagiostoma giganteum.*
						Calcaire coquillier. . . .			*Gryphæa arcuata.* *Gryphæa cymbium.*
						Calcaire bleu et marnes colorées.	Porphyre.	40 à 300 mètr.	*Ichthyosaurus.*
	TERR. PSAMMÉRYTHRIQUE OU TRIASIQUE.	FORMATION KEUPRIQUE.		Etage supérieur. . Etage moyen. . . . Etage inférieur. .		(*Keuper*) Marnes irisées, gypse, grès, sel gemme. .	Basalte.		*Plesiosaurus.* *Ammonites nodosus.*
		FORMATION CONCHYLIENNE.		Etage supérieur. . Etage moyen. . . . Etage inférieur. .		(*Muschelkalk*) Calcaires compacts. Marnes. Gypse. .	Eurite. Granit.	30 à 350.	*Eucrinites liliiformis.* *Plagiostoma lineatum.* *Avicula socialis.* *Mytulites recens.* *Pectinites fragilis.*
		FORMATION POECILIENNE		Grès bigarré. Grès. Psammites et marnes de différentes couleurs. . Grès vosgien. Conglomérats. Grès à gros grains.			Trapp. Porhyre.	20 à 360.	Végétaux.

CLASSIFICATION wernérienne modifiée.	CLASSIFICATION de M. Huot.		NATURE DES DÉPOTS.	ROCHES plutoniques.	PUISSANCE.	FOSSILES CARACTÉRISTIQUES (*planch.* LXXII à LXXVI).
TERRAIN secondaire. (*Suite.*)	TERRAIN PSAMMÉRYTHRIQUE ou triasique.	FORMATION MAGNÉSIFÈRE.	(*Zechstein.*) Calcaire magnésien. Calcaire bitumineux. Schiste cuivreux. Schiste bitumineux. . . .	Basalte. Dolérite.	15 à 500 mèt.	*Terebratula intermedia.* *Ammonites gibbosus.*
		FORMATION PSAMMÉRYTHRIQUE.	Grès rouge. Sables à grès. Poudingue.		30 à 100.	Poissons. Reptiles.
	TERRAIN CARBONIFÈRE.	FORMATION HOUILLÈRE.	Etage supérieur. — Arkoses. Grès. Psammites. Schistes. Houille. . . Etage inférieur.—Schistes. Ampélites. Arkoses.	Porphyre. Trapp.	30 à 1000. 50 à 700. 100 à 800.	Végétaux. Poissons.
		FORMATION CARBONIFÈRE.	Etage supérieur.—Calcaires et Anthracites. . . . . Etage inférieur.—Calcaires. Schistes bitumino-calcaires.	Basalte. Diorite. Trapp. Dolérite.		
		FORMATION PALÉO-PSAMMÉRYTHRIQUE.	Etage supérieur. — Psammites. Quartzite. Schistes. . . . . Etage inférieur.—Grès en conglomérats.	Diorite. Porphyre. Dolérite. Phonolite. Trapp.	200 à 3000.	*Spirifer bisulcatus.* *Productus antiquilatus.* *Nautilus bilobatus.* *Asaphus Brongnartii.* *Calymene Blumenbachii.* *Ogygia Desmaresti.*
	TEUX.	FORM. CARADOCIENNE (Système silurien).	Etage supérieur. — Argile schisteuse. Calcaires. . . . . Etage inférieur.—Schistes, grès et calcaires.	Porphyre.		

TERRAIN intermédiaire.	TERRAIN SCHIS	FORMATION SNOWDONIENNE (système cambrien).	Etage supérieur.—Schiste siliceux. Schiste ardoisier. Psammites. Calcaires..	Granit. Syénite.	300 à 800.	*Ogygia Guettardi.* *Asaphus Buchii.*
			Etage inférieur.—Schiste argileux. Schiste chloriteux.	Porphyre. Serpentine.	50, 100, 500, 1400.	Polypiers. Végétaux.
		FORM. MICASCHISTEUSE.	Groupe supérieur ou micaschisteux. Groupe inférieur ou gneissique. . .	Eurite. Diorite.		
	SÉRIE PLUTONIQUE.			Porphyre. Euphotide.		
TERRAIN primitif.	TERRAIN VOLCANIQUE.	FORMATION LAVIQUE..		Syénite.	700 à 1200.	
		FORMATION TRACHYTIQUE..		Pegmatite.		
		FORMATION CONGLOMÉRATIQUE. . .		Granit.		
	TERRAIN PYROIDE.	FORMATION TRACHYTIQUE..		Protogyne.		
		FORMATION BASALTIQUE.				
		FORMATION CONGLOMÉRATIQUE.				
	TERRAIN GRANITIQUE.	FORMATION PORPHYRIQUE..		. . . . . .	1600 à 2400.	
		FORMATION GRANITIQUE.				

TERRASSEMENTS. *Du volume des déblais et des remblais.* La surface du terrain est connue par des points de *nivellement* placés dans une suite de plans verticaux ordinairement parallèles entre eux. On suppose ces points réunis par des droites qui sont considérées comme les sections du terrain par les plans et qui forment ce qu'on nomme les profils en travers. D'un profil à l'autre, la surface du terrain est censée formée par une surface gauche décrite par une droite qui se mouvrait parallèlement à un plan vertical donné en touchant constamment les lignes du terrain. Cela posé et la surface du projet étant toujours considérée comme plane, on n'a à cuber que des solides dont nous avons donné la mesure pages 852 et 853, quand ils ne rentrent pas dans la classe de ceux qui ont des formes géométriques définies.

De la durée du travail journalier. J'estime, dit *Vauban*, qu'on peut régler le travail comme ci-après : le commencer à 5 ou 6 heures du matin et travailler jusqu'à 8 ; le quitter depuis 8 jusqu'à 9 et le reprendre de 9 à 12 ; le discontinuer jusqu'à 2 et le reprendre ensuite et le continuer jusqu'à 6 ou 7 heures du soir, de manière à avoir 10 heures de travail et 3 heures de repos par jour. On pourra soutenir le travail sur ce pied huit mois de l'année, savoir : mars, avril, mai, juin, juillet, août, septembre et octobre ; pour les autres mois qui sont d'hiver on pourra réduire le temps du travail à 7 heures, pendant lesquelles je suis persuadé que les ouvriers ne feront guère plus de demi-journée d'été à cause du froid et du mauvais temps.

Il recommande en outre de chômer tous les dimanches, mais non les fêtes, « comme étant très-certain, dit-il, qu'on ne gagne rien au travail des dimanches, par la raison que tout homme qui a travaillé six jours tout de suite a besoin de repos le septième. »

De la fouille. On répète depuis Vauban, en transformant ses toises en mètres, qu'un homme à la tâche peut lever à la pelle et charger sur une brouette de 12 à 15 mètres cubes de terre dans une journée, et l'on réduit ce nombre à 10 lorsque la terre doit être jetée horizontalement à 2^m au moins et 4^m au plus, ou lancée verticalement à $1^m.60$ de hauteur.

Quant au nombre de *piocheurs* qui feront tête à un pelleteur, il dépend de la nature du terrain, et l'on a vu à l'article *Brouette* qu'on le déterminait ainsi :

On fait piocher un homme pendant a minutes, puis on compte le nombre b de minutes que le pelleteur emploie pour lever la terre piochée, et le quotient $\frac{b}{a}$ indique le nombre de pelleteurs correspondant à un piocheur. Dans une terre moyenne, un piocheur entretient deux pelleteurs, et pour qu'ils ne se gênent pas l'un l'au-

tre, on les éloigne de $1^m,50$ à 2^m. On compte donc généralement pour la fouille des terres moyennes un piocheur et deux pelleteurs établis sur une largeur d'atelier de 3 à 4 mètres, et chaque pelleteur doit avoir sa brouette à charger.

Sganzin affirme d'ailleurs qu'on a substitué avec avantage la charrue traînée par des animaux à la pioche du terrassier dans les terrains de un ou deux hommes à la pioche pour un à la pelle.

Du transport des terres. Lorsque le transport d'une masse de terre se fait de manière que la somme des distances parcourues est la plus petite possible, la distance moyenne du transport est égale à la distance des centres de gravité des solides de déblai et de remblai. Il suffit donc, pour évaluer à peu près la dépense, de connaître le volume du déblai et la position respective de ces deux centres de gravité. Mais il faut observer que ces centres de gravité pouvant se trouver ou sur un même plan horizontal ou l'un au-dessus de l'autre, il faut avoir égard à la fois à leur distance horizontale D et à leur distance verticale H.

Transport à la brouette. On a vu à l'article *Brouette*, page 169, que le relai devait être fixé moyennement à $p = 30^m$ en chemin horizontal, et à $p' = 20^m$ en montant sur une rampe dont la pente par mètre la plus avantageuse a été trouvée $= 0.08 = \mathrm{I}$. n étant alors le nombre de relais, on a pour fixer ce nombre ou la longueur des relais avec équité, savoir :

$$\text{Si } H = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n = \frac{D}{p}$$

$$\text{Si } D \text{ est} > \frac{H}{\mathrm{I}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n = \frac{D}{p} + \frac{H(p-p')}{\mathrm{I}pp'}$$

$$\text{Si } D \text{ est} < \frac{H}{\mathrm{I}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n = \frac{H}{\mathrm{I}p'}$$

on ne tient jamais compte des fractions moindres que les demi-relais.

La capacité d'une brouette est évaluée à $0^{mmm}.0333$ (trente brouettées pour 1^{mmm}), et son poids lorsqu'elle est pleine de 85 à 90^k, mais il est habituellement plus élevé. Un fort rouleur à la tâche, dans une journée de 8 à 9 heures, parcourt environ 30000^m ou 7 lieues communes avec sa brouette tant pleine que vide. La quantité d'ouvrage fait par le rouleur augmente par l'emploi constant d'un bon système de planches de roulage bien unies et souvent nettoyées à la pelle. Les meilleures planches pour le roulage des terres ordinaires sont en orme et ont $0^m.03$ à 0.04 d'épaisseur. Le bois blanc est préféré par le génie pour les terres grasses et sur les rampes. Il évalue la consommation de ces dernières à 0.022 de mètre

courant par mètre cube de terre transporté à *un* relai et le prix du mètre courant de ces planches à $0^{f}.25$.

Transport au tombereau. On estime ici la dépense en évaluant le temps employé pour le chargement et le déchargement, plus celui T qu'il faut pour parcourir la distance du transport. On a pour évaluer cette dernière durée en *heures*, en conservant les dénominations ci-dessus :

$$\text{Si } H = 0 \ldots\ldots\ldots \quad T = 0.0003\,D$$

$$\text{Si } D \text{ est} > \frac{H}{I} \ldots\ldots \quad T = 0.0003\,D + 0.0001\,\frac{H}{I}$$

$$\text{Si } D \text{ est} < \frac{H}{I} \ldots\ldots \quad T = 0.0004 \times \frac{H}{I}$$

I étant toujours = 0.08.

On estime d'ailleurs à $0^{mmm}.370$ la contenance d'un tombereau à un cheval, sa vitesse moyenne à 50^{m} par minute en terrain horizontal ; son emploi n'est considéré comme avantageux que lorsqu'il doit parcourir en plaine au moins 90^{m} et au plus 600^{m}. Un homme à la *tâche* peut lever à la pelle et charger dans un tombereau *dix* mètres cubes de terre dans sa journée ; il faudrait réduire ce chiffre de près d'un tiers, si l'homme était payé à la journée.

Foisonnement des terres. On admet que les terres légères foisonnent de 0.10, les terres moyennes de 0.125 et les terres fortes de 0.166, de telle sorte que, si l'on a enlevé un mètre cube tassé de ces différentes terres, on a respectivement $1^{mmm}.10$, 1.125 et 1.166, mais ces évaluations sont généralement beaucoup trop faibles, et l'on voit le foisonnement de terres moyennes augmenter leur volume primitif de 0.4 et plus, lorsqu'on les jette d'une grande hauteur.

TERRE.—Voy. *Astronomie*, page 71, et *Chaleur terrestre*, page 272.

THERMOMÈTRES.— Voy. *Calorique*, page 180.

THALWEG. Mot emprunté à la langue allemande et qui signifie proprement le chemin de la vallée ; c'est la ligne d'écoulement que détermine dans le fond d'un ravin comme dans celui d'un fleuve la série des points les plus bas du lit des eaux.

TITANE. Métal peu important dont je ne m'occuperai pas ici. On peut soupçonner la présence du titane dans un minerai de fer, lorsque l'essai par la voie sèche (page 27) donne une scorie enveloppée d'une légère pellicule rouge.

TONNEAUX. L'art de les jauger a occupé le grand *Keppler*, et sa *Nova Stereometria doliorum*, qui parut en 1615, fut, dit-on, entreprise à l'occasion d'une discussion qui s'éleva entre lui, *Keppler*, et un fiscal qui prétendait lui faire payer un droit injuste sur le vin bu à ses noces. A défaut des méthodes de *Keppler* que je n'ai pas pu retrouver, voyez la page 854.

TOURILLONS.—Voyez pour leurs dimensions usuelles la page 55, et pour le calcul de leur frottement l'article *Axe*, page 97, ainsi que la page 823.

TRAVAIL. 1. Expression très-heureuse, substituée par M. *Poncelet* en 1824 à celle de *quantité d'action* que *Coulomb* avait introduite. Elle a été adoptée par *Coriolis* dans son *Calcul de l'effet des machines* en 1829, et elle est aujourd'hui complétement admise dans le langage de la mécanique. On s'étonne qu'elle ait échappé à *Navier* qui, après en avoir montré la parfaite convenance par l'emploi fréquent et juste qu'il en a fait, la laisse échapper cependant; et je trouve au moins curieux de définir ici, à l'aide de son propre texte, cette expression si naturelle de *travail* qu'il abandonne précisément après avoir démontré qu'elle était nécessaire.

2. « *De la manière d'évaluer en mécanique le* travail ou l'effet *des machines.* La comparaison de diverses machines pour le négociant et le capitaliste se fait naturellement d'après la quantité de travail qu'elles exécutent et le prix de ce travail. Pour estimer les valeurs respectives de deux moulins à blé, par exemple, on examinera quelle quantité de farine chacun peut moudre dans l'année..... Mais supposons une personne qui possède un moulin à blé et qui désirerait, au moyen de quelques changements dans son mécanisme, en faire un moulin à scier, elle ne pourrait juger de l'avantage ou du désavantage de cette opération qu'autant qu'elle saurait évaluer, d'après la quantité de farine produite par son moulin, la quantité de bois qu'il serait dans le cas de débiter. Or, cette évaluation est une chose absolument impossible, à moins qu'on n'ait trouvé une mesure commune pour ces deux travaux de natures si différentes. »

« Cet exemple suffit pour montrer la nécessité d'établir une sorte de *monnaie mécanique*, si l'on peut s'exprimer ainsi, avec laquelle on puisse estimer les *quantités de travail* employées pour effectuer toute espèce de fabrication. »

3. « *L'élévation verticale des corps pesants est* le travail *auquel on compare ou rapporte tous les autres.* Le choix d'une unité de mesure est jusqu'à un certain point arbitraire. Il est seulement indispensable que cette unité soit une chose de même nature que celles dont elle doit former le terme de comparaison. »

« Les Anglais, par exemple, ont pris pour unité des quantités de travail l'action d'un *cheval* (*horse power*) (Voyez page 321)... . . . mais . . l'expression . . ne devient intelligible au lecteur qu'après qu'ils la lui ont traduite en expliquant ce qu'ils entendent par l'action d'un cheval, c'est-à-dire quel *effort* ils supposent qu'un cheval peut exercer en même temps qu'il parcourt un certain *espace* dans un *temps* donné. C'est effectivement à cela que se réduit l'exécution d'un travail quelconque. »

4. « Il y a toujours dans l'action d'une machine un effort ou pression exercé contre un point pendant qu'un espace est parcouru par ce point. Cette remarque conduit naturellement à reconnaître que le genre de *travail* le plus propre à servir à l'évaluation de tous les autres est l'*élévation verticale des corps pesants.* En effet, indépendamment de ce qu'il est susceptible d'une expression numérique, précise, invariable et exempte d'arbitraire, on peut toujours, quelle que soit la nature du travail exécuté par une machine donnée, non-seulement dans la pensée et par une abstraction de l'esprit, mais dans la réalité, substituer à ce travail l'élévation d'un poids: car on peut supprimer la résistance et attacher, dans sa direction au point où elle agissait, une corde passant sur une poulie de renvoi, à l'extrémité de laquelle on suspendrait un poids égal à l'effort ou pression que la résistance exerçait. Rien ne serait changé aux conditions du mouvement de la machine, qui resterait exactement le même, et dont l'effet serait seulement transformé en l'élévation du poids. ». . . . . L'élévation de ce poids représentera donc le *travail* de la machine, et une machine sera censée faire d'autant plus d'ouvrage qu'elle pourra élever ainsi un poids plus grand à une hauteur plus grande. »

5. « *Comment les quantités de travail rapportées à cette espèce d'unités doivent s'exprimer en nombres.* La nature du travail qui devra servir de terme de comparaison à tous les autres étant ainsi déterminée. . . . . . . il ne s'agit plus que de savoir l'évaluer en nombres. En examinant ce que c'est qu'élever un poids, on voit qu'il entre dans cette opération deux éléments, qui sont la grandeur du poids et la hauteur à laquelle on l'élève. Mais on reconnaît facilement que c'est la même chose d'élever un poids d'un kilogramme à deux mètres ou un poids de deux kilogrammes à un mètre, puisqu'il faut dans les deux cas élever deux fois un kilogramme à un mètre, et, en général, qu'il est indifférent d'élever un poids à une hauteur ou un poids d'autant moindre à une hauteur d'autant plus grande. D'où il suit que la grandeur du *travail* à faire. . . . est proportionnelle au produit de ces deux quantités, et par conséquent que le *travail* nécessaire pour élever un poids Q à la hauteur q doit être représenté par le produit Qq; et ce produit exprimera un nombre d'unités dont chacune est le *travail* nécessaire pour élever l'u-

nité du poids à l'unité de hauteur, c'est-à-dire, dans notre système de mesures, pour élever un kilogramme à un mètre. »

« Dans la suite, lorsqu'un nombre exprimera. . . . un nombre de kilogrammes élevé à un mètre, cela sera indiqué par le signe kil. $\times$ mètres ou simplement $k \times m$ (Voyez l'article *Kilogrammètre*, page 1007). »

6. Ainsi, et résumant cette exposition de *Navier* (pages 376 à 378 de l'*Architecture hydraulique*), en la précisant, nous pouvons dire :

Le travail d'une force, supposée d'abord constante en intensité et direction, est le produit de l'intensité de cette *force* (page 776) par la longueur du chemin que son point d'application parcourt dans la direction même de la force.

7. L'*unité de travail* s'appelle *kilogrammètre* et se désigne par l'indice *km*. Elle est un travail équivalent à celui qu'il faudrait développer pour élever verticalement ou contre l'action de la pesanteur un kilogramme à la hauteur d'*un* mètre, à la condition que la vitesse d'ascension du poids soit la même au départ et à l'arrivée.

8. *Travail d'une force constante oblique à la direction que parcourt son point d'application.* Il résulte de la définition même du travail d'une force F que, si e est le chemin réel qui a été parcouru par son point d'application, et α l'angle compris entre la direction de la force F et celle du chemin e, le travail T de la force sera le produit $e \cos. \alpha$ du chemin décrit dans sa direction propre; on a donc :

$$T = F e \cos. \alpha = e \times F \cos. \alpha.$$

9. Il est donc indifférent de projeter le chemin décrit par le point d'application sur la direction de la force ou de projeter la force sur la direction du chemin décrit, lorsqu'on doit évaluer le travail d'une force oblique à la direction du chemin décrit par son point d'application.

Le travail d'un corps P qui tombe en parcourant la demi-circonférence verticale d'un cercle de rayon r est donc $P \times 2r$.

10. *Quel que soit le nombre des forces constantes* F F' F'' qui agissent sur un même point, et quels que soient les angles α, α' α'' que forment leurs directions avec le chemin e parcouru par ce point, leur travail T sera égal à la somme algébrique des travaux de chacune d'elles, et l'on aura :

$$T = F e \cos. \alpha \pm F' e \cos. \alpha' \pm F'' e \cos. \alpha'',$$

en donnant le signe + aux termes où la composante de la force agit dans le sens du chemin décrit, et le signe — lorsque la composante de la force ou résistance et le chemin parcouru sont de sens

contraires. On dit dans le premier cas que le travail est *mouvant* ou *positif*, et dans le second cas qu'il est *négatif* ou *résistant*.

11. *Travail d'une force d'intensité variable.* Si la force F change d'intensité à mesure que son point d'application chemine, on projette sur la direction de F le chemin élémentaire ds décrit par le point d'application pendant chaque instant infiniment petit, ce qui donne $ds \cos. \alpha$ pour la composante de ce petit chemin en appelant α l'angle des deux directions; $F \times ds \cos. \alpha = F \cos. \alpha \times ds$ sera ainsi le travail élémentaire ou instantané de la force variable, et l'on aura en général pour le travail total T developpé par la force variable, entre les instants où les chemins décrits sont s_0 et s_1

$$T = \int_{s=s_0}^{s=s_1} F \cos. \alpha \, ds$$

12. Si l'intégration ne peut s'opérer, on porte sur une droite des divisions proportionnelles aux petits chemins ds, puis élevant par chacun des points de division des ordonnées proportionnelles aux intensités correspondantes des composantes variables $F \cos. \alpha$ de la force, on fait passer une courbe par les extrémités de ces ordonnées, et l'on calcule l'aire comprise entre la courbe et l'axe des chemins par la méthode de T. *Simpson* (page 435).

13. Si le chemin et la force variable sont de même direction, on a :

$$T = \int_{s=s_0}^{s=s_1} F \, ds$$

tel est le cas suivant :

Travail d'un gaz ou d'une vapeur contre un piston mobile pendant la détente. Soit A l'aire du piston mobile, v_0 le volume du cylindre qu'il a engendré en se mouvant sous la tension supposée constante du gazomètre ou de la chaudière, et que nous représentons par p_0 par mètre carré. La pression sur toute la surface du piston au moment où la détente commence sera $A p_0$, et, s'il décrit un petit chemin rectiligne dl, le travail élémentaire sera $A p_0 dl = p_0 dv_0$, car l'accroissement dv_0 du volume engendré est évidemment $= A dl$. Le travail de la détente contre le piston depuis l'instant où le volume engendré était v_0 jusqu'à celui où il est devenu v sera donc la somme de ces travaux élémentaires ou $\int_{v_0}^{v} p_0 \, dv_0$;

mais, lorsqu'on admet la loi de *Mariotte*, qui suppose que les pressions sont en raison inverse des volumes, on a pour obtenir la pression p correspondante au volume v

$$pv = p_0 v_0 \qquad \text{d'où } p_0 dv_0 = \frac{pv\,dv_0}{v_0}$$

ce qui donne pour le seul travail de la détente

$$T = \int_{v_0}^{v} \frac{pv\,dv_0}{v_0} = pv[\text{log.hyp.}\,v - \text{log.hyp.}\,v_0] = p_0 v_0 \,\text{log.hyp.}\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

Si l'on ajoute à ce travail celui qui a été développé pendant que le cylindre était en communication libre avec la chaudière et qui est évidemment $p_0 v_0$, on a pour le travail T′ d'une course

$$T' = p_0 v_0 \left\{ 1 + \text{log.hyp.}\,\frac{v}{v_0} \right\}$$

et si p_1 est la tension par mètre carré dans le condenseur, comme elle produira un travail résistant $p_1 v$ de l'autre côté du piston, le travail T_1 transmis à sa tige pour une course se réduira à

$$T_1 = p_0 v_0 \left\{ 1 + \text{log.hyp.}\,\frac{v}{v_0} \right\} - p_1 v.$$

Voyez l'article *Vapeur*, pag. 1510.

14. *Travail de poids constants qui montent et qui descendent.* Le travail moteur ou résistant de plusieurs poids constants est égal au produit du poids total par la hauteur verticale dont le centre de gravité commun de tous les poids s'est abaissé ou élevé. Ainsi ce travail est le même que celui d'une force unique égale au poids total et appliquée au centre de gravité commun de tous les poids; et, si une partie des poids constants s'abaisse tandis que l'autre partie de ces poids s'élève, l'excès du travail mouvant sur le travail résistant est encore le produit du poids total par la hauteur dont le centre de gravité commun s'est abaissé (Voyez les articles *Forces*, page 776, *Machines*, page 1081, et *Mécanique*, page 1135.)

TREMPER *un outil.* Faire rougir le tranchant et le plonger rouge dans l'eau ou dans l'huile; la trempe est *molle* et l'outil s'émousse, si l'on n'a pas assez chauffé : il faut alors chauffer de nouveau et plonger plus rapidement. La trempe est *sèche* et l'outil s'ébrèche, si l'on a trop chauffé : il faut alors faire *revenir* la pièce, c'est-à-dire la chauffer jusqu'à ce qu'elle ait acquis une belle couleur bleue et non au delà.

TREUIL. Appareil bien connu (*fig.* 1, *pl.* CIII), essentiellement composé de deux cylindres verticaux de rayons différents R et r montés sur un même axe horizontal. La puissance P agit toujours, en pratique, à la circonférence du grand cylindre, et la résistance Q à la circonférence du plus petit. Nous supposerons ici que ces forces

sont toutes deux verticales et qu'elles se transmettent au treuil à l'aide de *cordes* (pag. 421).

Si l'on fait d'abord abstraction de la raideur de celles-ci, on a facilement pour l'équation des moments par rapport à l'axe, en nommant W le poids total du système ρ le rayon de l'axe et φ l'angle du frottement de cet axe ou tourillon sur les coussinets :

$$PR = Qr + (P + Q \pm W)\,\rho \sin.\varphi \ldots\ldots (1)$$

d'où

$$P = Q\left[\frac{r + \rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi}\right] \pm \frac{W \rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi} \ldots\ldots (2)$$

le signe supérieur devant être pris lorsque les forces P et Q agissent de haut en bas comme dans la figure, et le signe inférieur s'appliquant aux cas où les forces verticales P et Q agissent de bas en haut en sens contraires du poids W.

Appelant S, S′, s, les chemins simultanément décrits pendant une durée quelconque par les points d'application de P, de Q et du frottement dans les directions propres de ces trois forces, on a évidemment entre eux la relation

$$S = \frac{R}{r} S' = \frac{R}{\rho} s \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Multipliant l'équation précédente par ces rapports, désignant par T_m le travail moteur $= PS$ et par T_u le travail résistant utile $= QS'$, il vient pour l'équation du travail de la machine, abstraction faite de celui qui est absorbé par la raideur de la corde,

$$T_m = T_u \left[\frac{1 + \frac{\rho}{r} \sin.\rho}{1 - \frac{\rho}{R} \sin.\rho}\right] \pm \frac{S W \rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi} \ldots\ldots (4)$$

Pour introduire l'influence de la raideur de la corde qui, comme l'on sait, ne se fait sentir qu'au point d'enroulement, nous remarquerons que cette raideur (pag. 421),

ou

$$\frac{d^u}{2r}(a + bQ) \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

a pour effet d'élever la résistance totale exercée au point d'enroulement de la corde à la valeur

$$Q + \frac{d^u}{2r}(a + bQ) = \left[1 + \frac{d^u b}{2r}\right] Q + \frac{d^u a}{2r} \ldots (6)$$

Mettant cette valeur à la place de Q dans l'équation des moments, on en déduit

$$P = Q\left[1 + \frac{d^{u}b}{2r}\right]\left(\frac{r + \rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi}\right) + \frac{\frac{d^{u}a}{2} + \left(\frac{d^{\mu}a}{2r} \pm W\right)\rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi} \quad . . (7)$$

et en multipliant par les rapports (3) des chemins simultanément parcourus, on a pour l'équation complète du travail.

$$T_m = T_u\left[1 + \frac{d^{u}b}{2r}\right]\left[\frac{1 + \frac{\rho}{r}\sin.\varphi}{1 - \frac{\rho}{R}\sin.\varphi}\right] + S\left[\frac{\frac{d\ a}{2} + \left(\frac{d^{\mu}a}{2r} \pm W\right)\rho \sin.\varphi}{R - \rho \sin.\varphi.}\right] (8)$$

Cette équation suppose essentiellement que le mouvement du système est uniforme ou qu'aucune force d'inertie n'est mise en jeu. Voyez *Cabestan*, pag. 172.

TRIGONOMÉTRIE.—Voy. pag. 855 à 879.

TROMPE.—Voy. *Machines soufflantes*, pag. 1100.

TUNAGE. Travail d'art destiné à consolider un terrain et surtout à le défendre contre l'action de la mer ou des eaux courantes. Il se compose de lignes de *clayonnage* dont les intervalles sont remplis soit de fascines chargées de gravier, soit de gravier seul, de terres, de sable, d'enrochements.

V

VAPEUR D'EAU. Jamais circonstances ne furent moins propices à la rédaction de cet article. Lois générales, données numériques, résultats d'expériences que l'on devait croire parfaitement vérifiés, généralités séduisantes, ingénieuses hypothèses des *Boyle*, des *Mariotte*, des *Dalton*, des *Watt*, des *Southern*, des *Dulong*, des *Arago*, des *Gay-Lussac*, savantes théories des *Prony*, des *Navier* et des *Poncelet*, tout est mis en question, ou disparaît pièce à pièce, en ce moment critique, sous l'impitoyable et habile main de M. *Regnault*. Malheureusement la sape de l'infatigable académicien marche beaucoup plus rapidement que la publication de ses importantes découvertes, et, si les 800 pages in-4° éditées jusqu'ici laissent peu d'espoir qu'il reste rien de l'ancien édifice, on ne sait trop encore quelles lois, quels principes généraux pourront servir de fondements à une nouvelle théorie, ni même s'il existera de telles lois ou de tels principes.

De son côté, la pratique modifie ses machines, et même avec succès ; elle demande à l'expérience surtout les formes et les proportions de leurs organes, et, peut-être avec raison, semble douter du pouvoir que s'attribuait la science d'en régler les dimensions ; elle abandonne rapidement les mécanismes fondamentaux ou les transforme, et dans les machines destinées à la mer surtout, vi-

sant à ce qu'elle appelle le *ramassé*, elle efface de ses projets et les longues *bielles* et les classiques *balanciers*, etc...

Au milieu de ce cataclysme, placé aujourd'hui encore entre un passé qui n'apparaît plus qu'à travers la poussière de la démolition, et un avenir que M. *Regnault* ne laisse entrevoir que partiellement, je me contente d'indiquer très-sommairement : 1° les méthodes de calcul qu'on employait naguère ; 2° les données numériques nouvelles, mais incomplètes, dues à M. *Regnault*; 3° enfin je signale, d'après lui, quelques écueils que, dans notre ignorance de praticiens, chacun de nous avait pris pour des phares lumineux élevés par le génie d'hommes à jamais illustres.

Comment on évaluait le travail de la vapeur sur un piston.

A étant la surface du piston en mètres carrés,

l la partie de la course qu'il a parcourue lorsque son mouvement a engendré le volume $V_0 = A\,l$,

P_0 la pression constante exprimée en kilogrammes par mètre carré à laquelle il a été soumis pendant la partie l de sa course,

on a évidemment pour le travail du piston pendant cette période

$$A P_0 l = P_0 V_0$$

Si à partir de cet instant, l'introduction de la vapeur cesse, et si on laisse se détendre celle qui a déjà été admise, jusqu'à ce qu'elle occupe le volume entier V du corps de pompe, sa force élastique diminuera à mesure que le volume qu'elle occupe augmentera; mais la loi qui lie alors les forces et les volumes n'étant pas connue, les mécaniciens supposaient que la vapeur agissait conformément à la loi de *Mariotte* pendant la détente, et P étant la pression par mètre carré correspondante au volume total V, ils posaient

$$PV = P_0 V_0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{V}{V_0} = \frac{P_0}{P}$$

d'où résultait pour le travail pendant la détente (*Voyez* page 1506)

$$P_0 V_0 \,\text{log. hyp.}\, \frac{V}{V_0} = P_0 V_0 \,\text{log. hyp.}\, \frac{P_0}{P}$$

et dès lors pour le travail mouvant correspondant à une course complète du piston

$$P_0 V_0 \left\{ 1 + \text{log. hyp.}\, \frac{P_0}{P} \right\}$$

Mais le revers du piston étant soumis à la pression p par mètre carré et supposée constante qui existe dans le condenseur ou au dehors, il naît de cette circonstance un travail résistant

$$p\,V = p\,\frac{P_0 V_0}{P}$$

de sorte que le travail moteur T pour une course devenait

$$T = P_0 V_0 \left\{ 1 + \text{log. hyp.} \frac{P_0}{P} - \frac{p}{P} \right\} \text{ kilogrammètres.}$$

Multipliant cette expression par le nombre n de courses en une minute, divisant ensuite par 60 pour obtenir le travail par seconde et divisant encore par 75, on obtenait pour le travail théorique de la machine exprimée en *chevaux* (pag. 321)

$$\frac{n}{60} \cdot \frac{P_0 V_0}{75} \left\{ 1 + \text{log. hyp.} \frac{P_0}{P} - \frac{p}{P} \right\} \text{ chevaux.}$$

Enfin pour obtenir le travail réellement transmis, on appliquait en bloc à la machine des coefficients de correction très-influents, compris entre 0.30 et 0.66, dépendants de son état d'entretien, d'autant plus grands que la machine était plus puissante ; il y avait donc dans ces évaluations beaucoup d'incertitude et d'arbitraire ; espérons que les importantes expériences de M. *Regnault* les feront bientôt disparaître. Voici les résultats de quelques-unes d'entre elles.

Forces élastiques de la vapeur d'eau à saturation, correspondantes à divers degrés du thermomètre à mercure, d'après les expériences de M. Regnault.

DEGRÉS.	FORCES			CHALEUR totale.
	en colonne de mercure.	en kilogrammes par mètre carré.	Atmosphères.	
	mèt.	k.		
— 20	0.00091	12.37		
— 10	0.00208	28.28		
0	0.00460	62.54	0.006	606.5
+ 10	0.00916	124.54	....	609.5
20	0.01739	236.43	....	612.6
30	0.03155	428.95	....	615.7
40	0.05491	746.56	....	618.7
50	0.09198	1250.56	....	621.7
60	0.14879	2022.95	....	624.8
70	0.23309	3169.09	0.30	627.8
80	0.35464	4821.69	0.47	630.9
90	0.52545	7144.02	0.69	633.9
100	0.760	10332.96	1	637.0
110	1.073	14588.51	1.41	640.0
120	1.483	20162.87	1.95	643.1
130	2.013	27368.75	2.64	646.1
140	2.682	37824.47	3.53	649.2
150	3.532	48021.07	4.64	652.2
160	4.580	62269.68	6.02	655.3
170	5.842	79429.83	7.68	658.3
180	7.366	100148.14	9.69	661.4
190	9.204	125137.58	12.11	664.4
200	11.360	154450.56	14.94	667.5
210	13.895	188915.42	18.28	670.5
220	16.823	228725.51	22.13	673.6
230	20.160	274095.36	26.52	676.6

Ce tableau donne les relations entre les températures et les forces élastiques de la vapeur aqueuse à saturation. La 5e colonne, intitulée *chaleur totale*, exprime le nombre de *calories* qu'il faut transmettre à un kilogramme d'eau à zéro pour convertir cette eau en vapeur à saturation aux pressions et températures des colonnes précédentes.

De la loi de Watt. On sait que d'après *Watt* la quantité de chaleur renfermée dans un kilogramme de vapeur à saturation était la même et $= 633$, quelle que fût la pression au-dessus d'une atmosphère ; les praticiens avaient admis cette loi du grand homme, mais en adoptant 650 au lieu de 633, d'après quelques expériences concordantes de *Gay-Lussac* et de *Clément* et *Désormes*, expériences dont M. *Regnault* déclare au reste n'avoir pu nulle part retrouver les détails. On voit que d'après M. *Regnault* cette chaleur totale augmente notablement avec la pression ou avec la température, et que l'on ne peut plus compter que la même quantité de combustible produira un kilogramme de vapeur à basse et à haute pression.

De la loi de Southern. On sait encore que, d'après les expériences de *Southern*, quelques praticiens admettaient que la chaleur latente de vaporisation, c'est-à-dire la chaleur absorbée dans le passage de l'état liquide à l'état gazeux, était constante pour toutes les pressions, de sorte que l'on obtenait la chaleur totale en ajoutant à la chaleur latente constante le nombre qui représente la température de la vapeur.

Cette loi est inexacte et s'écarte même encore plus que celle de Watt des résultats numériques donnés par les expériences de M. *Regnault*.

Il conviendrait maintenant de chercher la véritable loi qui lie les quantités totales de chaleurs contenues dans la vapeur à saturation ; « mais je ne pense pas, dit M. *Regnault*, que cette recherche puisse « être faite actuellement avec quelque chance de succès, car il nous « manque plusieurs éléments dont la connaissance me paraît abso- « lument nécessaire à la solution du problème.

« Il me paraît, ajoute-t-il, qu'il est essentiel de connaître la loi « qui règle les densités de la vapeur aqueuse, à saturation et à non- « saturation, sous les diverses pressions et aux différentes tempéra- « tures. On calcule ordinairement ces densités en admettant que, « pour une température constante, les densités de la vapeur à satura- « tion et à non-saturation peuvent se calculer d'après la loi de « *Mariotte*, et que sous la même pression, mais à différentes tempé- « ratures, les volumes de la vapeur non saturée peuvent être déter- « minés, en admettant que la vapeur se dilate pour chaque degré de « température et quelle que soit sa densité, de la même fraction de

« son volume à zéro degré, dont se dilate pour le même intervalle « de température l'air atmosphérique ayant la densité qu'il possède « sous la pression d'une seule atmosphère. Or les différentes recher- « ches que j'ai publiées rendent très-probable que *ces hypothèses* « *s'écartent beaucoup de la réalité*, et il est indispensable que l'expé- « rience directe établisse ces relations avec certitude. »

Ainsi les formules fondamentales que nous avons rappelées plus haut *s'écartent très-probablement beaucoup de la réalité*, et l'on n'a plus, en ce moment, aucune base de calcul.

Quant à la chaleur spécifique de l'eau elle-même, si on la représente par 1000 entre 0 et 30°, elle devient 1005 environ entre 30° et 110° et 1015 entre 30° et 190°; l'augmentation est donc assez faible pour qu'on puisse la négliger dans le plus grand nombre de circonstances, surtout si l'eau ne s'échauffe pas au delà de 100°.

Il resterait donc à connaître, savoir :

La chaleur spécifique de la vapeur d'eau à divers états de densité et aux diverses températures;

La loi suivant laquelle varie la densité de la vapeur aqueuse à saturation sous les différentes pressions ;

Les coefficients de dilatation de la vapeur aqueuse prise dans ses différents états de densité.

C'est l'objet des recherches actuelles de l'actif et fécond académicien.

Voyez les articles *Fourneaux*, *Cheminées*, *Combustibles*, *Bielle*, *Manivelle*, *Balanciers*, *Volant*, *Bateaux à vapeur*, *Chemins de fer*, etc.

VAUCANSON. Mécanicien célèbre, né à Grenoble, en 1709, membre de l'Académie des sciences en 1746, mort le 21 novembre 1782.

VENTS. On appelle *vents d'inspiration* ceux qui se font sentir successivement des points en amont aux points en aval de la direction générale du courant, et *vents d'aspiration* ceux qui se propagent au contraire de l'aval vers l'amont.

On estime les *vitesses* et les *pressions* perpendiculaires du vent d'après les évaluations suivantes qui méritent peu de confiance.

Vents,	Vitesse.	Pression par mètre carré.
A peine sensible.	0m.50	k.
Sensible.	1.	0.140
Modéré.	2.	0.540
———	3.	1.047
———	4.	2.170
Assez fort.	5.	2.908
———	6.	4.870
———	8.	7.443

Vents	Vitesse.	Pression par mètre carré.
	m.	k.
Fort.	10.	13.54
——	10.85.	13.691
——	14.	22.795
Très-fort.	20.	46.520 à 54.16
Tempête.	22.5.	55
Grande tempête.	27.	79
Ouragan.	36.	140.74
——	40.	186.080
Déracine les arbres et renverse les édifices.	45.	220

On peut remarquer, quant aux efforts, que cependant *Fremel*, dans un mémoire sur la stabilité des phares, élève à 275k par mètre carré l'intensité du vent; et le général *Baudrand* rapporte qu'il a *vu* trois pièces de 24 déplacées par l'effet du vent jusqu'à l'épaulement d'une batterie. De son côté, *Franklin*, pour donner une idée de l'action du vent sur les eaux tranquilles, affirme que sur une vaste pièce d'eau de 13500 mètres de largeur et 0m.90 de profondeur, un vent fort mit à sec tout un côté de cette espèce d'étang, et en même temps éleva de 0m.90 le niveau primitif sur la rive opposée, en sorte que la profondeur y était parvenue à 1m80.

Quant aux vitesses, on remarquera encore que l'aéronaute *Garnerin*, en juin 1802, fut porté avec son ballon de *Ranelagh* à *Colchester*, avec une vitesse moyenne de 128800 mètres à l'heure, soit environ 36 mètres par seconde, bien que le vent n'offrît nullement le caractère d'un *ouragan;* et *Green*, en septembre 1823, a pu être emporté sans danger à 69230 mètres en dix-huit minutes, ce qui donne une vitesse de plus de 64 mètres, bien que son ballon fût élevé à plus de 4000 mètres au-dessus du sol.

On assure que dans les pays de plaine, la direction du vent est habituellement plongeante, et qu'elle y fait avec l'horizon un angle de 18° $\frac{1}{3}$.

Mariotte, vers l'année 1700, avait remarqué que, en France, quand le *Nord* et le *Nord-Est* cessait de souffler, il était remplacé par l'*Est* qui était suivi lui-même du *Sud* et du *Sud-Ouest*.

La direction du vent influe sur la hauteur moyenne du baromètre, en sorte que pour obtenir cette hauteur moyenne pour un lieu quelconque, il devient nécessaire de faire entrer dans le calcul un nombre égal d'observations correspondantes à des vents de directions opposées.

Théorie des vents généraux. La vitesse de rotation de chaque point de la surface terrestre est proportionnelle au rayon du parallèle qui passe par ce point. Nulle au pôle, cette vitesse est à son maximum à l'équateur. Dans l'état de calme, on suppose que l'air prend la vitesse du lieu au-dessus duquel il se trouve, et quand par

une cause quelconque une masse d'air se meut le long d'un même parallèle, la rotation de la terre est alors sans influence sur sa vitesse. Si, au contraire, cette masse se meut du pôle vers l'équateur, elle passe successivement par des points dont la vitesse de rotation est plus grande que la sienne, et retardant ainsi sur le mouvement de la terre, sa vitesse nous affecte comme si cette masse se mouvait de l'orient vers l'occident. Cette déviation est d'autant plus grande que la différence de latitude est plus grande entre le point de départ du courant et son point d'arrivée. En partant de cette idée fondamentale, qui paraît due à *Hadley* (*Transactions philosophiques*, 1735), M. *Dove* a donné une théorie des vents qu'il n'est pas trop de mon objet de résumer ici et pour laquelle je renvoie à ses *Recherches météorologiques*, Berlin 1837, ou à la *Bibliothèque de Genève*, septembre 1838.

VENTILATEUR, machine soufflante pour laquelle je renvoie à la page 1098. J'ajoute seulement ici que depuis que j'ai redigé l'article *Machines soufflantes*, j'ai eu l'occasion de faire moi-même et de faire faire quelques observations sur les ventilateurs. Elles m'ont confirmé dans l'idée émise à cet article, savoir, que le travail du ventilateur, aussi bien que celui des machines soufflantes à piston, devait comprendre deux termes, savoir : 1° le travail nécessaire pour amener l'air de la densité correspondante à la pression barométrique b jusqu'à celle correspondante à la tension totale $(b+T)$ indiquée par le manomètre ; 2° le travail nécessaire pour chasser cet air *ainsi comprimé* à travers la buse. Les formules 7 et 8 de l'article en question paraissent donc en effet applicables aux ventilateurs.

Mais à la somme T_o des travaux de compression et d'expulsion dont elles donnent la mesure, il est nécessaire, en pratique, d'ajouter le travail des frottements de l'axe et celui dû à la raideur de la courroie qui embrasse sa poulie. Il faut que ces derniers travaux aient été bien énergiques dans les observations que j'ai faites, car je trouve que la quantité totale de travail moteur ou T_m s'est élevée à environ quatre fois le travail utile ou d'expulsion.

$$T_m = 4 \times \frac{P}{2g} u^2$$

Voyez page 1095.

VENTILATION. L'homme et les animaux vicient l'air dans lequel ils séjournent tant par la respiration que par la transpiration cutanée.

On a calculé qu'un homme de moyenne taille respirait environ 20 fois par minute ou deux fois pour sept battements de son pouls. Chaque inspiration est d'environ $0^{mmm}.00065$, donc $0.00065 \times 20 =$ 13 litres d'air entrent dans les poumons et en sortent en une minute;

cela donne $0^{mmm}.780$ par heure, $18^{mmm}.720$ en 24 heures, c'est un poids d'air d'environ 24 kilog.; soit 1 kilogr.d'air par heure.

Le résidu de la respiration est un mélange d'azote, d'acide carbonique et de vapeur d'eau qui, à la température où il est expiré, est spécifiquement plus léger que l'air ordinaire, ce qui fait qu'il s'élève, s'il est libre, vers les parties supérieures du local habité. C'est vers ces parties dès lors que les systèmes de ventilation puisent l'air qui doit être expulsé au dehors; il convient que les orifices d'entrée de l'air frais et ceux de sortie de l'air vicié aient de très-petites sections et par compensation soient très nombreux.

Quant à la transpiration cutanée, elle est telle qu'un homme de moyenne taille couvert d'habits exhale environ $0^{k}.080$ de vapeur en une heure. Ce poids de vapeur est celui qui saturerait $6^{mmm}.150$ d'air à la température de 15°.

Il en résulte qu'une ventilation, basée sur la condition que l'air qui a été en contact avec une émanation quelconque ne soit pas respiré une seconde fois, doit chasser du local d'une part, et y faire entrer d'autre part un volume d'air d'environ 7 mètres cubes par heure et par individu.

Mais il faut encore tenir compte de l'air vicié par la combustion des appareils d'éclairage. A ce sujet on remarque que une chandelle, dite des 6, qui brûle $0^{k}.011$ par heure, vicie dans le même temps $0^{mmm}.340$; une bougie brulant $0^{k}.013$ vicie $0^{mmm}.445$, et une lampe gros bec brûlant $0^{k}.042$ vicie $1^{mmm}.680$ dans le même temps. Ces chiffres permettront d'évaluer la quantité d'air à renouveler par heure, en observant qu'il suffit que l'air ne contienne plus que 15 pour 100 d'oxygène pour déterminer infailliblement l'asphyxie.

Quant aux gaz étrangers à l'air, le docteur *Reid* remarque que leur mélange accidentel en petites proportions influe diversement suivant que le local est bien ou mal éclairé. Une proportion de 8 à 10 pour cent d'acide carbonique, par exemple, qui dans l'obscurité cause beaucoup d'oppression et de danger, peut être supportable, si l'on est exposé à une vive lumière, et *sir Wily* a constaté que dans une grande caserne de Saint-Pétersbourg, les cas de maladie ont été pendant plusieurs années consécutives dans le rapport de 3 à 1 pour le côté peu éclairé comparé à celui qui jouissait d'une belle lumière.

Un très-bon principe à suivre, lorsque l'on aura à combiner la ventilation avec le chauffage d'un établissement, consiste à prendre à la partie supérieure des salles tout l'air qui doit alimenter la combustion des foyers de la même salle ou de la salle immédiatement supérieure. L'application de ce principe a été faite en Angleterre, avec un succès complet, dans un hôpital. On a pris, pour alimenter la combustion des foyers de la salle supérieure, l'air du plafond

d'une salle inférieure remplie de malades dans laquelle, en dépit de tous les moyens jusque-là employés, un séjour prolongé avait été éminemment dangereux.

Avant de pénétrer dans les puits ou galeries de mines abandonnées et lorsqu'il sera certain que l'air qui remplit l'excavation ne contient pas de gaz inflammable, l'ingénieur doit, avant tout, y descendre une chandelle ou une lampe allumée, et en outre une petite bande de papier préalablement plongée dans une dissolution d'acétate de plomb. Si le papier ne noircit pas et si la lumière brûle facilement, les émanations d'hydrogène sulfuré et d'acide carbonique ne sont point à craindre, et l'air de l'excavation est probablement respirable, à moins qu'il ne soit caractérisé par une odeur infecte. Il est bon de remarquer, toutefois, que les lumières brûlent encore mais brûlent mal dans un air qui contient 5 à 6 pour cent d'acide carbonique, que la lampe ordinaire du mineur brûle dans un air qui ne contient plus que 16 pour cent d'oxygène et une chandelle de suif dans un air à 18 pour cent. Une lampe d'Argant à double courant d'air *s'éteint* quand la proportion d'oxygène est au-dessous de 14 pour cent en volume.

VERNIER. Voyez l'article *Instruments de l'Ingénieur*, page 953.

VIS. Organe mécanique trop répandu pour qu'il soit nécessaire de le décrire ici. Il paraît avoir été connu des anciens sous la forme qu'il reçoit de nos jours, à cela près que l'écrou, au lieu d'envelopper la vis sur tout son pourtour, se composait de segments disjoints assez semblables à des *cremaillères*; voyez les *collections*, livre VIII, de *Pappus*, géomètre d'Alexandrie qui vivait au quatrième siècle de l'ère chrétienne (*).

La vis donne lieu à un frottement trop énergique pour qu'il soit jamais permis de faire abstraction de celui-ci dans le calcul de la machine.

Pour en tenir compte dans la *vis à filets carrés*, on admet que la réaction de la vis et de l'écrou s'opère le long de l'hélice

---

(*) Trompé par quelques modèles envoyés de *Canton* à la grande exposition de Londres, un érudit s'est un peu hâté de conclure que *la vis* nous venait des Chinois. Je trouve, au contraire, dans le Journal du voyage en Chine de M. *Itier*, de 1843 à 1846, que si le *levier*, la *poulie*, le *treuil* et la *roue dentée* y sont depuis longtemps connus, ce n'est que très-récemment que *la vis* y a été importée d'Europe.

On lit dans le même journal (pag. 12) l'indication suivante, à propos des boutiques de *Canton* : « Ce sont des jeux d'échecs sculptés et tournés, où la « pièce principale, celle du roi, est représentée par le buste de *Napoléon* « dans l'attitude historique, c'est-à-dire les bras croisés et le petit chapeau « brassé carré. » Si de tels jeux avaient été adressés à l'exposition de Londres, on aurait pu démontrer avec la même logique que *Napoléon*, aussi bien que la vis, était originaire de la Chine.

moyenne de la pente du filet. Or si, par la pensée, on développe cette hélice moyenne sur un plan, on voit facilement qu'elle y forme un plan incliné sur l'horizontale d'un angle que nous appelons α, plan dont la hauteur est le pas h de la vis, et dont la base est la circonférence $2\pi r$ décrite avec le rayon $r =$ distance horizontale de l'hélice moyenne à l'axe du noyau.

On a donc

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{h}{2\pi r}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Cela posé, soit Q la résistance utile agissant parallèlement à l'axe du noyau, — F la force *horizontale* qui, appliquée dans le plan incliné formé par le développement de l'hélice moyenne, élèverait la charge Q sur ce plan, f le coefficient et φ l'angle du frottement de la vis et de son écrou, $f = \text{tang.}\,\varphi$. On aura pour la valeur de F (page 1283, *formule* 24)

$$F = Q\,\text{tang.}\,(\alpha + \varphi). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en remarquant que F étant horizontale et $\theta = (-\alpha)$, le $\cos.(\theta - \varphi)$ de cette formule y devient $\cos.\,(-\alpha - \varphi) = \cos.\,(\alpha + \varphi)$.

Multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par le chemin $2\pi r$ décrit par la force horizontale F pour un tour de la vis; remarquant que la puissance P qui agit tangentiellement au cercle décrit par l'extrémité du levier R embarré dans la tête doit, pour un tour, faire un travail $2\pi R P$ équivalent à celui de la force F dans le même temps, on a pour le travail T_m à dépenser pour chaque tour de la vis

$$T_m = 2\pi R P = 2\pi r F = 2\pi r Q\,\text{tang.}\,(\alpha + \varphi). \; . \quad (3)$$

Ce travail T_m, en négligeant les frottements, c'est-à-dire en faisant $\varphi = o$, se réduirait évidemment au travail utile T_u ou à

$$T_u = 2\pi r Q\,\text{tang.}\,\alpha = Q h. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

De sorte que, si le mouvement est toujours uniforme, on a pour une durée quelconque, en tenant compte des frottements, la relation suivante qui, je crois, n'avait pas encore été donnée sous une forme aussi simple :

$$T_m = T_u \times \frac{\text{tang.}\,(\alpha + \varphi)}{\text{tang.}\,\alpha} \; . \; . \; . \; (5). \; . \; . \quad \text{et} \quad \text{tang.}\,\alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

Elle suppose essentiellement que la somme P des forces motrices est symétriquement distribuée par rapport à l'axe du noyau, que, par exemple, P se partage en deux forces $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P$ agissant

chacune à l'extrémité des leviers R ; s'il n'en était pas ainsi, il naîtrait évidemment un autre frottement latéral.

L'équation de la *vis à filets triangulaires* diffère à peine de celle qui précède, mais le coefficient f ou l'angle φ du frottement n'est pas déterminé avec assez de précision pour qu'il soit nécessaire, en pratique, de tenir compte de cette légère différence. On pourra donc employer les équations ci-dessus pour l'une et l'autre vis.

Détails de construction. Lorsqu'il n'y a qu'un filet à la vis à filet carré, on lui donne autant de hauteur e que de saillie, et les vides étant faits égaux aux pleins, le pas $h = 2e$. L'écrou ne doit pas embrasser moins de trois filets : son épaisseur est donc $6e$. On fait e à peu près égal au tiers du rayon du noyau et celui-ci se règle d'après l'effort auquel la vis pourra être soumise, soit 6 kil. par millimètre carré de section si elle est en fer, et 0^k 800 si elle est en bois. D'après ces conventions, le rayon de l'hélice extérieure égale $4e$ et l'on a ainsi pour le rayon r de l'hélice moyenne

$$r = \frac{4e + 3e}{2} = \frac{7}{2}e = \frac{7}{4}h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Dans les vis à filets triangulaires, les hauteurs du triangle générateur augmentent à mesure que la saillie augmente. Lorsqu'elles sont en bois tendre et destinées à supporter de grands efforts, le triangle générateur est isocèle et rectangle au sommet; il est équilatéral dans les vis en bois dur ou en métal. Dans les deux cas le pas h est la base du triangle, si la vis n'a qu'un seul filet, ce qui est le cas le plus général. L'épaisseur de l'écrou $= 3h$, la saillie e est le tiers du rayon du noyau, et la grosseur de celui-ci se règle comme on l'a dit pour la vis à filets carrés. Le frottement est souvent tel dans les vis en bois que le travail moteur T_m est quatre fois et demie aussi grand que le travail utile T_u.

La vis sans fin se compose d'une vis à filets carrés dont les filets engrènent continuellement dans les dents d'une roue dont le plan contient l'axe de la vis ; et ces dents reçoivent sur le cylindre de la roue une inclinaison telle qu'elles se présentent à la vis parallèlement à la tangente du filet qui répond au point de contact; leurs arêtes sont donc obliques à l'axe de leur roue. Ce mécanisme donne lieu à des frottements qui absorbent une si grande quantité de travail que nous ne nous en occuperons pas ici. Il paraît avoir été connu de *Pappus* (voyez livre VIII, proposition 24).

VIS D'ARCHIMÈDE, machine connue des anciens et décrite par *Vitruve*. D'après *Navier*, elle ne peut élever l'eau qu'à une petite hauteur, et comme il faut que l'eau retombe de l'extrémité supérieure dans une bâche, cette circonstance diminue encore l'effet

utile qui pourrait être obtenu. Les observations indiquent qu'un homme élève dans sa journée au moyen de cet appareil 90 mètres cubes d'eau à 1 mèt., mais la faiblesse de ce travail utile tient peut-être en partie à la manière imparfaite d'appliquer les manœuvres à la vis. D'autres observations faites sur des vis mues par des chevaux ont donné des résultats plus avantageux. Je renvoie aux notes de *Navier* sur l'*Architecture hydraulique de Belidor*, pour la théorie de cet appareil dont les résultats s'accordent peu d'ailleurs avec les observations.

VITESSE. Voyez l'article *Forces*, pag. 777, et la page 1137 pour le principe des *vitessses virtuelles*.

VOITURES. D'après M. *Morin*, le quotient de l'effort du tirage par la charge totale varierait comme il suit pour les fourgons de roulage suspendus, à quatre roues, et marchant au pas :

Sur une route pavée en très-bon état.	$\frac{1}{60}$ à $\frac{1}{66}$
——————— à l'état ordinaire d'entretien. . . .	$\frac{1}{39}$ à $\frac{1}{43}$
Route empierrée en bon état.	$\frac{1}{33}$ à $\frac{1}{37}$
——————— en état médiocre.	$\frac{1}{26}$ à $\frac{1}{30}$
——————— en mauvais état..	$\frac{1}{21}$ à $\frac{1}{23}$

Suivant *Navier*, la route étant supposée horizontale et les chevaux marchant au pas, le poids de la voiture est environ le quart de la charge utile (il s'agit de la plus grande charge qui a lieu en été), le poids des roues seules forme les $\frac{2}{5}$ du poids de la voiture, ou les $\frac{2}{25}$ du poids total, et l'effort du tirage est $\frac{1}{12}$ de ce poids total sur une route en empierrement, et $\frac{1}{20}$ sur une route pavée ; si la route pavée ou empierrée est très-bonne, l'effort du tirage au pas est réduit à $\frac{1}{30}$ du poids total. Il admet d'ailleurs pour l'effort absolu exercé par un cheval de force moyenne 60 kil., sa vitesse étant $0^{m}.90$ par seconde et la durée du travail journalier ne dépassant pas dix heures.

VOLANTS. Les volants jouent dans les machines sur lesquelles on les monte deux rôles distincts, analogues, il est vrai, mais assez différents cependant pour qu'il importe beaucoup de ne pas les confondre.

Tantôt, comme dans les laminoirs mus par des roues hydrauliques, ils sont chargés d'absorber ou d'emmagasiner l'excès du travail disponible sur le travail résistant pendant que la machine tourne à vide, et ils restituent ensuite cet excès pendant les instants où le passage du fer sous les cylindres causerait une résistance que, sans leur assistance, le travail normal de la roue ne saurait vaincre

longtemps: véritables *percepteurs* de travail, ils l'encaissent quand il est en excès dans le système, et dépensent ensuite cet excès au moment où l'ouvrage à faire l'emporterait sur le travail du moteur.

Tantôt, comme dans les machines à vapeur, leur inertie perçoit bien encore et restitue ensuite l'excès du travail moteur sur le travail résistant, mais ces perceptions et ces restitutions s'opèrent à très-courtes périodes et la fonction du volant consiste uniquement à *régulariser* le mouvement de la machine, à le rapprocher du mouvement presque rigoureusement uniforme qu'exigent certaines fabrications, les filatures par exemple.

Les dimensions que doivent recevoir les *volants* suivant qu'ils sont destinés à *accumuler* le travail ou à *régulariser* le mouvement d'une machine ne sauraient donc être réglées par des considérations identiques, et ce serait faire un grand abus des formules que de les appliquer indifféremment aux volants *collecteurs* de travail et aux volants *régulateurs*.

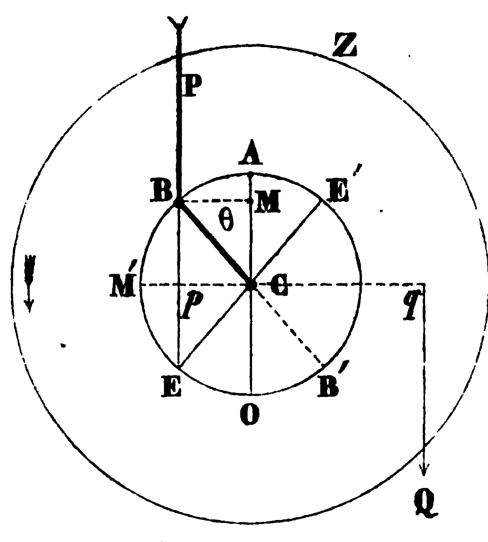
La théorie de ces derniers est la seule que nous nous proposions de considérer ici; elle a été dès 1819 l'objet d'une note de *Navier* à l'architecture hydraulique de *Belidor*, page 387. Elle a été reprise et étendue par M. *Poncelet* dans ses célèbres cahiers de Metz et dans ses leçons de 1828 aux ouvriers de cette ville. Enfin, je la trouve heureusement développée et présentée sous une forme différente par le savant professeur *Moseley* dans ses *Mechanical principles* publiés à Londres en 1843. C'est le travail original de M. *Moseley* que je prendrai ici pour guide, en m'efforçant, bien malgré moi, de le dégager de la considération directe des quantités infinitésimales que la fausse direction de notre enseignement industriel repousse encore de quelques écoles.

Soit P l'effort, supposé constant en direction et en intensité, exercé par une bielle sur le bouton B d'une manivelle CB, et supposons de plus que le volant ZZ soit monté sur l'arbre même de la manivelle.

Q est la résistance supposée constante en intensité et direction; cette résistance agit à la distance constante q de l'axe de rotation C.

Pour obtenir le travail de la bielle pendant que le bouton de la manivelle décrit un arc quelconque AB du cercle dont le rayon est la longueur b=CB du bras de la manivelle, il n'y a qu'à projeter l'arc AB sur la direction supposée constante de la force P. θ étant la longueur de l'arc ACB mesurée à un mètre de l'axe C, on a ainsi pour le travail de la puissance :





$$P \times \overline{AM} = P.\, b \text{ sin. vers. } \theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

et les angles décrits par les points d'application de la puissance P et de la résistance Q étant ici égaux, on a $Qq\theta$ pour le travail simultané de la résistance.

$$Pb \text{ sin. vers. } \theta - Qq\theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

est donc, pour cette période, l'excès du travail moteur sur le travail résistant.

Appelons maintenant course *utile* ou *efficace* du piston toute course pendant laquelle la pression qu'il exerce est constante et $= P$, le travail moteur du piston pour une course utile sera $2b\,P$. De son côté, le travail de la résistance sera $2\pi q Q$ pour une révolution complète du volant. Donc si n désigne le nombre des courses utiles ou efficaces du piston qui correspond à *une* révolution complète du volant, et si la machine a atteint un mouvement périodiquement uniforme, comme on le suppose, on aura :

$$\left. \begin{array}{l} 2nb\,P = 2\pi q\,Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \text{ou} \qquad Pb = \dfrac{\pi}{n} q\,Q \qquad \text{et} \qquad Qq = \dfrac{n}{\pi} b\,P \; . \; . \; . \end{array} \right\} \quad (3)$$

Substituant cette valeur de Qq dans l'équation (2), l'excès du travail moteur sur le travail résistant prendra la forme :

$$Pb \left[\text{sin. vers. } \theta - \frac{n\theta}{\pi} \right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Or nous savons que cet excès égale la demi-force vive acquise par toutes les pièces mobiles du système pendant que le bouton de la manivelle a marché de A en B.

Supposons que cette demi-force vive ait passé tout entière dans la masse du volant, cette pièce devant recevoir des dimensions telles que la force vive acquise par les autres pièces de la machine puisse être considérée comme négligeable par rapport à la sienne. Appelons $\dot{I}$ son moment d'inertie de *volume*, ϖ le poids du mètre cube de sa substance, ω_0 la vitesse angulaire du volant quand le bouton de la manivelle était à l'origine A, ω celle qu'il a acquise lorsque le bouton est parvenu en B, le principe des forces vives donne alors la relation

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\varpi \dot{I}}{g}(\omega^2-\omega_0^2)=Pb\left[\text{sin. vers. }\theta-\frac{n\theta}{\pi}\right]\ .\ .\ .\ (5)$$

qui conduit à celle-ci :

$$\omega^2-\omega_0^2=\frac{2gPb}{\varpi \dot{I}}\left[\text{sin. vers. }\theta-\frac{n\theta}{\pi}\right]\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Positions du bouton de la manivelle correspondantes à la moindre et à la plus grande vitesse angulaire du volant. θ étant jusqu'ici un arc quelconque compté à partir de la verticale CA, supposons, afin de ne pas multiplier les notations, qu'il soit précisément celui qui correspond à la position du bouton pour laquelle le moment de la puissance P fait strictement équilibre à celui de la résistance Q, on aura alors

$$Pp=Pb\ \text{sin.}\ \theta=Qq\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

relation qui, combinée avec l'équation (3), fera connaître l'angle θ qui correspond à l'égalité des moments en question et donnera

$$\text{sin.}\ \theta=\frac{n}{\pi}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Or un même sinus correspond à deux arcs dans le même demi-cercle, l'un $\theta=$ ACB, l'autre $(\pi-\theta)=$ ACE ; en outre, depuis B jusqu'en E, le moment de P est toujours plus grand que celui de Q, et les arcs décrits simultanément à l'unité de distance par les points d'application de P et de Q étant égaux et Q constant, la vitessse angulaire du volant augmentera pour cette période de la révolution. Au contraire, elle diminuera en dehors de l'angle BCE, Pp étant alors toujours plus petit que Qq; ainsi et tant que l'on ne considère que le demi-cercle AM'E, la vitesse angulaire sera *minimum* en B et *maximum* en E; et si nous désignons sa valeur *minimum*

par ω et sa valeur *maximum* par Ω, la dernière correspondra à l'arc $(\pi-\theta)$ et la première à l'arc θ, ces arcs étant tels qu'on ait

$$\theta = \text{arc.}\left(\sin. = \frac{n}{\pi}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

On a donc pour l'équation des forces vives entre les positions B et E du bouton correspondantes à la moindre et à la plus grande vitesse angulaire du volant :

$$\Omega^2 - \omega^2 = \frac{2gPb}{\varpi I} \times A \ldots\ldots \quad (10)$$

en faisant, pour abréger, le *nombre* A

$$A = \sin.\text{vers.}(\pi-\theta) - \frac{n}{\pi}(\pi-\theta) - \sin.\text{vers.}\,\theta + \frac{n}{\pi}\theta \,. \quad (11)$$

ce qui revient à

$$A = \left[2\cos.\theta - n\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \ldots\ldots \quad (12)$$

et donne définitivement

$$\Omega^2 - \omega^2 = \frac{2gPb}{\varpi I}\left[2\cos.\theta - n\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \ldots \quad (13)$$

Dimensions qu'il convient de donner au volant pour que sa vitesse angulaire se maintienne entre certaines limites. Soit $\frac{N}{2}$ le nombre moyen de révolutions du volant en une minute, et dès lors $\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{60}$ le nombre moyen de révolutions ou de parties de révolutions en une seconde ; $\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{60}\cdot 2\pi = \frac{\pi N}{60}$ sera l'espace décrit en une seconde par un point du volant situé à un mètre de l'axe, ou bien encore sa vitesse angulaire moyenne.

Or nous voulons que la vitesse angulaire du volant ne s'éloigne jamais de plus de $\frac{1}{m^{\text{ième}}}$ de la vitesse moyenne ci-dessus ; c'est demander que sa plus grande valeur ne dépasse pas

$$\Omega = \frac{\pi N}{60}\left[1 + \frac{1}{m}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

et que la plus petite ne s'abaisse pas au-dessous de

$$\omega = \frac{\pi N}{60}\left[1 - \frac{1}{m}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

C'est enfin demander que l'on ait

$$\Omega^2 - \omega^2 = (\Omega + \omega)(\Omega - \omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi^2 N^2}{(30)^2} \ldots (16)$$

Substituant cette valeur dans l'équation (13) elle prend la forme

$$\frac{\pi^2 N^2}{m(30)^2} = \frac{2gPb}{\varpi \dot{I}}\left[2\cos.\theta - n\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \ldots\ldots (17)$$

Soit maintenant C le nombre de *chevaux* de la machine estimé d'après le travail fait sur la tige du piston, 75^{km}. C sera le travail de la machine en une seconde et $60 \times 75 \times C = 4500\,C$ kilogrammètres sera le travail par minute.

Or $2Pb$ est le travail correspondant à chaque course utile du piston, n le nombre de ces courses pour une révolution du volant et $\frac{N}{2}$ le nombre de révolutions du volant en une minute : donc le travail par minute a cette double expression :

$$\frac{Nn}{2} \cdot 2Pb = 4500\,C \ldots\ldots\ldots (18)$$

et

$$2Pb = \frac{9000\,C}{nN} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Substituant cette valeur (19) de $2Pb$ dans l'équation (17), et tirant la valeur de $\varpi\dot{I}$, il vient :

$$\varpi\dot{I} = \frac{8\,100\,000\,gmC}{\pi^2 N^3}\left[\frac{2}{n}\cos.\theta - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \ldots (20)$$

ou en mettant pour g et $\frac{1}{\pi^2}$ leurs valeurs numériques $g = 9.80896$ et $\frac{1}{\pi^2} = 0.10132$

$$\varpi\dot{I} = \frac{8050135\,mC}{N^3}\left[\frac{2}{n}\cos.\theta - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \ldots (21)$$

Afin d'augmenter encore l'influence régulatrice du volant, négligeons la masse de ses bras ou supposons la masse entière du volant concentrée à la circonférence moyenne de sa jante. R désignant le rayon de cette circonférence, V le volume du volant et W son poids, on a évidemment

$$VR^2 = \dot{I} \text{ et } \varpi\dot{I} = \varpi VR^2 = WR^2 \ldots\ldots (22)$$

Substituant enfin cette valeur de ϖI dans l'équation (21), on parvient à la valeur générale

$$W = 8\,050\,135 \left[\frac{2}{n}\cos.\theta - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \frac{mC}{R^2N^3} \ldots (23)$$

qui donnera le poids W du volant de rayon moyen R faisant $\frac{N}{2}$ révolutions par minute à monter sur une machine de C chevaux pour que sa vitesse angulaire ne s'écarte à aucun instant de plus de $\frac{1}{m^{\text{ième}}}$ de sa valeur moyenne.

On voit que ce poids W est directement proportionnel au nombre de chevaux C de la machine ainsi qu'au dénominateur m de la fraction *régulatrice*.

Si la jante du volant est en fonte, S étant la section de cette jante et ϖ le poids moyen du mètre cube de fonte $=7200$ kil., on a $2\pi RS$ pour le volume V de la jante et

$$W = \varpi \times 2\pi RS = 45239\,RS \ldots\ldots\ldots (24)$$

Substituant cette valeur de W dans l'équation (23), on obtient, pour déterminer soit la section S soit le rayon moyen R d'un volant *en fonte*, la relation

$$R^3 = 177.94 \left[\frac{2}{n}\cos.\theta - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right] \frac{mC}{SN^3} \ldots (25)$$

Supposons maintenant le volant monté sur l'arbre même de la manivelle, de sorte que l'une et l'autre pièce aient la même vitesse angulaire, ce qui est le cas le plus ordinaire pour les machines à vapeur, et tirons des formules générales (23) et (25) le poids W et le rayon moyen R ou la section S du volant en fonte 1° de la machine à *simple effet*, 2° de la machine à *double effet*, 3° de la machine à manivelle double et à deux cylindres.

Volant de la machine à simple effet. Dans ces machines, il n'y a qu'*une* course utile du piston pour une révolution complète du volant; donc $n=1$, et si l'on désigne par K la valeur numérique de la parenthèse des formules générales (23) et (25), on a pour le cas actuel :

$$K = \left[2\cos.\theta - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)\right]$$

$$\theta = \text{arc.}\left(\sin. = \frac{1}{\pi}\right) = \text{arc.}(\sin. = 0.3183098) = 18^\circ 33'$$

d'où $\cos.\theta = 0.9480460$; $\frac{\theta}{\pi} = \frac{18^\circ 33'}{180^\circ} = 0.103055$

$$1 - \frac{2\theta}{\pi} = 0.793888 \quad \text{et enfin} \quad K = 1.102203$$

Ainsi, pour ces machines, et quelle que soit la matière du volant,

$$W = 8\,872\,883 \frac{m\,C}{R^2\,N^3} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (26)$$

et si le volant est en fonte, on a pour sa section S et pour son rayon moyen R

$$S = 196.13 \frac{m\,C}{R^3\,N^3} \quad \text{et} \quad R = \frac{5.81}{N} \sqrt[3]{\frac{m\,C}{S}} \,.\,. \quad (27)$$

Volant de la machine à double effet. Deux courses *utiles* du piston correspondent ici à *une* révolution du volant, donc $n = 2$

$$\sin.\,\theta = \frac{2}{\pi} = 0.636619 = \sin.\ 39^\circ 32'$$

$$\cos.\,\theta = 0.7712549\,; \qquad \frac{\theta}{\pi} = \frac{39^\circ.32'}{180^\circ} = 0.21963$$

$$\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) = 0.56074 \quad \text{et enfin} \quad K = 0.21051$$

d'où résulte pour le poids W du volant, quelle qu'on soit la substance (23)

$$W = 1\,694\,634 \frac{m\,C}{R^2 N^3} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (28)$$

et si le volant est en fonte, on a pour la section S de sa jante et pour son rayon moyen R (25).

$$S = 37.458 \frac{m}{R^3 N^3} \quad \text{et} \quad R = \frac{3.345}{N} \sqrt[3]{\frac{m\,C}{S}}. \quad (29$$

M. *Morin* cite une machine de 40 chevaux construite par *Boulton* et *Watt*, où le volant fait 19 révolutions par minute, d'où $N = 38$; ces célèbres ingénieurs ont donné à ce volant un rayon moyen $R = 3.05$ (ou 10 pieds anglais) et un poids $W = 9450$ kil. Il en résulte que *Boulton* et *Watt* ont pris ici pour le dénominateur *m* de la fraction *régulatrice* $m = 71$ ou 72, dénominateur qui est plus que double de celui que M. *Morin* admet, et qui prouve que *Watt* donnait à ses machines une régularité deux fois plus grande que celle que l'on suppose (*).

(*) Les constructeurs anglais ont longtemps réglé le poids des volants d'après la règle suivante, introduite, je crois, par *Fenton Murray* et *Wood*.
Règle. Multipliez le nombre constant 2000 par le nombre C de chevaux,

Machine à deux cylindres et à deux manivelles, chacune à double effet. On a montré § 15, page 1109 de l'article *manivelle* que le travail d'une manivelle double, dont le bras est b était équivalent à celui d'une manivelle simple dont le bouton serait soumis à l'effort $2P$, dont le bras serait $\frac{b}{\sqrt{2}}$, bras moyen dont la direction couperait toujours en deux parties égales l'angle droit mobile qui sépare les deux bras réels. Or les valeurs générales (23) et (25) sont absolument indépendantes de la longueur du bras, quantité qui n'entre pas dès lors dans le calcul des dimensions du volant. Il en résulte qu'il suffit, pour calculer ces dimensions dans le cas actuel, de mettre $2P$ à la place de P dans l'équation (19) qui deviendra ainsi

$$2Pb = \frac{9000}{nN} \cdot \frac{C}{2}$$

et qui montre qu'il suffit d'écrire $\frac{C}{2}$ à la place de C dans les formules (28) et (29) qui ont été déduites de (19) pour obtenir les valeurs relatives au cas actuel. On trouve ainsi :

$$W = 847317 \frac{mC}{R^2 N^3}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

et si le volant est en fonte,

$$S = 18.729 \frac{mC}{R^3 N^3} \quad \text{et} \quad R = \frac{2.654}{N} \sqrt[3]{\frac{mC}{S}} \quad \ldots \quad (31)$$

Travail consommé par le frottement des volants. L'influence régulatrice des volants ne s'obtient qu'au prix d'une consommation de travail souvent très-importante due au frottement que leur énorme poids exerce sur les axes qui les portent et dont nous devons prendre une idée.

---

divisez ce produit par le carré de la vitesse (exprimée en pieds anglais) d'un point de la circonférence moyenne du volant, le quotient exprimera le nombre de quintaux anglais que devra compter le poids W du volant.

En faisant l'application de cette règle aux conditions du texte, on trouverait (en prenant le quintal anglais $= 50^k.8$) que $W = 10500^k$ en nombre rond.

A cette règle déjà ancienne, les constructeurs anglais substituent aujourd'hui la règle suivante qui donne peut-être des poids un peu faibles, et dès lors une régularisation moins parfaite.

Autre règle. Multipliez le nombre constant 1368 par le nombre C de chevaux de la machine, divisez le produit par le diamètre du volant en pieds anglais multiplié lui-même par le nombre de révolutions qu'il doit accomplir en une minute ; le quotient exprime le nombre de quintaux anglais qui doit former le poids du volant.

L'application de cette règle au cas ci-dessus donne $W = 7315$ kilogrammes.

Soient ρ le rayon de l'axe du volant, $f =$ tang. φ le coefficient du frottement de cet axe sur ses coussinets, ou φ l'angle de ce frottement, $fW =$ W tang. φ sera la résistance que le frottement oppose à la rotation, et $2\pi\rho fW$ le travail qu'elle consomme pour chaque tour du volant; $\frac{N}{2}$ désignant toujours le nombre moyen de révolutions en une minute, $N\pi\rho fW$ sera le travail consommé en une minute par le frottement; divisant par 60 pour avoir le travail consommé par seconde, et divisant encore par 75 pour obtenir ce travail en chevaux, il vient enfin :

$$\frac{Nf\rho\pi}{4500}.\ W = 0.0006981\ Nf\rho\ W \text{ chevaux}\ldots \quad (32)$$

Mettant pour W les valeurs trouvées plus haut, nous avons pour le travail exprimé en chevaux, qui sera consommé par le seul frottement du volant, savoir :

Dans la machine à simple effet (26)

$$6194\frac{f\rho mC}{R^2N^2} \text{ chevaux}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Dans la machine à double effet (28)

$$1183\frac{f\rho mC}{R^2N^2} \text{ chevaux}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Et enfin *dans la machine à deux cylindres* (30)

$$592.5\frac{f\rho mC}{R^2N^2} \text{ chevaux de frottement}\ldots \quad (35)$$

Ainsi le frottement du volant de la machine de *Watt*, qui a été citée plus haut, devait, en donnant à f et ρ des valeurs probables, consommer le travail d'*un* cheval au moins.

W

WATT (*James*), le plus illustre ingénieur des temps modernes, né à *Greenock* en 1736, mort à *Heathfield*, près *Birmingham*, le 25 août 1819. « Portez vos regards sur la métropole de ce puis- « sant empire, disait *Davy*, sur nos villes, sur nos villages, sur « nos arsenaux, sur nos manufactures; examinez les cavités sou- « terraines et les travaux exécutés à la surface du globe. Contem- « plez nos rivières, nos canaux, les mers qui baignent nos côtes,

« partout vous trouverez l'empreinte des bienfaits éternels de ce « grand homme. »

Cinq statues ont été élevées sur divers points de l'Angleterre à ce bienfaiteur du genre humain ; et elles n'ont pas coûté une obole au trésor public! Gloire au peuple qui comprend ainsi *Archimède* et ne comprend pas *Alexandre !*

Z

ZINC. Métal blanc-bleuâtre, inconnu aux anciens, et qui n'est guère exploité en Europe que depuis un siècle. Il est peu malléable à froid, mais il le devient assez pour se laisser laminer en feuilles minces et étirer en fils, vers la température de 100° ; au-dessus de cette température il devient cassant, et vers 200° il peut être pulvérisé. Il entre en fusion vers 360° dès qu'il commence à rougir, et si on le chauffe plus fortement, il se volatilise ; on peut le distiller à la chaleur blanche.

Son poids spécifique varie de 6.8 à 7.2. Il est peu tenace, car un fil de 0m.002 diamètre rompt sous une charge de 12 kil. Il est moins mou que l'étain et le plomb, et il graisse la lime. Il a une odeur et une saveur particulières.

Action de l'atmosphère et de l'eau. Le zinc s'altère peu dans l'air sec; mais, dans l'air humide, il se recouvre promptement d'une couche de son protoxyde qui est d'un gris clair, et qui le préserve, dit-on, de toute oxydation ultérieure. La présence des alcalis favorise l'oxydation du zinc par l'air et par l'eau. Le zinc décompose l'eau facilement ; cette décomposition est lente, mais déjà sensible à la température ordinaire à l'aide du contact de l'air ; et pour peu qu'on chauffe, il se dégage de l'hydrogène.

Action des réactifs. Le zinc se dissout aisément dans l'acide hydrochlorique et dans l'acide sulfurique, à la température ordinaire, en dégageant beaucoup de gaz hydrogène. Il se dissout encore dans l'acide nitrique, et même avec le temps dans la potasse pure, dans l'ammoniaque et dans les acides végétaux. Ces réactions sont beaucoup plus vives pour le zinc du commerce que pour le zinc pur, ce que l'on attribue aux matières étrangères, carbone, plomb, arsenic, cuivre, cadmium, fer, manganèse, qui se trouvent souvent associées au premier.

Oxyde. On ne connaît guère qu'un oxyde de zinc : blanc, léger, cotonneux, insipide, inodore, infusible, passant au jaune serin par l'effet de la chaleur, et revenant au blanc par le refroidissement à moins qu'il ne contienne de l'oxyde de fer. Il est formé de zinc 80.1 + oxygène 19.9. On peut l'obtenir soit en chauffant le zinc

au rouge vif dans un creuset, et enlevant l'oxyde à mesure qu'il se produit, soit en précipitant un sel de zinc par le carbonate de soude, lavant le précipité et chauffant le résidu au rouge pour le ramener de l'état de carbonate de zinc à celui d'oxyde.

Extraction. Le zinc s'extrait de deux minerais principaux connus sous le nom de *calamine* et de *blende.* La calamine peut être divisée en calamine *blanche*, qui est un carbonate mêlé de silicate de zinc peu chargé de fer et en *calamine rouge* ou briquetée, qui est le même minerai mélangé de peroxyde de fer hydraté. La première renferme de 50 à 60 % d'oxyde de zinc, et la dernière de 40 à 45. La *blende* est un sulfure de zinc mêlé à d'autres sulfures renfermant de 45 à 60 zinc métallique. Le gîte de zinc le plus abondant de l'Europe se trouve à la Vieille-Montagne, entre Liége et Aix-la-Chapelle ; le minerai ordinaire que l'on en tire est une calamine formée de carbonate anhydre et de silicate hydreux renfermant environ 0.90 de carbonate de zinc.

Alliage de zinc et de fer. Dissolvez l'alliage dans l'eau régale,— étendez d'eau, —sursaturez la liqueur d'ammoniaque qui dissoudra l'oxyde de zinc en précipitant le fer à l'état de peroxyde; — filtrez pour recueillir celui-ci,— lavez le dépôt d'abord avec de l'ammoniaque, puis avec de l'eau pure. Séchez, — calcinez, et d'après le poids du résidu, calculez la proportion du fer métallique (page 1217), puis par différence celle du zinc.

On peut encore dans la dissolution régale de l'alliage verser, goutte à goutte, du carbonate de soude jusqu'à ce qu'elle soit complétement décolorée, on arrive ainsi à précipiter seulement l'oxyde de fer. On fait bouillir ensuite la liqueur filtrée avec un excès de carbonate alcalin qui précipitera ainsi presque tout l'oxyde de zinc.

Oxyde de fer et oxyde de zinc. Pour séparer ces oxydes, on les dissout comme ci-dessus dans l'eau régale. On précipite encore le fer à l'état de peroxyde par l'ammoniaque pure qui dissout en même temps l'oxyde de zinc. On recueille le peroxyde, et on le lave comme on l'a dit plus haut. Enfin, on précipite l'oxyde de zinc de la liqueur filtrée, en y versant du carbonate de potasse ; puis, évaporant jusqu'à siccité, on obtient à peu près tout le zinc, à l'état de carbonate, une petite partie de l'oxyde de zinc s'étant précipitée avec le fer. On ramène le carbonate de zinc à l'état d'oxyde, en le faisant rougir dans un creuset de platine, et on le pèse.

Voyez pour les couvertures en zinc la page 475.

FIN.

